

УДК 539.3

## ДОЛГОВЕЧНОСТЬ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ НАГРУЖЕНИИ

Э. Б. Завойчинская<sup>1</sup>

В работе систематизированы известные физические и феноменологические подходы и критерии разрушения конструкционных материалов при длительных и переменных нагрузениях и предложена их классификация. Современное состояние проблемы прогнозирования долговечности связывается с построением многоуровневых вероятностных моделей при сложном нагружении, основанных на физических закономерностях развития процессов хрупкого и вязкого разрушений.

*Ключевые слова:* моделирование, разрушение, критерий разрушения, длительное нагружение, переменное нагружение, малоцикловая усталость, многоцикловая усталость, физические модели, феноменологические модели, многоуровневые модели.

The known physical and phenomenological approaches and failure criteria for structural materials at long-term and variable loading are systematized and their classification are proposed. The modern state of the durability problem is associated with the formulation of multi-level probabilistic models at complex loading, based on the physical laws of processes of brittle and viscous failure.

*Key words:* modeling, fracture, failure criteria, long-term loading, variable loading, low-cycle fatigue, high-cycle fatigue, physical models, phenomenological models, multi-level models.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-66-1-11

**1. Введение.** Прогнозирование долговечности конструкционных материалов при длительном и переменном нагружении является одной из основных задач оценки сроков безопасной эксплуатации инженерных систем. Решение этой задачи опирается на экспериментальные исследования процессов разрушения материалов, которые проводятся в физике твердого тела, металловедении и механике деформируемого твердого тела методами соответствующих научных направлений. Эти исследования очень обширны, что вызвано большим разнообразием физических механизмов и физико-механических свойств материала, видов напряженно-деформированных состояний, температурных условий и т.п. [1–20]. При этом проведение испытаний, главным образом натуральных, связано с большими трудовыми и материальными затратами, особенно при сложных напряженно-деформированных состояниях, которые, как правило, возникают при эксплуатации. Процесс разрушения элементов конструкций является случайным процессом, что обусловлено как случайностью процесса нагружения, так и случайностью прочностных свойств материала. Возникают вопросы о программах испытаний, о разработке экспериментальных методов, в частности возможности применения методов ускоренных испытаний, и др. Экспериментальное построение полных кривых усталости сопряжено с трудоемким процессом получения опытных данных и их статистической обработки. Поэтому разработка математических моделей определения долговечности и проведение численных экспериментов, особенно при сложных процессах нагружения, является необходимой и актуальной задачей проектирования инженерных систем и находится в стадии развития.

В настоящей статье делается попытка систематизировать известные теоретические подходы и критерии разрушения, в том числе значительное количество существующих обзоров, и предлагается их классификация.

Проблема построения адекватных критериев включает полную идентификацию модели, т.е. метод экспериментального определения всех материальных функций и констант, и оценку области применимости модели: классы процессов, группы материалов и др. В этом отношении в работе представляются подходы, которые имеют экспериментальное обоснование и более всего используются при построении математических моделей разрушения конкретных конструкций и в инженерных

<sup>1</sup>Завойчинская Элеонора Борисовна — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: elen@velesgroup.com.

Zavoychinskaya Eleonora Borisovna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Elasticity Theory.

приложениях. Методы идентификации и результаты верификации моделей не приводятся, с этим можно ознакомиться в соответствующих публикациях.

Объектом настоящих исследований являются изотропные металлы и сплавы. Полимерные материалы, различные классы композиционных материалов и специальных материалов не рассматриваются. Моделирование процессов разрушения и критерии разрушения элементов конструкций также требуют отдельного обсуждения.

Характер изменения эксплуатационных нагрузок, существенная неоднородность механических характеристик материалов, в том числе технологического происхождения, делают необходимым применение вероятностных методов оценки долговечности. В расчет долговечности вводятся вероятностные параметры свойств материала (кривой Велера, характеристик трещин, уравнения Коффина–Мэнсона, соотношения Пэриса).

Согласно современным представлениям [6, 7, 9, 10, 17, 20], процессы хрупкого разрушения конструкционных материалов характеризуются обязательным последовательным прохождением следующих стадий: образование полосовых (сетчатых) субструктур в результате эволюции дефектов металлургического и технологического происхождения и достижения критических значений их плотности в областях критической кривизны кристаллической решетки на наномасштабном уровне [17]; их развитие с зарождением микроскопических трещин и как следствие слияний — нераспространяющихся коротких трещин на микроуровне; в результате слияний последних формирование и эволюция распространяющихся коротких трещин в среднем размера зерна или нескольких зерен на мезоуровне; слияние коротких трещин с образованием макроскопических трещин на макроуровне ансамблей зерен; в результате развития и слияния макротрещин формирование одной или нескольких макротрещин-лидеров и их развитие до полного хрупкого разрушения материала с образованием макроповерхностей разрыва сплошности по механизмам межзеренного или транскристаллитного скола. Каждый масштабно-структурный уровень является результатом процессов, протекающих на всех предыдущих уровнях. Смена уровней обуславливается сменой механизмов развития разрушения и происходит с разной степенью вероятности.

Процессы вязкого разрушения состоят из следующих последовательных стадий: возникновение пластической дисторсии при критической кривизне кристаллической решетки с генерацией дислокаций и образованием ячеистой субструктуры на наномасштабном уровне; эволюция дислокаций по механизмам двойникования и скольжения, что приводит к движению ансамблей зерен и появлению полос микросдвигов на микроуровне; интенсивные скольжения с образованием макрополос сдвигов и структурно-фазовый распад деформируемого материала с образованием ямочного микрорельефа и пористости на мезоуровне; зарождение в результате эволюции пор одной или нескольких вязких макротрещин в условиях развитого пластического деформирования и их развитие до полного вязкого разрушения.

Процесс разрушения пластичных материалов определяется стохастическими процессами хрупкого и вязкого разрушений. В областях многоциклового усталости ( $N_f \in (10^4, 10^6)$  циклов до макро разрушения), и особенно гигацикловой ( $N_f \in (10^6, 10^{11})$  циклов), стадия развития трещины-лидера незначительна и основную часть долговечности составляет время образования макротрещин. Особенностью области многоциклового усталости является то, что наибольшее значение главных пластических деформаций не превосходит соответствующих упругих деформаций и, как правило, пластическое деформирование тормозит развитие хрупких трещин. В области малоциклового усталости ( $N_f \leq 10^4$  циклов) пластичных материалов определяющим является развитие вязкого разрушения.

Отметим, что в связи с интенсивным развитием методов неразрушающего контроля (ультразвукового анализа, вихретокового контроля, натурной тензометрии, акустико-эмиссионного анализа, магнитной дефектоскопии и др.) появилась возможность оценивать состояния элементов конструкций по уровням эксплуатационной дефектности. В этом случае возникает задача оценки остаточной долговечности (ресурса).

