УДК 514+515.1

НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ КАФЕДРЫ ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ МГУ

В. М. Мануйлов[1], А. С. Мищенко[2]

В статье описаны основные научные достижения, полученные на кафедре высшей геометрии и топологии МГУ.

Ключевые слова: геометрия, топология.

The paper deescribes main research results obtained by the Chair of Higher Geometry and Topology of MSU.

Key words: geometry, topology.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-66-1-9

Кафедра высшей геометрии и топологии под нынешним названием существует с 1943 г. Первым заведующим был П. С. Александров, с 1982 по 2024 г. кафедрой руководил С. П. Новиков, с сентября 2024 г. кафедрой руководит И. А. Тайманов.

В конце 1982 г. группа сотрудников кафедры (А. В. Архангельский, Б. А. Пасынков, В. Н. Пономарев, В. В. Федорчук и др.) отделилась, образовав кафедру общей топологии и геометрии. В период с 1983 по 1992 г. к кафедре была присоединена кафедра дифференциальной геометрии и приложений (до 1993 г. — кафедра дифференциальной геометрии).

Основные направления исследований кафедры: алгебраическая топология, топология многообразий, общая топология, дифференциальная геометрия, геометрические методы математической физики, интегрируемые системы, некоммутативная геометрия. В этой статье мы опишем основные научные достижения сотрудников кафедры.

Важнейшим достижением М. М. Постникова было решение задачи описания гомотопического типа клеточных пространств [1]. Оказалось, что для этого кроме гомотопических групп необходимо счетное семейство инвариантов, названное постниковскими инвариантами. С точностью до гомотопического типа клеточные пространства ралагаются в башню расслоений, слоями которых являются пространства Эйленберга–Маклейна, а постниковские инварианты суть характеристические классы этих расслоений, т.е. показывают, как именно примыкают друг к другу этажи этой башни. Башня Постникова является одной из основополагающих конструкций теории гомотопий, которая имеет многочисленные применения. Так, например, минимальная модель Сулливана клеточного пространства есть не что иное, как алгебраизация башни Постникова $\mathbb{Q}$-локализации этого пространства.

В самом начале своей научной карьеры С.П. Новиковым были получены основополагающие результаты в теории бордизмов (или “внутренних гомологий” в терминологии Понтрягина–Рохлина), а именно с помощью алгебраического аппарата недавно появившейся спектральной последовательности Адамса и развитой Сергеем Петровичем теории алгебр Хопфа были установлены важнейшие результаты о кольцах основных теорий бордизмов, в том числе полностью вычислено кольцо комплексных бордизмов [2].

Вскоре после этого Сергеем Петровичем были решены актуальные задачи по теории слоений, получены фундаментальные классификационные результаты о гладких структурах на многообразиях [3], доказана знаменитая теорема о топологической инвариантности рациональных классов Понтрягина [4]. Уже в 1967 г. вышла фундаментальная статья Новикова [5], где был выдвинут новый подход к задачам алгебраической топологии на основе теории бордизмов и было построено глубокое обобщение спектральной последовательности Адамса, которое немедленно стало важнейшим

[1]*Мануйлов Владимир Маркович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. высшей геометрии и топологии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: manuilov@mech.math.msu.su.

Manuilov Vladimir Markovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Higher Geometry and Topology.

[2]*Мищенко Александр Сергеевич* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. высшей геометрии и топологии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: asmish@mech.math.msu.su.

Mishchenko Alexandr Sergeevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Higher Geometry and Topology.

инструментом алгебраической топологии и получило название спектральной последовательности Адамса–Новикова. В этой работе также была введена формальная группа геометрических кобордизмов — ряд А. С. Мищенко, задающий логарифм этой группы, и показана ее роль в приложениях теории комплексных кобордизмов. Были решены задачи о действиях групп на многообразиях, открыта глубокая связь между теорией формальных групп и стабильной теорией гомотопий, что привело к возникновению нового раздела алгебраической топологии — хроматической теории гомотопий. В 1970 г. С. П. Новиков за работы по классам Понтрягина и по теории кобордизмов был удостоен медали Филдса.

В. М. Бухштабером получен ряд результатов в теории кобордизмов и их приложениях, в том числе вычислены порядки дифференциалов спектральной последовательности Атья–Хирцебруха в K-теории и комплексных кобордизмах; развита теория характера Чженя–Дольда в кобордизмах; доказано, что ряд $ch_U(u)$, его задающий, является экспонентой формальной группы геометрических кобордизмов, и введена спектральная последовательность Бухштабера (см. [6]). Недавно им совместно с А. П. Веселовым было дано явное построение представителей коэффициентов $ch_U(u)$ в терминах тета-дивизоров. С. П. Новиковым и В. М. Бухштабером были введены в рассмотрение многозначные формальные группы. В работах В. М. Бухштабера развита алгебраическая теория двузначных формальных групп, получен ряд ее приложений в теории кобордизмов [7]. В цикле последующих работ В. М. Бухштабера с учениками и соавторами были открыты фундаментальные связи алгебраической теории многозначных групп со многими разделами математики. Эти исследования привели его к результатам в классической теории функциональных уравнений и ее приложениях.

