

УДК 517, 511, 514, 372

## ОБ ИССЛЕДОВАНИЯХ КАФЕДРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**В. А. Садовничий<sup>1</sup>, Е. А. Бадерко<sup>2</sup>, Т. П. Лукашенко<sup>3</sup>, Н. А. Раутиан<sup>4</sup>,  
Т. В. Родионов<sup>5</sup>, И. Х. Сабитов<sup>6</sup>, В. Г. Чирский<sup>7</sup>, В. Б. Шерстюков<sup>8</sup>**

В статье дается обзор некоторых направлений исследований, ведущихся на кафедре математического анализа механико-математического факультета МГУ.

*Ключевые слова:* орторекурсивные разложения, целые функции, дифференциальные и интегродифференциальные операторы, метрическая геометрия, гипергеометрические ряды, методика преподавания элементарной математики.

The paper provides a survey of some areas of research carried out at the Chair of Mathematical Analysis of the Faculty of Mechanics and Mathematics.

*Key words:* orthorecursive expansions, entire functions, differential and integro-differential operators, metric geometry, hipergeometric series, methods of teaching elementary mathematics.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-66-1-8

Исследования, проводившиеся на кафедре математического анализа механико-математического факультета МГУ за ее более чем восьмидесятилетнюю историю, неоднократно освещались в обзорах (см., например, статьи [1, 2]). В настоящей работе мы остановимся на исследованиях последних лет по некоторым направлениям.

Основные результаты многолетних исследований школы академика В. А. Садовничего в области спектральной теории дифференциальных операторов и ее приложений в различных прикладных областях представлены в недавнем обзоре [3].

<sup>1</sup> Садовничий Виктор Антонович — академик РАН, доктор физ.-мат. наук, проф., ректор МГУ им. М. В. Ломоносова, зав. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: info@rector.msu.ru.

Sadovnichii Victor Antonovich — Academician of the Russian Academy of Science, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Rector of Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Head of the Chair of Mathematical Analysis.

<sup>2</sup> Бадерко Елена Александровна — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: baderko.ea@yandex.ru.

Baderko Elena Aleksandrovna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis.

<sup>3</sup> Лукашенко Тарас Павлович — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: lukashenko@mail.ru.

Lukashenko Taras Pavlovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis.

<sup>4</sup> Раутиан Надежда Александровна — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: nrautian@mail.ru.

Rautian Nadezhda Aleksandrovna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis.

<sup>5</sup> Родионов Тимофей Викторович — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: rodionovtv@mail.ru.

Rodionov Timofey Victorovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis.

<sup>6</sup> Сабитов Идждад Хакович — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: isabitov@mail.ru.

Sabitov Idjad Khakovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis.

<sup>7</sup> Чирский Владимир Григорьевич — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vgchirskii@yandex.ru.

Chirskii Vladimir Grigor'evich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis.

<sup>8</sup> Шерстюков Владимир Борисович — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: shervb73@gmail.com.

Sherstyukov Vladimir Borisovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis.

Исследования по орторекурсивным разложениям — обобщению ортогональных разложений, введенному Т. П. Лукашенко, — активно развиваются, как и исследования по тесно связанным с ними “жадным” алгоритмам и их приложениям. Приведем соответствующее определение.

Пусть в гильбертовом пространстве  $H$  со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  дана нормированная система функций  $\{e_n\}$ . Разложение элемента  $f$  из  $H$  осуществляется следующим образом.

(1) Положим  $r_0 = f$ . (2) Если построены коэффициенты разложения  $f^k$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , и остаток разложения  $r_{n-1}$ , то полагаем  $f^n = (r_{n-1}, e_n)$  и  $r_n = r_{n-1} - f^n e_n$ . Разложением  $f$  является ряд  $\sum f^n e_n$ . Если  $\{e_n\}$  — ортонормированная система, то получается ортогональное разложение. Орторекурсивное разложение обладает рядом свойств ортогональных разложений. Так, например, ряд сходится в  $H$  к разлагаемой функции  $f$  тогда и только тогда, когда выполняется равенство Парсеваля  $\|f\|^2 = \sum |f^n|^2$ .

С результатами по этой тематике можно ознакомиться в статье [4] и других статьях В. В. Галатенко, Т. П. Лукашенко и В. А. Садовниченко, вошедших в книгу [5].

На кафедре ведутся исследования в области действительного анализа. Тригонометрические ряды изучают А. Ю. Попов и сотрудничающие с ним члены кафедры (см., например, работы [6–8]). Ведутся также исследования системы Уолша и других мультипликативных систем [9, 10].

Исследуются также обобщенные интегралы, более общие, чем интеграл Лебега, и их приложения в различных задачах гармонического и действительного анализа (см., например, монографию [11] и статью [12]).