Случайный процесс разрушения обуславливается либо случайностью параметров нагружения при детерминированных прочностных свойствах материала, либо случайностью прочностных свойств при детерминированном нагружении, либо случайностью тех и других одновременно.

Процесс нагружения или деформирования, который приводит к достижению предельных состояний соответствующего уровня дефектности, например к образованию распространяющихся хрупких трещин в среднем размера зерна или вязкой макротрещины некоторого размера, определяется как предельный процесс нагружения, а время, за которое материал переходит из некоторого начального состояния в предельное состояние, — как долговечность материала (или ресурс) по уровню дефектности.

**2. Теоретические подходы к моделированию процессов разрушения.** Анализ обширного теоретического материала по моделированию процессов разрушения конструкционных материалов при длительном и переменном нагружении в физике твердого тела, материаловедении и механике деформируемого твердого тела, методов построения математических моделей и используемого математического аппарата позволяет выделить два основных подхода: физический подход, на основе которого развиваются структурные и дислокационные теории, структурно-энергетические теории, дилатонно-фрустронные теории, и феноменологический подход, представленный классическими критериями разрушения, континуальными теориями поврежденности и механикой разрушения.

Актуальность современных моделей разрушения определяется междисциплинарным подходом между физикой твердого тела, материаловедением и механикой деформируемого твердого тела и заключается в построении феноменологических многостадийных и многоуровневых вероятностных моделей, учитывающих стохастические закономерности развития процесса разрушения на микро-, мезо- и макромасштабных уровнях.

Основное внимание уделяется критериям разрушения материалов, которые в настоящее время используются при прогнозировании долговечности инженерных систем и входят в нормативные документы отраслей промышленности, и критериям усталостного разрушения при сложном напряженно-деформированном состоянии.

Обзор моделей каждого из направлений обсуждается таким образом, чтобы дополнить существующие обзоры в трактовке автора настоящей работы. С целью краткости изложения не представляются конкретные выражения и критерии, в ряде случаев указывается ссылка на публикацию, в которой их можно посмотреть.

Изучением эволюции макротрещин при различных процессах длительного и переменного нагружения, определением связей между распространением трещин и структурой материала, разработкой деформационных, силовых и энергетических критериев разрушения занимается обширное научное направление — механика разрушения. основополагающими являются работы А. Гриффитса (A.A. Griffith), Д.С. Дагдейла (D.S. Dugdale), Дж. Ирвина (G.R. Irwin), П. Пэриса (P.C. Paris), В.В. Новожилова, Н.Ф. Морозова, Е.М. Морозова, Н.А. Махутова, В.В. Болотина, Дж.Р. Райса (J.R. Rice), К. Миллера (K. J. Miller), Г.П. Черепанова, Г. Либовиц (H. Liebowitz), Ю.Г. Матвиенко, Д. Броека (D. Broek), Е.О. Орована (E. Orowan), Дж. Плювинажа (G. Pluvinaje), К. Хеллана (K. Hellan), Р.В. Гольдштейна, Дж. Ф. Нотта (J.F. Knott), С. Таира (S. Taira), М. Танаки (M. Tanaki), А.Дж. МакЭвили (A.J. McEvily), М. Эндо (M. Endo), Дж. Ньюмана (J.C. Newman), Х. Дила (H.D. Dill), А. Конины (A. U. Koning), В.В. Панасюка, С.Я. Яремы, Дж.У. Хатчинсона (J.W. Hutchinson), Дж.Ф. Розенгрин (G.F. Rosengren), Дж.Д. Эшелби (J.D. Eshelby), С.В. Серенсена и др. Современное развитие механики разрушения связывается с построением физических моделей процессов развития трещин на основе структурного анализа. Аппарат механики разрушения применяется на нано-, микро- и мезоуровнях (Р.В. Гольдштейн, Н.Ф. Морозов). Подходы механики разрушения широко используются в инженерных приложениях, являются научной основой нормативных документов по расчету трещиностойкости (например, ГОСТ 25.506-85). Рассмотрение подходов и критериев механики разрушения требует отдельного изложения.

**2.1. Физические подходы и модели разрушения.** В физических подходах В.Е. Панина, Л.Р. Ботвиной, В.С. Ивановой, В.Ф. Терентьева, Д. Броека (D. Broek), С. Коцанды (S. Kocanda), У. Делингера (V.U. Dehlinger), Й. Мураками (Y. Murakami), Р. Томсона (R. Tomson), Т. Екобори (T. Ekobori) [1, 2, 5–10, 17–27] построение критериев разрушения основывается на изучении эволюции структуры материала и физических механизмов структурных взаимодействий; механизмов образования и развития фазово-структурных неоднородностей: дефектов, дислокаций, полос скольжения, кривизны кристаллической решетки; на установлении законов их взаимодействия с элементами структуры; физических механизмов развития микро-, мезо- и макротрещин и вязкого разрушения на различных масштабно-структурных уровнях; на масштабно-инвариантных характеристиках процесса разрушения и определении предельных состояний каждого уровня; связей между структурными и механическими характеристиками материалов на микро-, мезо- и макроскопических уровнях; эволюции поверхностных слоев и способах их упрочнения.

Развиваются следующие физические подходы:

дискретные и континуальные структурные теории хрупкого разрушения и дислокационные теории вязкого разрушения, в том числе модель Зенера–Стро–Петча (С. Zener, A.N. Stro, N. Petch) и ее развитие Э. Смитом (E. Smith), Дж. Барнби (J. Barnbi), Б.Л. Авербахом (B.L. Averbach), С. Луи (C. Lui); модели Коттрелла (A.H. Cottrell), Баллафа-Гилмана (R. Bullough, J.J. Gilman), Н.С. Аку-

лова, Мак-Лина (D. MacLean), Муграби (H. Mugrabi), А.М. Глезера, Мураками (Y. Murakami), Йокобори (T. Yokobori), Йошимуры (T. Yoshimura); теории Эшелби (J. D. Eshelby), Пардоена–Хатчинсона (T. Pardoen, J.W. Hutchinson), МакКлинтока (P.V.E. McClintock), Райса (J.R. Rice, D.M. Tracey), Кубина (L.P. Kubin), Онами (M. Onami) и др.;

дилатонно-фрустронные модели А.А. Кусова, В.А. Петрова, термофлуктуационная теория С.Н. Журкова;

структурно-энергетические теории В.Е. Панина, Л.Р. Ботвиной, В.С. Ивановой, В.И. Бетехтина, А.Г. Кадомцева, В.Ф. Терентьева, А.А. Шаньявского, К. Закржевского (K. Zakrzewski), А. Голаского (A. Golaski), Э. Вейнера (E. Wigner), С. Ли (C.H. Lee) и Т. Ито (T. Ito), Дж. Томаси (J. Tomasi), У. Делингера (V.U. Dehlinger) и др.;

стохастические энергетические модели, например модель Т. Екобори (T. Ekobori); стохастические структурные модели, например модели А.М. Фрейденталя (A.M. Freudenthal), С.Д. Волкова, Ф. Мореля (F. Morel), Гхонем–Прована (H. Ghonem, J. Provan), К. Собчика (K. Sobczyk) и др.