В. М. Бухштабером и А. С. Мищенко вычислены K-группы комплексов Эйленберга–Маклейна и найдены необходимые и достаточные условия существования элементов бесконечной фильтрации в комплексной K-теории в терминах характера Черна [8].

Как было доказано С. П. Новиковым и В. Браудером, в случае односвязных многообразий классическая сигнатура многообразия является гомотопическим инвариантом, причем единственным среди рациональных характеристическим классом. Для неодносвязных многообразий проблема более глубокая, и гипотеза Новикова заключается в том, что высшие сигнатуры $\operatorname{sign}_x(M) = \langle L(M)f^*(x), [M]\rangle$ являются гомотопическими инвариантами M.

В [9] А. С. Мищенко установил, что единственными кандидатами на гомотопически инвариантные характеристические классы являются только высшие сигнатуры. Более того, им был найден универсальный гомотопический инвариант со значениями в группе Уолла фундаментальной группы с рациональными коэффициентами — так называемая симметрическая сигнатура многообразия M, которая является неодносвязным аналогом классической сигнатуры. В [10] А. С. Мищенко применил метод теории фредгольмовых представлений, позволивший ему установить гипотезу Новикова для широкого класса фундаментальных групп. В частности, к таким группам относятся фундаментальные группы многообразий с метрикой неположительной секционной кривизной, например поверхности рода g и их декартовы произведения. Этот результат позволил существенно упростить доказательство С. П. Новикова топологической инвариантности рациональных классов Понтрягина.

Наряду с алгебраической топологией на кафедре велись исследования и по общей топологии: теории пространств близости, эквивариантной топологии, теории размерности, теории шейпов и др. Ю. М. Смирновым была разработана теория компактификаций топологических пространств, включая эквивариантную, которая позволяет строить компактификации с нужными свойствами. Он и независимо Дж. Нагата доказали знаменитую метризационную теорему Нагаты–Смирнова, дающую необходимые и достаточные условия для существования метрики, задающей исходную топологию [11]. Ю. М. Смирнов определил большую трансфинитную размерность Ind и исследовал ее свойства для метрических компактов.

Методы применения теории гомологий и когомологий к различным задачам общей топологии описаны в работах Е. Г. Скляренко. В частности, построены и исследованы когомологии с носителями в общих семействах носителей. Такие когомологии кроме абстрактных примеров, обобщающих когомологии с компактными носителями, имеют, пожалуй, единственный конкретный пример в математике, представляющий нетривиальные семейства носителей, — когомологии Хохшильда групповой алгебры $\mathbb{R}[G]$, которые изоморфны классическим когомологиям классифицирующего пространства BGr группоида Gr, ассоциированного с присоединенным действием группы G.

А. С. Мищенко показал, что когомологии Хохшильда групповой алгебры $\mathbb{R}[G]$ изоморфны классическим когомологиям BGr, носители которых принадлежат специфическим семействам носителей Φ_n в смысле Е. Г. Скляренко в n-мерных остовах $(BGr)^{[n]}$ классифицирующего пространства BGr группоида Gr, порожденного присоединенным действием группы G.

В работах Е. Г. Скляренко представлены такие конструкции гомологической алгебры, которые отражают общекатегорный характер соотношений гомологической природы в топологии, например показана категорная природа двойственности Пуанкаре, дано описание когомологий многообразия в терминах гладких полей поливекторов.

А. В. Чернавскому принадлежит ряд фундаментальных результатов о топологии многообразий. Он показал, что если многообразие компактно или является внутренностью компактного многообразия с краем, то любой гомеоморфизм такого многообразия в себя обладает стягиваемой окрестностью в группе всех гомеоморфизмов многообразия, снабженной компактно-открытой топологией. На сегодняшний день это лучший результат о локальном устройстве пространства гомеоморфизмов многообразия. Например, неизвестно, является ли это пространство абсолютным окрестностным ретрактом.

Теория квазилинейных однородных систем первого порядка восходит к работам Римана по гидродинамике. Уравнения гидродинамического типа естественно возникают при построении квазиклассических решений нелинейных уравнений по Уизему. С. П. Новиков и Б. А. Дубровин исследовали вопрос, когда эти уравнения гамильтоновы. Для пространственно-одномерных систем был развит формализм, основанный на римановой геометрии [12].

Уравнение Кирхгофа записывается как гамильтонова система на алгебре Ли движений пространства $\mathbb{R}^3$. Получающаяся динамика сводится к движению заряженной частицы по поверхности в магнитном поле (монополь Дирака), причем магнитное поле — добавка к скобкам Пуассона, а действие уже не функция, а замкнутая 1-форма на пространстве петель. Для замкнутых 1-форм был развит аналог теории Морса. В частности, обобщенные неравенства Морса можно использовать для оценки снизу числа периодических решений динамических систем (С. П. Новиков, И. А. Тайманов, П. Г. Гриневич). Если форма действия целочислена, то при квантовании по Фейнману экспонента действия однозначна.