Другие вопросы теории меры и интеграла и некоторые связанные с ними вопросы дескриптивной теории функций рассматривались В. К. Захаровым и Т. В. Родионовым [13, 14]. В частности, получено описание радоновских интегралов на хаусдорфовых пространствах как некоторого класса линейных функционалов на пространстве равномерных функций, что является широким обобщением описания интегралов Римана–Стилтьеса как линейных ограниченных функционалов на пространстве непрерывных функций  $C[a, b]$ . С помощью этого описания доказан аналог теоремы Ю. В. Прохорова о слабой компактности семейств ограниченных радоновских мер [15].

Выделим научное направление, активно развиваемое на кафедре математического анализа в последнее время (А. Ю. Попов, В. Б. Шерстюков). Оно связано с теорией роста целых функций и ее приложениями к экстремальным проблемам, вопросам аппроксимации в комплексной области, задачам математической физики. Глобальная цель исследований — провести систематическое изучение асимптотического поведения целых функций из некоторых классов, выделяемых ограничениями на рост функций и на распределение их нулей на комплексной плоскости. Применение результатов нацелено как на “внутренние” вопросы теории целых функций, так и на актуальные неклассические задачи математической физики.

С середины прошлого века известно наименьшее значение типа целой функции конечного положительного порядка, последовательность нулей которой имеет фиксированные верхнюю и нижнюю плотности (теорема Валирона–Левина и ее уточнения). Эти классические результаты никак не учитывают геометрические особенности расположения нулей. В то же время в приложениях часто встречаются целые функции, нули которых лежат на заданном множестве (например, на одном луче или в некотором угле). Это привело к появлению нового направления в теории экстремальных задач для характеристик роста целых функций. Задачи этого направления оказались трудными. Так, для класса целых функций с нулями на одном луче результаты в духе теоремы Валирона–Левина доказываются другими методами, имеют гораздо более сложный вид и полностью решены только для порядков из  $(0, 1)$  [16, 17]. В случае порядка больше 1 точное значение экстремального типа не найдено, имеются лишь результаты предварительного характера [18]. Близкие вопросы о полноте экспоненциальных систем и множествах единственности в классах целых функций рассматриваются в недавней работе [19].

Для канонических произведений нулевого рода с нулями, расположенными на луче, поставлен в 2022 г. и активно изучается вопрос об оценке снизу минимума модуля таких функций на окружности через некоторую отрицательную степень максимума модуля на той же окружности, когда радиус окружности пробегает отрезки с постоянным отношением концов. Выявлены особенности зависимости оптимального показателя степени максимума модуля в требуемой оценке от отношения концов отрезка, на котором гарантируется выполнение оценки [20].

Научные исследования профессоров В. В. Власова и Н. А. Раутиан (см. работы [21–25]) посвящены изучению качественных и асимптотических свойств решений функционально-дифференциальных и интегродифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах методами функционального анализа, спектральной теории операторов и теории полугрупп операторов. Исследуемые уравнения имеют большое фундаментальное и прикладное значение и могут быть рассмотрены как операторные модели процессов, возникающих в многочисленных задачах механики, физики, биологии, медицины и т.д. Профессор В. В. Власов является основоположником нового подхода к исследованию функционально-дифференциальных и интегродифференциальных уравнений, связанного с применением спектральной теории операторов и оператор-функций. На основе этого подхода им проведено систематическое исследование функционально-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах. В. В. Власовым получены результаты об асимптотическом поведении и наилучшаемые оценки решений широкого класса функционально-дифференциальных уравнений с матричными коэффициентами нейтрального и запаздывающего типов.

В совместных работах В. В. Власова и Н. А. Раутиан новый подход, основанный на использовании спектральной теории операторов и оператор-функций, а также теории полугрупп операторов, применен к систематическому исследованию широкого класса вольтерровых интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах. Изучаемые интегродифференциальные уравнения являются операторными моделями задач, возникающих в теории вязкоупругости, теории распространения тепла в средах с памятью и кинетической теории газов (уравнение Гуртина–Пипкина), теории усреднений (закон Био) и др.