Структурные теории основываются на концепции структурных уровней разрушения твердых тел. Формулируются гипотезы о скоплении структурных неоднородностей у различных барьеров, кинетические уравнения их развития и критерии преодоления барьеров. В структурных теориях зарождение микротрещины определяется предельной плотностью дефектов (вакансий, бивакансий, дефектов по Шоттки и по Френкелю, электронно-дырочных дефектов), а ее развитие — результатом оседания вакансий на поверхности микротрещины под действием микронапряжений. В работах А.М. Глезера [17] моделируются процессы изменения внутренних полей напряжений, возникающих при дислокационном пластическом течении, в том числе при больших деформациях. Т. Йокобори (T. Ekobori) и Т. Йошимура (T. Yoshimura) [22] выписывают соотношения между микронапряжениями и плоскостями скольжения.

Энергетический анализ процесса разрушения базируется на принципах термодинамики, синергетики, теории фракталов и структурно-скейлинговых переходов. В основе структурно-энергетических теорий лежат гипотезы оценки энергии искажения кристаллической решетки, дефектов упаковки, разрыва межатомных связей. Например, В.И. Бетехтин, А.Г. Кадомцев с коллегами [28, 29] записывают полевые уравнения для плотности свободной энергии на основе термодинамического описания эволюции “несплошностей”. В работах Л.Р. Ботвиной [7, 8] построение критериев разрушения развивается с позиций теории подобия и теории фазовых переходов, отмечается универсальность в поведении ансамблей дефектов при различных физических процессах: усталости, ползучести, динамическом нагружении, кристаллизации и др. Полагается масштабная инвариантность кривых распределения дефектов на разных масштабных уровнях и вводится концентрационный параметр, зависящий от характерного линейного размера дефекта и средней плотности дефектов в представительном объеме, и его предельное значение определяет переход на следующий масштабный уровень. В.Е. Паниным с коллегами [10] создана и развивается физическая мезомеханика материалов. Твердое тело в полях внешних воздействий описывается как многоуровневая система, в которой процессы разрушения самосогласованно развиваются на нано-, микро-, мезо- и макромасштабном уровнях, поверхностные слои и внутренние границы раздела рассматриваются как функциональные подсистемы. Показывается основная роль наномасштабного структурного уровня, который определяет природу структурных превращений при образовании дефектов. Иерархическое самосогласование всех масштабов дефектов описывается на основе зависимости термодинамического потенциала Гиббса от молярного объема материала, возникновение микротрещины определяется достижением критического молярного объема при условии, что потенциал Гиббса приобретает положительное значение. С приближением термодинамического потенциала Гиббса к нулю в неравновесном материале возникают двухфазные наноструктурные состояния. Синергетический метод описывает деградацию твердого тела от сплошной среды к дискретной (фрактальной) среде. Разрушение рассматривается как последняя стадия эволюции внутренней структуры материала, когда единственным способом диссипации подводимой к материалу энергии является образование и развитие дефектности и пористости разных масштабов после исчерпания возможностей по подстройке элементов структуры друг к другу.

К стохастическим энергетическим моделям усталостного разрушения можно отнести подход Т. Екобори [22], согласно которому вероятность появления и слияния микротрещин описывается энергией активации. В модели А.М. Фрейденталя вероятность микроразрушения определяется функциями распределения межатомных связей и их пределов прочности. Ф. Морелем (F. Morel) предлагается соотношение для функции распределения Вейбулла вероятности образования микротрещины (в среднем размера зерна), по концепции С.Д. Волкова, функция распределения Гаусса

вероятности разрушения характеризуется инвариантами тензора микронапряжений, Х. Гхонем и Дж. Прован определяют зарождение микротрещины на основе гауссовой функции распределения дефектов, а ее развитие — как эволюцию этого распределения на основе марковских случайных процессов. (Возможность применения этих распределений имеет опытное подтверждение.)

В целом физические теории описывают закономерности и механизмы развития хрупкого и вязкого разрушений. Однако для их использования требуется большой объем экспериментальных данных о развитии дефектов и дислокаций, о процессах диссипации и самоорганизации структуры материала, об изменениях фазовых состояний при деформировании и др. Большинство физических подходов содержит значительное число параметров структуры и физических механизмов разрушения, не определяемых в макроэкспериментах. Построение критериев разрушения в зависимости от процессов нагружения физическими теориями, как правило, не рассматривается. Это затрудняет их применение в инженерных приложениях и методах расчета долговечности. Одной из целей физических моделей является создание новых конструкционных и функциональных материалов со сложной иерархической организацией внутренней структуры и определенными заданными механическими свойствами.

### 3. Феноменологические подходы

**3.1. Классические критерии разрушения.** На основе обработки обширного экспериментального материала предлагается множество критериев разрушения конкретных групп конструкционных материалов при различных процессах и условиях нагружения. Кривая усталости (кривая А. Веллера (A. Wohler)) при симметричном осевом нагружении или сдвиге в областях много- или гигацикловой усталости описывается известным уравнением О.Х. Баскина (O.H. Basquin) в виде степенной зависимости предельной амплитуды напряжений от долговечности, а в малоцикловой — уравнением Коффина–Мэнсона (L.F. Coffin, S.S. Manson) в виде степенной зависимости предельной амплитуды пластической деформации от долговечности. При простых переменных нагружениях в качестве эквивалентного напряжения рассматриваются различные функции амплитуд и постоянных компонент процесса: при одноосном нагружении или сдвиге с асимметрией цикла — это хорошо известные эмпирические линейные соотношения Гудмана–Гербера (J. Goodman, W. Gerber) и Зодерберга (K.R. Soderberg), параболы Гербера и Марина (W. Gerber, J. Marin), зависимости П. Смита (Ph. Smith), Дж. Гафа (H.J. Gough), Р. Хейвуда (R. Haywood), И.А. Одингга и других авторов; при сложном напряженном состоянии — это критерии Гафа и Полларда (H.J. Gough, H.V. Polard), Нишихары–Кавамото (T. Nishihara, M. Kawamoto), А.А. Лебедева и И.Н. Шканова, МакДиармида (D.L. McDiarmid) и его развитие И. Сусмелем (I. Susmel) и Т.Матаке (T. Mataka), Труста–ЭльМагда (A. Troost, E. El-Magd), И.А. Биргера, Какуно–Кавады (H. Kakuno, Y. Kawada), Сидженда–Курафа–Лоренца (A. Sijander, P. Kurath, F. Lawrence), Карпинтери–Спаньоли (A. Carpinteri, A. Spagnoli).