Алгебраичность спектральной кривой n-мерного оператора Шредингера — слишком сильное ограничение при $n > 1$. Правильный аналог конечнозонности для $n = 2$ найден Б. А. Дубровиным, И. М. Кричевером и С. П. Новиковым — алгебраичность Ферми-кривой фиксированного уровня энергии. Редукции, выделяющие операторы с нулевым магнитным полем, и иерархия уравнений Веселова–Новикова, порождающая симметрии данной задачи, были найдены в [13]. При этом динамика редуцируется с якобиана на примиан.

И. А. Тайманов (во время обучения в аспирантуре) нашел топологические препятствия к интегрируемости геодезических потоков на многомерных многообразиях [14] (в частности, если такой поток на замкнутом многообразии имеет полный набор вещественно-аналитических первых интегралов, то фундаментальная группа многообразия должна содержать коммутативную подгруппу конечного индекса) и рассмотрел аналог проблемы Римана–Шоттки для многообразий Прима, доказав, что существование тэта-функциональных решений уравнения Новикова–Веселова выделяет в пространстве модулей главнополяризованных абелевых многообразий подмногообразие, в котором многообразие Прима двулистных накрытий с двумя точками ветвления образует неприводимую компоненту [15].

В настоящее время активно развивается теория аномальных волн, известных также как волны-убийцы. Кроме поверхности океана они наблюдаются в ряде других нелинейных систем, включая оптические. При использовании конечнозонного подхода возникает трудность, связанная с тем, что не все абелевы многообразия являются якобианами кривых, а решения нелинейных уравнений порождают лишь последние. Используя тот факт, что в задаче о генерации аномальных волн спектральные кривые близки к рациональным, П. Г. Гриневич и П. М. Сантини построили эффективные асимптотические формулы для соответствующих конечнозонных решений [16]. В этом приближении нужные якобианы явно описываются.

В 1990-х гг. И. А. Дынников, развивая идеи А. В. Зорича, доказал, что в случае общего положения незамкнутые траектории имеют регулярное (интегрируемое) поведение, а также обнаружил случаи хаотического поведения траекторий [17]. Примеры, возникшие при исследовании этой задачи, открытые И. А. Дынниковым совместно с Р. де Лео, как выяснилось, связаны с классическими динамическими системами. Методы, развитые в работах И. А. Дынникова, оказали влияние на современные исследования перекладываний отрезков с нулевым инвариантом Са–Арну–Фати.

И. А. Дынников и С. П. Новиков в начале 2000-х гг. предложили новый дискретный аналог голоморфных функций в виде вещественных функций на правильной треугольной решетке в более общем случае — на триангулированной поверхности. Установлены аналоги принципа максимума и формулы Коши, определены аналоги многочленов. П. Г. Гриневич указал на существование ограниченного ядра Коши и получил аналог теоремы Лиувилля для функций полиномиального роста.

И. А. Дынников определил комплексную структуру на большом подпространстве в пространстве дискретно-голоморфных функций на решетке, а также доказал, что на плоскости Лобачевского пространство ограниченных дискретно-голоморфных функций бесконечномерно.

В начале 2000-х гг. И. А. Дынников показал, что распознавание тривиального узла возможно с помощью монотонного упрощения [18]. Узлы представляются прямоугольными диаграммами, а за сложность принимается число ребер. Обычная плоская диаграмма может быть преобразована в прямоугольную за линейное время. На основе этого подхода И. А. Дынников и М. В. Прасолов в 2013 г. доказали гипотезу Джонса о топологической инвариантности алгебраического числа перекрестков при условии минимизации числа окружностей Зейферта. В недавних работах И. А. Дынниковым, М. В. Прасоловым и В. А. Шастиным была полностью решена задача алгоритмического сравнения для лежандровых и трансверсальных зацеплений.

В. М. Бухштабером и Т. Е. Пановым были заложены основы торической топологии, в центре внимания которой находятся момент-угол-комплексы. В последующие годы это направление исследований сформировалось как актуальный раздел топологии, связывающий теорию многообразий, гомотопическую топологию, гомологическую алгебру, геометрическую и перечислительную комбинаторику (см. [19]).

В работах В. М. Бухштабера, Т. Е. Панова и Н. Рея получена общая формула локализации в кобордизмах для многообразий с действием тора (см. [19]), обобщающая предыдущие результаты С. П. Новикова, В. М. Бухштабера, С. М. Гусейн-Заде, И. М. Кричевера. Эта формула привела к ряду результатов о жесткости родов Хирцебруха.

Также в работах В. М. Бухштабера, Т. Е. Панова и Н. Рея была введена новая операция связной суммы квазиторических многообразий и доказано, что в каждом классе комплексных бордизмов стабильно комплексного многообразия размерности больше двух содержится квазиторическое многообразие (см. [19]).