На кафедре активно развивается направление, связанное с изучением начально-краевых задач для дифференциальных уравнений и систем с частными производными параболического типа. Эти задачи моделируют, в частности, процессы тепло- и массопереноса в многокомпонентных и композиционных материалах. Сотрудниками кафедры получены серьезные новые результаты о существовании, единственности и характере гладкости регулярных решений задач в областях с негладкими “боковыми” границами. Характером негладкости таких границ моделируется, в частности, резкое изменение границ металлов в результате фазовых превращений. Особое внимание уделяется получению интегральных представлений решений, которые могут служить теоретической основой для численного исследования задач методами граничных интегральных уравнений. Преподаватели кафедры в сотрудничестве с ведущими специалистами Федерального исследовательского центра “Информатика и управление” РАН успешно участвуют в выполнении научно-исследовательского проекта “Граничные интегральные уравнения и краевые задачи математической физики” под руководством профессора кафедры Е. А. Бадерко в рамках Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

На кафедре математического анализа геометрией занимаются еще со времен предыдущего заведующего кафедрой Н. В. Ефимова. После его кончины группу возглавлял Л. Е. Евтушик. Начиная с 2000 г. в группу входили Л. Е. Евтушик, С. Н. Михалев, А. К. Рыбников, И. Х. Сабитов, К. В. Семенов, А. В. Словеснов. Члены группы принимали активное участие в организации и проведении многих мероприятий научно-учебного характера факультетского и общеуниверситетского уровня, в том числе Международной конференции “Метрическая геометрия поверхностей и многогранников” (Москва, 2010).

Приведем краткие сведения о научной деятельности данной группы с 2000 г.

Л. Е. Евтушик — заслуженный профессор Московского университета, лауреат премии Анассилаоса (2009, Италия). Опубликовал 9 научных работ. Работы посвящены инвариантному описанию различных дифференциально-геометрических структур анализа и геометрии сколь угодно высокого порядка. После его смерти ученики, друзья и коллеги опубликовали в 2014 г. книгу [26], в которую вошел и текст его докторской диссертации.

С. Н. Михалев защитил в 2003 г. кандидатскую диссертацию и опубликовал в последующие 20 лет 9 работ по метрической геометрии многогранников.

А. К. Рыбников опубликовал 16 работ в научных журналах. Основное направление исследований — различные преобразования (Бэклунда и др.) и их связь с дифференциальными уравнениями.

И. Х. Сабитов — заслуженный профессор Московского университета, лауреат Ломоносовской

премии 1-й степени за научные достижения (2015) и победитель Международного конкурса на искание медали и премии имени Лобачевского (2021). Опубликовал 1 монографию (2009, Великобритания), 17 работ в различных сборниках, 60 статей в научных журналах. Он является автором около 10 научно-популярных статей и брошюр, некоторые из них переведены на английский, японский и татарский языки. Был научным руководителем трех кандидатских диссертаций, научным консультантом докторской диссертации. Основная тема исследований — проблемы изгибаний поверхностей и многогранников.

На кафедре математического анализа ведутся также изыскания в области теории чисел. Профессор В. Г. Чирский проводит исследования значений рядов, расходящихся в поле  $X$ , но сходящихся в полях  $p$ -адических чисел  $\Theta_p$ . Ранее им был развит аналог метода Зигеля–Шидловского для  $F$ -рядов. Точнее говоря, метод Зигеля–Шидловского применялся к  $E$ - и  $G$ -функциям Зигеля, т.е. к рядам вида  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , коэффициенты  $a_n$  которых удовлетворяют некоторым условиям

и при этом являются алгебраическими числами.  $F$ -ряд имеет вид  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$ , условия на коэффициенты подобны условиям на коэффициенты  $E$ - и  $G$ -функций Зигеля. Конкретными примерами рядов, к которым применим метод Зигеля–Шидловского и его модификация для  $F$ -рядов, служат обобщенные гипергеометрические функции. В. Г. Чирским получен ряд результатов о свойствах обобщенных гипергеометрических рядов (см., например, [27, 28]).

Кабинет методики преподавания элементарной математики при кафедре математического анализа механико-математического факультета МГУ создан в 1987 г. в целях совершенствования методической работы в области элементарной математики и обеспечения комплекса мероприятий, связанных с подготовкой нового приема в Московский университет. С момента основания кабинетом руководит доктор педагогических наук, профессор И. И. Мельников.

Кабинет объединяет имеющих опыт работы со школьниками сотрудников факультета, научные интересы которых лежат в области преподавания элементарной математики. В настоящее время в кабинете ведутся исследования по следующим направлениям: содержание и методика преподавания школьных курсов алгебры, геометрии, теории вероятностей и статистики; содержание и методика преподавания факультативных разделов элементарной математики; содержание и методика составления заданий олимпиад школьников и иных интеллектуальных состязаний; формы организации учебной деятельности школьников по изучению математики; методика подготовки и повышения квалификации учителей математики; содержание педагогических курсов для студентов механико-математического факультета.