Классический феноменологический подход полагает существование некоторой универсальной функции инвариантов тензора напряжений, деформаций или их комбинаций. В качестве такой функции при простом нагружении в областях многоцикловой усталости в работах В.П. Хая (V.P. Haigh), Дж. Геста (J.J. Guest), Р.В. Байли (R.W. Bailey), Ф.Б. Стулена и Х.Н. Самминга (F.B. Stulen, H.N. Summing), И. Кремпла (E. Kremple), В.А. Маньковского, В. Кросслэнда (V. Crossland), В. Финдли (W.N. Findley), Дж. Сайнса и Дж.Оги (G. Sines, G. Ohgi), В. Грабисика и Дж. Симбургера (V. Grubisic, J. Simburger), С. Милке и И. ЭльМагда (S. Mielke, E. El-Magd), Y. Kawada и др. рассматриваются различные функции от первого и второго инвариантов тензора напряжения (среднего напряжения и интенсивности напряжений, которые представляют нормальную и касательную компоненты напряжения на октаэдрической плоскости соответственно) или касательного напряжения и нормального напряжения на площадке максимального касательного напряжения. Критическая плоскость выбирается в зависимости от преобладающего механизма хрупкого или вязкого разрушения материала. Например, в экспериментах на пластичных материалах обнаруживается, что максимальное касательное напряжение вызывает возникновение макротрещины на площадке максимального касательного напряжения, в то время как нормальное напряжение на ней отвечает за ее раскрытие.

В областях малоцикловой усталости при простом нагружении рассматриваются различные функции первого и второго инвариантов тензора деформаций: деформационные критерии Миллера–Брауна (K.J. Miller, M.W. Brown), Гаруда (Y.S. Garud), К. Уолкера (K. Walker), С. Замрика (S.V. Zamrik), Ф. Кандила (F.A. Kandil), Контера–Йансена–Хоследжа (A.W. Konter, G.T. Janssen, W. Husslage), Хамады–Саканэ–Онами (N. Hamada, M. Sakane, M. Ohnami) Н.А. Махутова и др.

При сложном нагружении главные напряжения, максимальные касательные напряжения и интенсивность напряжений, а также направления главных осей являются функциями времени процес-

са. Предельный процесс становится зависящим от истории нагружения. Для сложных нагружений в области многоциклового усталости в литературе также предлагается ряд критериев, среди них можно выделить критерии Пападопулоса (I.V. Papadopoulos) и Нишихары–Кавамото (T. Nishihara, M. Kawamoto), в которых разрушение определяется функцией от максимальных значений интенсивности и среднего напряжения (Пападопулос) и главного (для хрупких материалов) и касательного (для пластичных материалов) напряжений (Нишихара–Кавамото); уравнение Данг Вана (K. Dang Van), в котором в качестве универсальной функции выбирается максимальное значение линейной комбинации касательного и среднего напряжения по ориентации наклонной грани координатного тетраэдра; критерии Зеннера–Рихтера и Дж. Папуги (H. Zenner, R. Richter, J. Papuga), где в качестве универсальной функции рассматривается интеграл по углам Эйлера от некоторой функции амплитуд и постоянных компонент нормального и касательного напряжений, и некоторые другие (например, А. Голтье (A. Galtier), Дж. Секуре (J. Seuret), Й. Лю (Y. Liu), С. Махадевана (S. Mahadevan), В. Кросслэнда (B. Crossland)).

В ряде работ предлагаются критерии, основанные на комбинациях инвариантов тензора напряжений и деформаций. Например, критерии Г.З. Либертини (G.Z. Libertini), Дж. Хаварда (D.G. Havard), Т. Лагоды (T. Lagoda), Э. Маха (E. Macha), А. Варвани-Фарахани (A. Varvani-Farahani) и др. Д. Соси (D. Socie) с коллегами разрушение определяют некоторой функцией от наибольшего размаха деформации сдвига (разности между максимальным и минимальным значениями деформации сдвига), деформации нормального волокна и нормального напряжения на площадке ее действия, С. Суман и А. Калмейер (S. Suman, A. Kallmeyer) — как функцию от наибольшей амплитуды деформации сдвига, касательного напряжения на площадке ее действия и наибольшего значения второго инварианта тензора напряжений. В уравнении Смита–Ватсона–Топпера (R.N. Smith, P. Watson, T.H. Topper) в качестве эквивалентной характеристики рассматривается произведение наибольшего размаха главной деформации и размаха нормального напряжения на площадке ее действия.

Все критерии разрушения экспериментально проверялись для различных конструкционных материалов. Определялась система экспериментов для нахождения материальных констант, проводилась верификация для различных траекторий деформирования.

Классические энергетические подходы, которым почти сто лет (ведут начало с работ Н.П. Инглиса (N.P. Inglis)), рассматривают в качестве эквивалентной энергетической характеристики процесса разрушения неупругую энергию деформирования, равную работе пластической деформации (энергии гистерезиса), С.С. Мэнсон (S.S. Manson), Ф. Элын (F. Elyin), Ю.С. Гаруд (Y.S. Garud), Г.Р. Хэлфорд (G.R. Halford), К. Голос (K. Golos) — удельную (к единице объема) работу пластической деформации за цикл, К.Э. Фелтнер (C.E. Feltner), Дж. Д. Морроу (J.D. Morrow), Д.Э. Мартин (D.E. Martin) — суммарную работу пластического деформирования (суммарную площадь петель гистерезиса), В.Т. Троценко с коллегами [30] — суммарную удельную работу деформаций за вычетом работы деформации при нагружении с амплитудой, равной пределу выносливости (или наименьшей амплитуде на базе рассматриваемого числа циклов), П. Лугас и Дж. Полак (P. Lugas, J. Polac) — приращение внутренней энергии пластического деформирования за цикл. В публикациях В.В. Федорова рассматривается работа пластического деформирования с учетом энергии, переходящей в теплоту; в работах А.И. Чудновского, И.И. Гольденבלата, В.Л. Бажанова и В.А. Копнова выдвинута гипотеза критического значения плотности энтропии, характерного для данного материала. В настоящее время развиваются подходы Дж. Лематра (J. Lemaitre), С. Полизотто (C. Polizzotto), В.И. Левитаса, в которых процесс разрушения предлагается описывать в рамках термодинамических законов необратимых процессов с рассмотрением удельной свободной энергии Гельмгольца, удельной свободной энтальпии Гиббса, а также функционала диссипативного потенциала Боноры (N. Bonora). К недостаткам этих подходов в том числе относятся сложности в определении необходимых для расчета материальных функций.