В работах Т. Е. Панова получены многочисленные результаты из торической топологии, касающиеся также когомологий и dg-моделей момент-угол-комплексов и квазиторических многообразий, гомотопической теории момент-угол-комплексов (см. [19]). Кроме того, изучены геометрические структуры на момент-угол-многообразиях, в том числе комплексные и симплектические структуры, что привело к плодотворным связям торической топологии с симплектической, лагранжевой, гиперболической и некэлеровой комплексной геометрией [20].

В. М. Бухштабером и Н. Ю. Ероховцом построена теория семейств трехмерных многогранников, описывающая комбинаторику семейств, а также геометрию и алгебраическую топологию соответствующих момент-угол- и квазиторических многообразий [21]. В результате получила развитие комбинаторно-геометрическая теория фуллеренов, доказано, что любой фуллерен можно получить конструкцией, использующей только 5 операций роста, и при этом в процессе конструкции появляются только фуллерены либо 7-диск-фуллерены.

В. М. Бухштабером, Н. Ю. Ероховцом и Т. Е. Пановым совместно с М. Масудой и С. Пак построены когомологически жесткие семейства трехмерных и шестимерных многообразий над ограниченными трехмерными прямоугольными гиперболическими многогранниками [22], а затем Н. Ю. Ероховцом — над идеальными трехмерными прямоугольными гиперболическими многогранниками. Таким образом построены широкие классы гладких многообразий, которые полностью характеризуются структурой их колец когомологий.

Н. Ю. Ероховцом описана каноническая геометризация по Тёрстону трехмерных многообразий, являющихся пространствами орбит подгрупп, действующих свободно на вещественных момент-угол-многообразиях. Получена классификация трехмерных и четырехмерных гиперэллиптических многообразий, являющихся пространствами орбит несвободных действий коммутирующих инволюций на вещественных момент-угол-многообразиях, описаны геометрии, реализуемые на четырехмерных многообразиях в этой конструкции, построена теория числа Бухштабера простых многогранников и симплициальных комплексов — максимальной размерности торической подгруппы, действующей свободно на момент-угол-комплексе.

В работах Г. С. Черных были получены результаты о c_1-сферических бордизмах (описаны умножения, коэффициенты формальных групп [23], доказана точность по Ландвеберу) и жесткости родов Хирцебруха на SU-многообразиях.

В [24] А. С. Мищенко совместно с А. Т. Фоменко нашли естественные алгебро-геометрические условия, при которых наличие конечномерной некоммутативной алгебры Ли первых интегралов автоматически влечет полную интегрируемость гамильтоновой динамической системы в классическом смысле.

Совместно с А. А. Арутюновым А. С. Мищенко развил метод С. П. Новикова редукции псевдодифференциальных операторов на некомпактных многообразиях и способ вычисления дериваций групповых алгебр, а также когомологий Хохшильда этих алгебр, применив развитую Е. Г. Скляренко теорию когомологий с носителями в произвольных семействах.

Также А. С. Мищенко установил геометрические препятствия в виде когомологий лагранжева многообразия для построения асимптотик решений уравнений методом комплексного канонического оператора Маслова.

Ряд широко известных результатов в области рациональной теории гомотопий принадлежит И. К. Бабенко. Так, им получены явные и эфективные формулы, вычисляющие ранги гомотопических групп пространства через нули и полюсы ряда Пуанкаре его пространства петель в случае, когда этот ряд является рациональной функцией. Эти формулы позволяют, например, вычислять ранги гомотопических групп комплексных полных пересечений в $\mathbb{C}P^n$ через степени уравнений, задающих это многообразие.

В глобальной и асимптотической геометрии И. К. Бабенко доказал интерсистолическую мягкость всех конечных полиэдров. Он также показал, что систолический объем замкнутого многообразия зависит лишь от образа фундаментального класса этого многообразия в целочисленных гомологиях комплекса Эйленберга–Маклейна его фундаментальной группы. Совместно со своим учеником Ф. Балашевым он доказал сильное обобщение классического результата Хедлунда 30-х гг. прошлого века, утверждающего, что стабильная норма на одномерных гомологиях 3-мерного тора может быть полиэдром (октаэдром).

Совместно с С. А. Богатым им был получен ряд неожиданных результатов об алгебраической и топологической структуре группы, у которой кольцо коэффициентов — целые числа. Было установлено, что эта группа не вкладывается ни в какую локально компактную группу, но при этом является аменабельной.

Важные результаты по проблеме явного комбинаторного вычисления рациональных классов Понтрягина триангулированного многообразия получены в работах А. М. Габриэлова, И. М. Гельфанда, М. В. Лосика (1975), Н. Левитта, К. Рурка (1978), Дж. Чигера (1983), И. М. Гельфанда, Р. Д. Макферсона (1992). В 2004 г. А. А. Гайфуллин решил эту проблему для первого класса Понтрягина. Его формула задает класс гомологий, двойственный $p_1^{\mathbb{Q}}$, в виде симплициального цикла $\sum_{\operatorname{codim}\sigma=4} f(\operatorname{link}\sigma)\sigma$, где f — явно вычисляемая функция ориентированной трехмерной симплициальной сферы.

Изгибаемый многогранник — замкнутая многогранная поверхность с жесткими гранями и шарнирами в ребрах, допускающая нетривиальную деформацию. Первые примеры изгибаемых многогранников в $\mathbb{R}^3$ были построены в случае самопересекающихся Р. Брикаром (1898), а в случае вложенных (несамопересекающихся) — Р. Коннелли (1977). А. А. Гайфуллин в 2013 г. построил первые примеры самопересекающихся изгибаемых многогранников в пространствах размерности 5 и выше.

Теорема И. Х. Сабитова (1996) (гипотеза кузнечных мехов) гласит, что объем любого изгибаемого многогранника в $\mathbb{R}^3$ постоянен в процессе изгибания. А. А. Гайфуллин получил аналоги теоремы Сабитова: в евклидовых пространствах размерностей > 4, в пространствах Лобачевского нечетных размерностей > 3, для изгибаемых многогранников достаточно малого диаметра в пространствах постоянной кривизны размерностей > 3 — и совместно с Л. С. Игнащенко доказал сильную гипотезу кузнечных мехов: всякий изгибаемый многогранник в $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^4$ остается равносоставленным себе в процессе изгибания.

Как известно, симметрические степени двумерных многообразий являются гладкими многообразиями. Также известно, что для поверхностей $M^2_{g,k}$ рода g с k проколами многообразия $\operatorname{Sym}^n(M^2_{g,k})$ и $\operatorname{Sym}^n(M^2_{g',k'})$ гомотопически эквивалентны, если и только если $2g+k=2g'+k'$. Гипотеза 2003 г. сербских математиков П. Благоевича, В. Груича и Р. Живалевича предполагает, что $\operatorname{Sym}^n(M^2_{g,k})$ и $\operatorname{Sym}^n(M^2_{g',k'})$ гомеоморфны, если только $g=g'$. Они доказали ее для $n \leqslant 2\max\{g,g'\}$, но в общем случае доказательство было получено недавно Д. В. Гугниным в [25]. Различить негомеоморфные многообразия удалось с помощью вычисления класса Штифеля–Уитни w_2 (являющегося топологическим инвариантом по теореме Тома 1952 г.) для $\operatorname{Sym}^n(M^2_{g,k})$ на основе классической теоремы Макдональда о строении кольца когомологий $H^*(\operatorname{Sym}^n(M^2_g);\mathbb{Z})$ и формулы для класса Черна c_1 многообразия $\operatorname{Sym}^n(M^2_g)$.

Основные исследования С. М. Гусейн-Заде концентрируются вокруг его (с соавторами) следующих трех центральных результатов. 1. Совпадение аналитических инвариантов ростков плоских кривых типа рядов Пуанкаре фильтраций, определенных соответствующими нормированиями, с топологическими инвариантами типа многочленов Александера соответствующих алгебраических зацеплений [26]. Эти соотношения, а также их обобщения (например, для многочлена Джонса) до сих пор не имеют концептуальных доказательств. Имеющиеся доказательства состоят в независимом вычислении обеих сторон равенств и сравнении полученных выражений. 2. Введение понятия степенной структуры над кольцом и построение геометрической степенной структуры над кольцом Гротендика комплексных квазипроективных множеств [27]. Степенная структура над кольцом R — это метод придать смысл выражению $(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots)^m$ с a_i и m из R (как степенного ряда из $1 + t \cdot R[[t]]$) так, чтобы имели место все стандартные свойства возведения в степень. Степенная структура над кольцом Гротендика комплексных квазипроективных множеств оказалась эффективным инструментом для описания и вычисления производящих рядов классов некоторых аналитических пространств (например, конфигурационных). 3. Нахождение симметрий типа зеркальных для инвариантов орбифолдных моделей Ландау–Гинзбурга, в частности построение двойственности неабелевых моделей Ландау–Гинзбурга и описание гипотетических рамок, в которых они имеют место [28].