Одной из наиболее общих феноменологических теорий является теория предельных процессов сложного нагружения Б.И. Завойчинского [31]. В этой теории в качестве предельного рассматривается такой процесс нагружения (или деформирования), при котором достигаются максимальные значения некоторого оператора на векторе напряжения по времени и по ориентации наклонной грани координатного тетраэдра. Основные известные критерии прочности являются частными случаями этого подхода.

Как было отмечено во введении, характер изменения эксплуатационных нагрузок и существенная неоднородность механических характеристик материалов ведут к необходимости построения вероятностных моделей при переменном нагружении. К ним также относятся: модель Н.Н. Афанасьева, в которой записывается определяющее соотношение для функции распределения вероятности

наличия микротрещин в некотором количестве лежащих рядом зерен представительного макрообъема от компонент тензора напряжений; модель А.Р. Ржаницына, по которой долговечность определяется из условия равенства средних значений и дисперсий распределения нагрузок и прочностных свойств; обобщение теории предельных процессов нагружения; подходы, основанные на применении метода Монте-Карло и цепей Маркова.

В завершение описания классических феноменологических подходов необходимо еще раз отметить, что в настоящее время большинство нормативных расчетных оценок ресурсных характеристик инженерных систем основывается на классических феноменологических подходах в силу их простоты и экспериментального подтверждения для соответствующих групп материалов и процессов нагружения.

Большинство феноменологических теорий не рассматривает эволюцию процесса разрушения, не учитывает физические механизмы и стадийность процесса усталостного разрушения. При этом, согласно экспериментальным данным, различным уровням развития усталостного разрушения соответствуют определенные состояния структуры материала и свои физические механизмы.

**3.2. Континуальные теории поврежденности.** Многие современные феноменологические подходы к описанию разрушения при длительном и переменном нагружении используют представления механики поврежденности [32–47]. Разрушение определяется как термодинамически независимый процесс, для которого вводятся тензоры поврежденности нулевого, первого или второго ранга. Поврежденность как скалярная величина, равная нулю для неповрежденного материала и достигающая единицы при разрушении для программных (блочных) одноосных нагружений, определяется известными линейными гипотезами Пальмгрена–Майнера (A. Palmgren, M. Miner) суммирования относительных чисел циклов и Бэйли–Робинсона (J. Baily, E. Robinson) суммирования относительных времен (под относительными величинами понимается отношение числа циклов или времени действия напряжения некоторого уровня к соответствующей долговечности при этом напряжении), суммарными накоплениями относительных уровней напряжений или деформаций (ASME, Code Case N-47). С.В. Серенсен и В.П. Когаев поврежденность определяют как сумму относительных чисел циклов и относительной пластической деформации, Н.А. Махутов [4, 32] — как сумму относительного числа циклов и относительной полной деформации.

По результатам многочисленных экспериментов при различных режимах нагружения металлов и сплавов обнаруживается, что суммарное накопление поврежденности лежит в интервале от 0.1 до 10, описывается случайной функцией с логарифмически нормальным распределением вероятности ее значений и средним значением, примерно равным единице.

Для ряда материалов установлена нелинейность накопления поврежденности при чередовании блоков нагружения с различными амплитудами. И.А. Биргером, И.А. Одингом, В.В. Бурдукским, Ф. Ричартом (F. Righart), Н. Ньюэном (N. Newman), С. Марко (S. Marco), В. Старки (W. Starkey) предлагаются различные нелинейные зависимости поврежденности от числа циклов и времени. В работах Х. Кортена (H. Corten), Т. Долана (T.J. Dolan), Дж. Морроу (J. D. Morrow) поврежденность определяется суммой произведений относительного числа циклов на степенную функцию соответствующего уровня напряжений, а в работах В.Т. Трощенко, Ю.И. Ковалева с коллегами — на относительную неупругую деформацию. С. Мэнсоном (C. Manson) предлагается рассматривать двухуровневый процесс накопления поврежденности: гипотезу Пальмгрена–Майнера на уровне зарождения микродефектов и сумму степенных функций от относительного числа циклов при их развитии.

Для сложных напряженно-деформированных состояний Л.Я. Либерман, А. Джонсон (A. Jonson) и Дж. Хендерсон (J. Henderson) предлагают линейное суммирование относительных амплитуд интенсивности деформаций, Дж. Фримэн (J. Friman) и Х. Вумэс (H. Voormess) — сумму произведений относительных времен действия на соответствующие этим временам относительные амплитуды интенсивности деформаций. А.А. Мовчан [33] в качестве поврежденности рассматривал интеграл по длине дуги траектории пластической деформации от некоторой функции интенсивности пластической деформации, В.В. Москвитин [34] — сумму некоторых операторов по числу циклов и времени действия с нелинейными разностными ядрами, зависящими от кривых длительной и усталостной прочности. В работах И.Э. Келлера [35] строится эволюционная модель разрушения, формулируются уравнения для поверхности выносливости и накопления повреждений с учетом истории нагружения.

Одним из основоположников энергетического подхода механики поврежденности является В.В. Новожилов. По В.В. Новожилову, при неупругом деформировании одновременно протекают два процесса: процесс “разрыхления” материала, который определяется длиной пути деформирования, и процесс возникновения упругих микронапряжений при активном процессе нагружения и

их релаксации при разгрузке. В феноменологических теориях пластичности тензор упругих микронапряжений является координатами центра поверхности текучести в пространстве напряжений и определяет анизотропное упрочнение, проявлением которого служит эффект Баушингера. Согласно гипотезе Новожилова–Рыбакиной, скорость накопления поврежденности пропорциональна интенсивности упругих микрповреждений.

К развитию подхода В.В. Новожилова можно отнести критерий А.Н. Романова [36], в котором параметрами поврежденности являются ширина петли гистерезиса, упругая деформация и дополнительно накопленная неупругая деформация (при жестком нагружении) в полувелике растяжения на стадии образования макротрещины, а также величина раскрытия трещины и односторонне накопленное раскрытие в полувелике растяжения на стадии ее развития.

Л.М. Качанов [37] и Ю.Н. Работнов [38] вводят монотонно возрастающую функцию поврежденности материала, которая принимает нулевое значение для неповрежденного материала и равна единице при разрушении и для которой записываются различные эволюционные уравнения зависимости скорости ее изменения от процесса нагружения (деформирования) и времени (Л.М. Качанов, Ю.Н. Работнов, В.В. Болотин, С. Батиаз (С. Bathias) [16], Дж. Леметр, Дж. Шабош (J. Lemaitre, J.I. Chaboche) [39] и др.) Согласно В.П. Тамужу [40], поврежденность в точке тела характеризуется некоторой функцией на единичной сфере и рассматривается ее наибольшее значение по времени и направлению. Скорость изменения этой функции полагается зависящей от нормального и касательного напряжений, трех инвариантов тензора напряжений, времени и самой поврежденности. В.С. Бондарем [41] эволюционное уравнение для функции поврежденности строится на энергетических принципах и нелинейном суммировании повреждений.