О. И. Моховым получены следующие результаты [29–31]. Решена проблема описания плоских пучков метрик и интегрируемости описывающих их нелинейных уравнений, получена локальная классификация квазифробениусовых многообразий. Решена проблема нахождения всех коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов ранга 3 с эллиптической спектральной кривой. Найден эллиптический аналог уравнения Буссинеска, эта интегрируемая система типа Буссинеска обладает представлением Лакса со спектральным параметром на эллиптической кривой. Решена проблема о существовании коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, отвечающих спектральной кривой произвольного рода, для произвольного ранга и построены явные примеры, параметризуемые полиномами Чебышёва. Решена проблема классификации двумерных и многомерных скобок Пуассона гидродинамического типа. Открыт класс однородных симплектических структур на пространствах петель и построена теория комплексов однородных форм на пространствах петель и их когомологий. Создана теория согласованных метрик. Доказан общий принцип канонической гамильтоновости произвольной эволюционной системы на множестве стационарных точек ее интеграла. Построены теория подмногообразий с потенциалом нормалей и теория неплоских фробениусовых многообразий, открыта двойственность в классе подмногообразий с потенциалом нормалей. Открыта и разработана нелокальная гамильтонова теория, связанная с метриками постоянной кривизны (нелокальные скобки Мохова–Ферапонтова). Доказана эквивалентность уравнений ассоциативности двумерной топологической квантовой теории поля (уравнений ВДВВ) интегрируемым недиагонализуемым однородным системам гидродинамического типа, а также совместно с соавторами найдены их гамильтоновы и бигамильтоновы структуры, законы сохранения и построены интегрируемые по Лиувиллю конечномерные редукции уравнений ассоциативности. Установлено, что уравнения ассоциативности двумерной топологической квантовой теории поля являются естественными редукциями фундаментальных уравнений теории подмногообразий в псевдоевклидовых пространствах, а именно уравнений Гаусса, Петерсона–Майнарди–Кодацци и Риччи. Доказано, что любое фробениусово многообразие реализуется как плоское подмногообразие с плоской нормальной связностью в псевдоевклидовом пространстве. Развита теория метрик диагональной кривизны. Совместно с учениками развиты алгебро-геометрические методы построения ортогональных криволинейных систем координат, ортогональных сетей и полугамильтоновых систем гидродинамического типа.

Цепочки Тоды и их двумерные аналоги, с одной стороны, являются красивыми примерами интегрируемых систем, а с другой — естественным образом возникают в задачах теоретической физики, классической дифференциальной геометрии и топологии. С. В. Смирновым проводились исследования по дискретизации двумеризованных цепочек Тоды. Наиболее важными результатами в этом направлении можно назвать доказательство интегрируемости по Дарбу полудискретных и полностью дискретных аналогов экспоненциальных систем, соответствующих матрицам Картана алгебр Ли серий A, B, C [32], и доказательство того факта, что предложенная ранее Б. Н. Хабибуллиным дискретизация экспоненциальных систем сохраняет характеристические интегралы и дает интегрируемые по Дарбу системы для матриц Картана всех простых алгебр Ли [33].

Одним из самых ярких результатов в области дифференциальной геометрии было полное решение проблемы изопериметрических неравенств для собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами на сфере (М. А. Карпухин, Н. Надирашвили, А. В. Пенской, И. Полтерович [34]) — первое полное (т.е. сразу для всех собственных чисел) решение проблемы изопериметрических неравенств для собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами на каких-либо поверхностях.

Е. В. Троицким доказана эквивариантная теорема об индексе для C^*-эллиптических операторов, учитывающая элементы конечного порядка (уточнение и обобщение широко известной теоремы Мищенко–Фоменко), получены ее применения. В области теории гильбертовых C^*-модулей доказан аналог классической теоремы Кюйпера о стягиваемости, что позволило провести важные вычисления. Была найдена равномерная структура, характеризующая C^*-компактные операторы.

А. С. Мищенко показал, что в теории гильбертовых C^*-модулей и фредгольмовых операторов на них существуют два эквивалентных понятия фредгольмовости: во-первых, категорное как операторы, обратимые с точностью до C^*-компактных операторов, и, во-вторых, как операторы, допускающие нётерово расщепление, причем для выполнения указанного условия не требуется, чтобы операторы допускали существование сопряженного оператора.

Е. В. Троицким совместно с В. Нистором развита теория калибровочно-инвариантных семейств эллиптических операторов с применением к теории D-бран и крученой K-теории; доказана теорема об индексе для этих семейств [35]. Совместно с А. Л. Фельштыном и другими соавторами развита крученая теория Бернсайда–Фробениуса, ставящая задачей доказательство (при правильном выборе подходящего дуального пространства) следующей гипотезы: число классов Райдемайстера (классов скрученной сопряженности) автоморфизма ϕ дискретной группы G совпадает с числом неподвижных точек двойственного гомеоморфизма $\widehat{\phi} : \widehat{G} \to \widehat{G}$, где $\widehat{G}$ — дуальный объект. В частности, в [36] гипотеза доказана для почти полициклических групп, причем в качестве $\widehat{G}$ выступает множество классов эквивалентности конечномерных унитарных неприводимых представлений G. Получены важные примеры и контрпримеры к этой гипотезе. Установлено свойство R_∞ (любой автоморфизм имеет бесконечное число классов Райдемайстера) для важных классов групп, в том числе слабо ветвящихся насыщенных групп, действующих на деревьях, включая группы Григорчука и Гупта–Сидки.

Исследование гомотопических свойств асимптотических гомоморфизмов и расширений C^*-алгебр проводилось В. М. Мануйловым. В цикле совместных с К. Томсеном работ построена теория полуобратимых расширений C^*-алгебр; доказано, что гомоморфизм Конна–Хигсона задает изоморфизм между полуобратимыми расширениями и E-функтором Конна–Хигсона; построены примеры гомотопически необратимых расширений; показано, что E-функтор является частным случаем KK-бифунктора Каспарова. Им также установлено, что асимптотические гомоморфизмы в алгебру Калкина гомотопны настоящим гомоморфизмам [37]. Также В. М. Мануйлов показал, что классы эквивалентности метрик на дубле метрического пространства образуют инверсную полугруппу, и описал ряд алгебраических свойств этой полугруппы в геометрических терминах [38].

Основная область исследований Д. В. Миллионщикова — это инвариантная геометрия нильи солвмногообразий и связанные с этой темой задачи теории положительно градуированных алгебр Ли и ее приложений. Д. В. Миллионщиковым решены следующие задачи: построена классификация узких по Зельманову и Шалеву естественно градуированных алгебр Ли [39]; установлен критерий нетривиальности когомологий Морса–Новикова компактных солвмногообразий [40]; найдены критерии существования левоинвариантных симплектических и комплексных структур на нильмногообразиях, соответствующих узким положительно градуированным алгебрам Ли; доказана гипотеза Бухштабера о нетривиальных произведениях Масси в когомологиях алгебры Ли формальных векторных полей на прямой; получены структурные результаты для характеристических алгебр Ли нелинейных гиперболических систем уравнений в частных производных.

Д. В. Талалаеву принадлежат следующие результаты в области классических и квантовых интегрируемых систем, а также точнорешаемых моделей статистической физики: 1) конструкция квантовой системы Годена в случае sl(n), развитие техники квантового характеристического многочлена — основания так называемого квантового метода спектральной кривой [41]; 2) приложение теории уравнения тетраэдров Замолодчикова к задачам маломерной топологии, в том числе к задаче построение инвариантов 2-узлов [42]; 3) описание вершинного представления и кластерной структуры пространства электрических сетей.

А. М. Виноградов развил теорию, рассматривающую нелинейные дифференциальные уравнения как геометрические объекты [43], объединив бесконечно продолженные уравнения в категорию диффеотопов. Одно из центральных мест в этой теории занимает спектральная последовательность Виноградова. Он также ввел конструкцию новой скобки (кососимметричной и удовлетворяющей тождеству Якоби с точностью до кограницы) на градуированной алгебре линейных преобразований коцепного комплекса, предвосхитившей общее понятие производной скобки, которая играет важную роль в современных приложениях гомотопических алгебр Ли, алгеброидов Ли и т.п.

К сожалению, объем статьи не позволил описать важнейшие результаты, полученные Е. А. Морозовой, А. В. Зарелуа, Л. А. Аланией, Ф. Ф. Вороновым и другими за долгие годы плодотворной работы на кафедре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Постников М.М.* Исследования по гомотопической теории непрерывных отображений. I. Алгебраическая теория систем. II. Натуральная система и гомотопический тип // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1955. **46**. 3–158.
2. *Новиков С.П.* Гомотопические свойства комплексов Тома // Матем. сб. 1962. **57(99)**, № 4. 407–442.
3. *Новиков С.П.* Гомотопически эквивалентные гладкие многообразия. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. **28**, № 2. 365–474.
4. *Новиков С.П.* Топологическая инвариантность рациональных классов Понтрягина // Докл. АН СССР. 1965. **163**, № 3. 298–300.
5. *Новиков С.П.* Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. **31**, № 4. 855–951.
6. *Бухштабер В.М.* Комплексные кобордизмы и формальные группы // Успехи матем. наук. 2012. **67**, № 5(407). 111–174.
7. *Бухштабер В.М.* Характеристические классы в кобордизмах и топологические приложения теорий однозначных и двузначных формальных групп // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1978. Т. 10. 5–178.
8. *Бухштабер В.М., Мищенко А.С.* Элементы бесконечной фильтрации в K-теории // Докл. АН СССР. 1968. **178**, № 6. 1234–1237.
9. *Мищенко А.С.* Гомотопические инварианты неодносвязных многообразий. 1. Рациональные инварианты // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. **34**, № 3. 501–514.
10. *Мищенко А.С.* О фредгольмовых представлениях дискретных групп // Функц. анализ и его прил. 1975. **9**, № 2. 36–41.
11. *Смирнов Ю.М.* О метризации топологических пространств // Успехи матем. наук. 1951. **6**, № 6. 100–111.
12. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* О скобках Пуассона гидродинамического типа // Докл. АН СССР. 1984. **279**, № 2. 294–297.
13. *Веселов А.П., Новиков С.П.* Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Потенциальные операторы // Докл. АН СССР. 1984. **279**, № 4. 784–788.
14. *Тайманов И.А.* Топологические препятствия к интегрируемости геодезических потоков на неодносвязных многообразиях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. **51**, № 2. 429–435.
15. *Тайманов И.А.* Об аналоге гипотезы Новикова в проблеме Римана–Шоттки для многообразий Прима // Докл. АН СССР. 1987. **293**, № 5. 1065–1068.
16. *Гриневич П.Г., Сантини П.М.* Конечнозонный подход в периодической задаче Коши для аномальных волн в нелинейном уравнении Шрёдингера при наличии нескольких неустойчивых мод // Успехи матем. наук. 2019. **74**, № 2(446). 27–80.
17. *Dynnikov I.A.* Semiclassical motion of the electron. A proof of the Novikov conjecture in general position and counterexamples // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. Vol. 179. AMS, Providence, 1997. 45–73.
18. *Dynnikov I.A.* Arc-presentations of links: monotonic simplification // Fund. Math. 2006. **190**. 29–76.
19. *Buchstaber V.M., Panov T.E.* Toric topology // Math. Surveys Monogr. Vol. 204. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
20. *Панов Т.Е.* Геометрические структуры на момент-угол-многообразиях // Успехи матем. наук. 2013. **68**, № 3. 111–186.
21. *Бухштабер В.М., Ероховец Н.Ю.* Конструкции семейств трехмерных многогранников, характеристические фрагменты фуллеренов и многогранники Погорелова // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. **81**, № 5. 15–91.
22. *Бухштабер В.М., Ероховец Н.Ю., Масуда М., Панов Т.Е., Пак С.* Когомологическая жесткость многообразий, задаваемых трехмерными многогранниками // Успехи матем. наук. 2017. **72**, № 2(434). 3–66.
23. *Панов Т.Е., Черных Г.С.* SU-линейные операции в комплексных кобордизмах и теория c_1-сферических бордизмов // Изв. РАН. Сер. матем. 2023. **87**, № 4. 133–165.
24. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. **42**, № 2. 396–415.
25. *Гугнин Д.В.* Целочисленное кольцо когомологий симметрических степеней CW-комплексов и топология симметрических степеней римановых поверхностей // Тр. Матем. ин-та РАН. 2024. **326**. 148–172.
26. *Campillo A., Delgado F., Gusein-Zade S.M.* The Alexander polynomial of a plane curve singularity via the ring of functions on it // Duke Math. J. 2003. **117**, N 1. 125–156.