Л.М. Качанов [37] рассматривает вектор поврежденности и эволюционное уравнение для скорости изменения нормальной составляющей этого вектора на наклонной плоскости координатного тетраэдра, зависящей от нормального напряжения на этой плоскости и времени. С.А. Шестериков [42] вводит двумерный вектор поврежденности.

А.А. Ильюшиным [43] постулируется существование тензора повреждений как оператора на процессе нагружения. Разрушение определяется достижением некоторой мерой этого тензора заданного значения. Формулируется теория длительной прочности при сложном нагружении. Отметим, что применение этой теории, в частности использование разностного ядра оператора, затруднительно при переменном нагружении, для которого больше подходит оператор Гильберта–Шмидта с симметрическим ядром.

В современных моделях функции поврежденности и в более общем виде тензоры поврежденности вводятся в структуру определяющих соотношений. Например, предлагаются модели, в которых в определяющие соотношения вязкопластичности и в выражение для свободной энергии вводится скалярный параметр поврежденности фасетки зерна [44]. Выписывается кинетическое уравнение, связывающее приращение этого параметра с приращением сдвига в системе скольжения. Развиваются модели, в которых в определяющие соотношения для микронапряжений вводят параметры плотности дислокаций, полос скольжения; параметры, отражающие процессы зарождения и развития трещин, эволюцию пор. Для скорости их изменения формулируются эволюционные уравнения. Согласно гипотезе спектрального суммирования повреждений В.Л. Райхера, накопление поврежденности рассматривается с позиций самоорганизованных переходов через точки бифуркации, после каждого перехода меняется закон эволюции поврежденности. Также развиваются когезионная модель усталостной поврежденности [45] и модель кавитационного повреждения по границам зерен при ползучести [45].

К такому направлению математических моделей поврежденности относится континуальная механика поврежденной среды, разработанная Ю.Г. Коротких и развитая его коллегами [44, 46], включающая определяющие соотношения упругопластического деформирования и кинетическое уравнение для функций поврежденности, которое основывается на энергетическом подходе: в области многоциклового усталости в качестве параметра рассматривается энергия, расходуемая на образование макротрещин и равная работе девиатора напряжений на девиаторе деформаций (за вычетом энергии, которая идет на образование микродефектов), в области малоциклового усталости — энергия неупругого деформирования, равная работе микронапряжений на поле пластической деформации (за вычетом энергии неупругого деформирования, идущей на образование микродефектов). Механика поврежденной среды в области многоциклового усталости, по-видимому, описывает накопление мезо- и макродефектов (так как энергия образования микродефектов вычитается). При этом в области много- и особенно гигацикловой усталости основную часть долговечности составляет развитие процесса на микроуровне (до 80% общей долговечности). Процесс разрушения является иерархическим стадийным процессом последовательного накопления и слияния дефектов на микро-, мезо- и



макроуровне по разным физическим механизмам и с разной вероятностью и не является процессом накопления поврежденности, которую авторы определяют как относительную объемную долю дефектов. Остается неясным, о каких дефектах идет речь при формулировке кинетического уравнения. В области малоциклового усталости этот подход описывает эволюцию пор на мезоуровне в пластичных материалах (так как энергия развития дислокаций на микроуровне вычитается).

К развиваемым стохастическим моделям поврежденности относится синергетическая дискретно-вероятностная модель накопления повреждений А.И. Радченко. К. Собчик описывает процесс разрушения как диффузионный марковский процесс при стохастическом нагружении. Также известно интегральное уравнение МакКартни–Галя для определения распределения долговечности образца при представлении случайного процесса развития трещин как марковского процесса с привлечением гипотезы линейного накопления повреждений. В модели Дж. Богдановфа (J.L. Bogdanoff) и Ф. Козина (F. Kozin) [47] критерий накопления поврежденности строится на основе цепей Маркова.

Область применимости рассмотренных теорий поврежденности в целом ограничивается материалами и режимами нагружения, близкими к режимам, по которым определяются материальные функции и параметры этих теорий. Это обстоятельство значительно сужает возможности использования этих теорий при оценке долговечности конструкций. Разрушение является разномасштабным случайным процессом последовательного прохождения отдельных структурных уровней. Достижение предельных состояний определяется статистикой распределения неоднородностей во всем объеме тела, а не накоплением поврежденности. В большинстве моделей поврежденности не рассматривается развитие процесса разрушения на разных масштабных уровнях. Возникает вопрос о суммировании повреждений на разных масштабных уровнях с разными механизмами накопления, которое в большинстве моделей производится формально. К недостаткам многих моделей относится также отсутствие соответствия между значениями функции поврежденности и состоянием структуры материала. С феноменологической точки зрения для разных уровней следует вводить разные тензоры поврежденности, эволюционные уравнения должны рассматриваться на каждом уровне, однако это требует нахождения значительного числа базовых функций и констант, что представляется сложной задачей. Кроме того, необходимо строить критерий перехода от одного уровня на другой. Это делает в настоящее время практически невозможным использование таких теорий поврежденности в инженерных приложениях. Отметим, что многие современные теории поврежденности содержат значительное число неизвестных материальных функций, параметров структуры и физических механизмов разрушения, идентифицировать которые в экспериментах достаточно трудно. Данное обстоятельство значительно сужает возможности применения этих теорий при оценке прочности конструкций. Еще одним из существенных недостатков некоторых теорий поврежденности является то, что соотношения моделей рассматриваются для разных масштабных уровней, а материальные функции и константы определяются, как правило, по полному разрушению.

**4. Многоуровневые модели разрушения.** Процесс разрушения при переменном нагружении является иерархическим случайным процессом развития хрупкого и вязкого разрушений по различным физическим механизмам на разных масштабных уровнях. Анализ закономерностей развития процесса приводит к необходимости его описания в рамках многоуровневых моделей междисциплинарного подхода физики твердого тела, материаловедения и механики деформируемого твердого тела. Разные методы исследований: на нано- и микромасштабном уровне — методы молекулярной динамики и Монте-Карло с использованием потенциалов межатомного взаимодействия, рассчитываемых в рамках квантовой механики, на мезоуровне — методы динамики дислокаций и дефектов и на макроуровне — методы теории упруговязкопластических процессов деформирования и феноменологических подходов к описанию разрушения, затрудняют моделирование процессов разрушения в широком спектре масштабов.

В ряде моделей [44] в качестве параметра выбирается плотность микропор. Их образование определяется максимальными значениями интенсивностей напряжений, а рост — положительными значениями первого инварианта тензора напряжений. Формулируется эволюционное уравнение для скорости изменения этой плотности. Разрушением является достижение характерного предельного значения плотности. Для перехода на макроуровень применяются гипотезы В. Фойгта (W. Voigt), А. Рейсса (A. Reuss) или модель А. Кренера (A.J. Krenner). В континуальных моделях GTN (A.L. Gurson, V. Tvergaard, A. Needleman) вводится функция пористости, зависящая от текущих размеров пор и параметра, отражающего зарождение пор, ее скорость изменения полагается функцией процесса нагружения. Критерием вязкого разрушения (начала коалесценции пор) является достижение этой функцией предельного значения. Формулируется математическая модель для единичного мезообъема с порой, на поверхности которого задаются граничные условия в соответствии с процессом нагружения тела и определяющие соотношения вязкоупругопластического де-

формирования. Находится тензор мезонапряжений. Дается метод определения тензора напряжений на макроуровне по тензору мезонапряжений. В работах П.В. Трусова с коллегами [48] предлагается стохастическая многоуровневая модель для описания неупругого деформирования моно- и поликристаллических металлов и сплавов. На ее основе строится модель “многоуровневого разрушения” при переменном сложном нагружении. Параметрами модели являются плотности и модули скорости движения дислокаций на микроуровне и скорости сдвигов по площадкам скольжения на мезоуровне. Формулируются эволюционные уравнения для этих параметров. В работах О.Б. Наймарка с коллегами в определяющие соотношения вводится макроскопический тензор плотности дефектов. Формулируются соотношения для свободной энергии среды с дефектами на разных масштабных уровнях с учетом собственной энергии дефектов. В качестве параметра структурного скейлинга рассматривается отношение характерного расстояния между дефектами к характерному размеру дефектов соответствующего уровня. Достижение этим параметром предельного значения определяет переход на следующий масштабный уровень. Для него формулируется эволюционное уравнение. Отметим, что моделью не выделяются процессы развития хрупкого и вязкого разрушений, по-видимому, параметр структурного скейлинга вводится для описания хрупких дефектов типа микро- и мезо- и макротрещин. В работах Н.Г. Бурого [49] рассматривается “мультирежимная” кинетическая модель развития повреждаемости.

В основе предлагаемого автором подхода [50] лежит многоуровневое рассмотрение процесса хрупкого усталостного разрушения по стохастической модели усталостного масштабно-структурного разрушения, которая устанавливает существование зависимости между вероятностью достижения предельных уровней дефектности и процессом нагружения в виде иерархической системы рекуррентных определяющих соотношений для представительных масштабно-структурных уровней разрушения. При сложном нагружении эта вероятность определяется линейными операторами, собственные значения которых являются случайными функциями прочностных свойств материала. Предложен метод идентификации этих функций по данным стандартных испытаний на усталостную прочность с учетом результатов физических исследований по развитию хрупких трещин. Разрабатываются вычислительный алгоритм и численная реализация модели. Получены кривые много- и гигацикловой усталости по уровням дефектности при различных видах одноосного нагружения с несимметричными циклами, двухчастотных нагружений, при простых процессах нагружения и при осевом симметричном нагружении с постоянной компонентой кручения для различных сталей, титановых, алюминиевых и никелевых сплавов.

Отметим, что одной из проблем использования многоуровневых моделей в расчетах является значительное число неизвестных материальных функций и констант, для определения которых необходимо применять наряду с механическими экспериментальными методами физические методы исследований. Трудности заключаются также в получении достоверных статистических данных. Но, по мнению автора, развитие многоуровневых вероятностных моделей разрушения и их численной реализации в инженерных приложениях, особенно для сложного нагружения, представляется наиболее перспективным направлением.

**Заключение.** В работе систематизированы известные физические и феноменологические подходы и критерии разрушения конструкционных материалов при длительных и переменных нагружениях и предложена их классификация. Подробно рассмотрены классические феноменологические критерии разрушения, так как они используются в большинстве расчетов долговечности конструкций в силу простоты и экспериментального подтверждения для соответствующих групп материалов и процессов нагружения. Основными современными направлениями феноменологического подхода являются теории поврежденности, в частности модели континуальной механики поврежденной среды. Наиболее перспективным направлением, по мнению автора, является развитие многоуровневых вероятностных моделей разрушения и их применение при оценке долговечности инженерных систем.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Разрушение / Под ред. Г. Либовица. М.: Мир, 1973. Т. 1; 1975. Т. 2; 1976. Т. 3; 1977. Т. 4.
2. Атомный механизм разрушения // Мат-лы Междунар. конф. по вопросам разрушения, состоявшейся 12 апреля 1959 г. в Свомпскотте (США). М.: ГНТИ литературы по черной и цветной металлургии, 1963.
3. *Коллинз Дж.* Повреждение материалов в конструкциях: анализ, предсказание, предотвращение. М.: Мир, 1984.
4. *Махутов Н.А.* Малоцикловая усталость // Машиностроение: энциклопедия: В 40 т. Т. II-I: Физико-механические свойства. Испытания металлических материалов. М.: Машиностроение, 2010. 217–285.