27. *Gusein-Zade S.M., Luengo I., Melle-Hernández A.* A power structure over the Grothendieck ring of varieties // Math. Res. Lett. 2004. **11**, N 1. 49–57.
28. *Ebeling W., Gusein-Zade S.M.* Mirror symmetry on levels of non-abelian Landau–Ginzburg orbifolds // J. Geom. Phys. 2022. **179**. N 104617.
29. *Мохов О.И.* Пучки согласованных метрик и интегрируемые системы // Успехи матем. наук. 2017. **72**, № 5(437). 113–164.
30. *Мохов О.И.* О группах когомологий комплексов однородных форм на пространствах петель гладких многообразий // Функц. анализ и его прил. 1998. **32**, № 3. 22–34.
31. *Мохов О.И.* Теория подмногообразий, уравнения ассоциативности двумерных топологических квантовых теорий поля и фробениусовы многообразия // Теор. матем. физ. 2007. **152**, № 2. 368–376.
32. *Смирнов С.В.* Интегрируемость по Дарбу дискретных двумеризованных цепочек Тоды // Теор. матем. физ. 2015. **182**, № 2. 231–255.
33. *Smirnov S.V.* Integral preserving discretization of 2D Toda lattices // J. Phys. A: Math. Theor. 2023. **56**. N 265204.
34. *Karpukhin M., Nadirashvili N., Penskoi A.V., Polterovich I.* An isoperimetric inequality for Laplace eigenvalues on the sphere // J. Diff. Geom. 2021. **118**. 313–333.
35. *Nistor V., Troitsky E.* An index for gauge-invariant operators and the Dixmier–Douady invariant // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. **356**, N 1. 185–218.
36. *Fel'shtyn A., Troitsky E.* Twisted Burnside–Frobenius theory for discrete groups // J. Reine und Angew. Math. 2007. **613**. 193–210.
37. *Manuilov V.* Asymptotic homomorphisms into the Calkin algebra // J. Reine und Angew. Math. 2003. **557**. 159–172.
38. *Manuilov V.* Metrics on doubles as an inverse semigroup // J. Geom. Anal. 2021. **31**. 5721–5739.
39. *Миллионщиков Д.В.* Естественно градуированные алгебры Ли медленного роста // Матем. сб. 2019. **210**, № 6. 111–160.
40. *Миллионщиков Д.В.* Когомологии разрешимых алгебр Ли и солвмногообразия // Матем. заметки. 2005. **77**, № 1. 67–79.
41. *Talalaev D.V.* Quantum spectral curve method // Travaux mathematiques. Vol 19. Université du Luxembourg, 2011. 203–271.
42. *Талалаев Д.В.* Уравнение тетраэдров: алгебра, топология и интегрируемость // Успехи матем. наук. 2023. **76**, № 4. 137–176.
43. *Виноградов А.М.* Геометрия нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. М.: ВИНИТИ, 1980. Т. 11. 89–134.

Поступила в редакцию
20.10.2024