5. *Иванова В.С.* Разрушение металлов. М.: Металлургия, 1979.
6. *Иванова В.С., Терентьев В.Ф.* Природа усталости металлов. М.: Металлургия, 1975.
7. *Ботвина Л.Р.* Разрушение. Кинетика, механизмы, общие закономерности. М.: Наука, 2008.
8. *Клевцов Г.В., Ботвина Л.Р., Клевцова Н.А., Лимарь Л.В.* Фрактодиагностика разрушения металлических материалов и конструкций. М.: МИСиС, 2007.
9. *Иванова В.С., Шанявский А.А.* Количественная фрактография. Усталостное разрушение. Челябинск: Металлургия, 1988.
10. *Панин В.Е., Гриняев Ю.В., Данилов В.И.* и др. Структурные уровни пластической деформации и разрушения. Новосибирск: Наука, 1990.
11. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под ред. В.В. Панасюка. Киев: Наукова думка, 1988. Т. 1.; 1988. Т. 2.; 1988. Т. 3.; 1990. Т.4.
12. *Терентьев В.Ф., Кораблева С.А.* Усталость металлов. М.: Наука, 2015.
13. *Писаренко Г.С., Стрижало В.А.* Экспериментальные методы в механике деформируемого твердого тела. Киев: Наукова думка, 1986.
14. *Вильдеман В.Э.* Экспериментальные исследования свойств материалов при сложных термомеханических воздействиях: коллективная монография // Под ред. В. Э. Вильдемана. М.: Физматлит, 2012.
15. *Троценко В.Т., Сосновский Л.А.* Сопrotивление усталости металлов и сплавов (справочник). Киев: Наукова думка, 1988. Т. 1, 2.
16. *Bathias C., Pineau A.* Fatigue of Materials and Structures: Application to Design and Damage. Great Britain: ISTE Ltd., 2011.
17. *Глезер А.М., Козлов Э.В., Конева Н.А., Попова Н.А., Курзина И.А.* Основы пластической деформации наноструктурных материалов. М.: Физматлит, 2016.
18. *Murakami Y.* Metal fatigue: effects of small defects and nonmetallic inclusions. Oxford: Elsevier, 2019.
19. *Пловинаж Г.* Механика упруго-пластического разрушения. М.: Мир, 1993.
20. *Завойчинская Э.Б.* Общие закономерности и критерии разрушения твердых тел на разных масштабных структурных уровнях при длительном нагружении (обобщающая статья) // Завод. лаб. Диагностика материалов. ТЕСТ-ЭЛ (М.). 2022. **88**, № 7. 48–62 (DOI: 10.26896/1028-6861-2022-88-7-48-62).
21. *Cottrell A.H.* Dislocations and Plastic Flows in Crystals. Oxford: Clarendon Press, 1953.
22. *Екобори Т.* Научные основы прочности и разрушения материалов. Киев: Наукова думка, 1978.
23. *Иванова В.С., Закирничная М.М., Кузеев И.Р.* Синергетика и фракталы. Универсальность механического поведения материалов // Учеб. пособие. Ч.1, Уфа, 1998.
24. *Коцаньда С.* Усталостное растрескивание металлов / Пер. с польск. Под ред. С. Я. Яремы. М.: Металлургия, 1990.
25. *Делингер У.* Теоретическое металловедение. М.: Металлургиздат, 1960.
26. *Томсон Р.* Физика разрушения // Атомистика разрушения. М.: Мир, 1987.
27. *Шанявский А.А.* Моделирование усталостных разрушений металлов. Синергетика в авиации. Уфа: Изд-во научно-техн. лит-ры “Монография”, 2007.
28. *Черемской П.Г., Слезов В.В., Бетехтин В.И.* Поры в твердом теле. М.: Энергоатомиздат, 1990.
29. *Бетехтин В.И., Кадомцев А.Г.* Эволюция микроскопических трещин и пор в нагруженных твердых телах // Физ. твердого тела. 2005. **47**, вып. 5. 801–807.
30. *Троценко В.Т.* Деформирование и разрушение металлов при многоцикловом нагружении. Киев: Наукова думка, 1981.
31. *Завойчинский Б.И.* Долговечность магистральных и технологических трубопроводов (теория, методы расчета, проектирование). М.: Недра, 1992.
32. Проблемы прочности, техногенной безопасности и конструкционного материаловедения / Под ред. Н.А. Махутова, Ю.Г. Матвиенко, А.Н. Романова. М.: Ленанд, 2018.
33. *Мовчан А.А.* О влиянии истории деформирования на скорость накопления повреждений при немонотонном упруго-пластическом нагружении // Прикл. механ. и техн. физ. 1984. №5. 125–131.
34. *Москвитин В.В.* Циклические нагружения элементов конструкций. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.
35. *Петухов Д.С., Келлер И.Э.* Эволюционная модель усталостного разрушения при нерегулярном нагружении // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2022. № 2. 72–81.
36. *Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И.* Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1998.
37. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974.
38. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
39. *Lemaitre J., Chaboche J.L.* Mechanics of solid materials. Cambridge Univ. Press, 1994.
40. *Ромалис Н.Б., Тамуж В.П.* Разрушение структурно-неоднородных тел. Рига: Зинатне, 1989.

41. Бондарь В.С., Горячева И.Г., Мативенко Ю.Г. и др. Ресурс материалов и конструкций: монография / Под науч. ред. В.С. Бондаря. М.: Московский Политех, 2019.
42. Закономерности ползучести и длительной прочности. Справочник / Под общей ред. С.А. Шестерикова. М.: Машиностроение, 1983.
43. Ильюшин А.А. Об одной теории длительной прочности // Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. 1967. № 3. 21–35.
44. Волегов П.С., Грибов Д.С., Трусов П.В. Поврежденность и разрушение: классические континуальные теории // Физ. мезомех. 2015. 18, №4. 68–86.
45. Локощенко А.М., Фомин Л.В., Терауд В.В., Басалов В.В., Агабабян В.С. Ползучесть и длительная прочность металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях (обзор) / Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. 24, № 2. 275–318 (DOI: 10.14498/vsgtu1765).
46. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнение состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. М.: Физматлит, 2008.
47. Богданович Дж., Козин Ф. Вероятностные модели накопления повреждений. М.: Мир, 1989.
48. Трусов П.В., Швейкин А.И. Многоуровневые модели моно- и поликристаллических материалов: теория, алгоритмы, примеры применения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019.
49. Бураго Н.Г., Никитин И.С., Никитин А.Д., Стратула Б.А. Численное моделирование усталостного разрушения на основе нелокальной теории циклической повреждаемости // Матем. моделирование. 2024. 36, №3. 3–19.
50. Zavoichinskaya E.V. A Stochastic Theory of Scale-Structure Fatigue and Structure at Operational Loading // Understanding complex systems. Springer Complexity, 2021. 71–89.

Поступила в редакцию  
19.06.2024

УДК 539.3

## ЧАСТНЫЙ ПОСТУЛАТ А. А. ИЛЬЮШИНА И НЕЛИНЕЙНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

А. А. Маркин<sup>1</sup>, М. Ю. Соколова<sup>2</sup>, Д. В. Христич<sup>3</sup>

Выполнен обзор работ, посвященных теоретическому исследованию и экспериментальной проверке одной из основополагающих гипотез теории процессов А. А. Ильюшина — частного постулата изотропии, а также возможности его обобщения на начально-анизотропные материалы. Предложена формулировка такого обобщения с использованием понятия инвариантных подпространств группы симметрии анизотропного материала. В качестве примера в рамках данного обобщения построены нелинейные определяющие соотношения для упругого ортотропного материала.

*Ключевые слова:* теория процессов А. А. Ильюшина, частный постулат изотропии, анизотропные материалы, группы симметрии, нелинейные определяющие соотношения.

A review of the works devoted to the theoretical study and experimental verification of one of the fundamental hypotheses of the theory of processes by A. A. Ilyushin — a particular postulate of isotropy as well as the possibility of its generalization to initially anisotropic materials is fulfilled. A formulation of such a generalization is proposed using the concept

<sup>1</sup>Маркин Алексей Александрович — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. вычислительной механики и математики ТулГУ, e-mail: markin-nikram@yandex.ru.

Markin Alexey Alexandrovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Tula State University, Chair of Computational Mechanics and Mathematics.

<sup>2</sup>Соколова Марина Юрьевна — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. вычислительной механики и математики ТулГУ, e-mail: m.u.sokolova@gmail.com.

Sokolova Marina Yurievna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Tula State University, Chair of Computational Mechanics and Mathematics.

<sup>3</sup>Христич Дмитрий Викторович — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. вычислительной механики и математики ТулГУ, e-mail: dmitrykhrstich@rambler.ru.

Khristich Dmitrii Viktorovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Tula State University, Chair of Computational Mechanics and Mathematics.