Ежегодно сотрудники кабинета читают специальные курсы (в том числе межфакультетские) и организуют работу спецсеминаров для студентов и аспирантов. С 2023 г. вновь начат прием в аспирантуру. Сотрудники кабинета преподают высшую математику студентам, поэтому в круг их научных интересов входит также содержание и методика преподавания курсов высшей математики студентам математических, естественно-научных и гуманитарных специальностей и направлений подготовки.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ефимов Н.В.* Математический анализ // Математика в Московском университете: Сб. научных трудов / Под ред. К.А. Рыбникова. М.: Изд-во Московского университета, 1992. 20–39.
2. *Садовничий В.А., Власов В.В., Гаврилов В.И., Зорич В.А., Лукашенко Т.П., Михалев А.А., Сабитов И.Х., Седлецкий А.М., Царьков И.Г., Чирский В.Г., Чубариков В.Н., Шавгулидзе Е.Т.* Кафедра математического анализа // Математика в Московском университете на пороге XXI века. Часть I / Под ред. О.Б. Лупанова, К.А. Рыбникова. М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2003. 15–46.
3. *Садовничий В.А.* Математика в созвездии наук // Междунар. конф. “Математика в созвездии наук”. К юбилею ректора МГУ академика Виктора Антоновича Садовнича: Тез. докл. М.: Изд-во Московского университета, 2024. 19–35.
4. *Галатенко В.В., Лукашенко Т.П., Садовничий В.А.* Орторекурсивные разложения и их свойства // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Темат. обз. 2019. **170**. 62–70.
5. *Садовничий В.А.* Избранные труды. Математика, механика и их приложения. Т. 6. М.: Изд-во Московского университета, 2019.

6. Попов А.Ю., Родионов Т.В. Равномерные по параметру  $a \in (0, 1)$  двусторонние оценки сумм синус- и косинус-рядов с коэффициентами вида  $1/k^a$  через первые слагаемые их асимптотик // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. **28**, № 4. 177–190.
7. Попов А.Ю., Солодов А.П. Оптимальные на отрезке  $[\pi/2, \pi]$  двусторонние оценки суммы синус-ряда с выпуклой последовательностью коэффициентов // Матем. заметки. 2022. **112**, № 2. 317–320.
8. Алферова Е.Д., Попов А.Ю. Экстремальная задача о положительности интегралов от синус-рядов с монотонными коэффициентами // Матем. заметки. 2024. **116**, № 2. 316–320.
9. Плотников М.Г.  $\lambda$ -Сходимость кратных рядов Уолша–Пэли и множества единственности // Матем. заметки. 2017. **102**, № 2. 292–301.
10. Plotnikov M.G. On the Vilenkin–Chrestenson systems and their rearrangements // J. Math. Anal. and Appl. 2020. **492**, N 1. 124391.
11. Лукашенко Т.П., Скворцов В.А., Солодов А.П. Обобщенные интегралы (3-е изд., испр. и доп.). М.: Ленанд, 2023.
12. Лукашенко Т.П., Скворцов В.А., Солодов А.П. Идеи Колмогорова по теории интеграла в современных исследованиях // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2024. № 1. 20–31.
13. Захаров В.К., Родионов Т.В. Классификация борелевских множеств и функций на произвольном пространстве // Матем. сб. 2008. **199**, № 6. 49–84.
14. Zakharov V.K., Rodionov T.V., Mikhalev A.V. Sets, Functions, Measures. Vol. II: Fundamentals of Functions and Measure Theory. Berlin: Walter de Gruyter, 2018.
15. Zakharov V.K., Rodionov T.V. Weak compactness problem for sets of bounded Radon measures on various topological spaces // Discontinuity, Nonlinearity and Complexity. 2020. **9**, N 4. 591–605.
16. Попов А.Ю. Развитие теоремы Валирона–Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней  $\rho$ -плотностью корней // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Фундаментальные направления. 2013. **49**. 132–164.
17. Шерстюков В.Б. Асимптотические свойства целых функций с заданным законом распределения корней // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Темат. обз. 2019. **161**. 104–129.
18. Попов А.Ю. О наименьшем типе целой функции порядка  $\rho$  с корнями заданной верхней  $\rho$ -плотности, лежащими на одном луче // Матем. заметки. 2009. **85**, № 2. 246–260.
19. Брайчев Г.Г., Хабибуллин Б.Н., Шерстюков В.Б. Задача Сильвестра, покрытия сдвигами и теоремы единственности для целых функций // Уфим. матем. журн. 2023. **15**, № 4. 30–41.
20. Попов А.Ю., Шерстюков В.Б. Оценка снизу в среднем минимума модуля на окружности для целой функции нулевого рода // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Фундаментальные направления. 2024. **70**. 150–162.
21. Власов В.В. О разрешимости и свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Матем. сб. 1996. **186**, № 8. 67–92.
22. Власов В.В., Иванов С.А. Точные оценки решений систем уравнений с последствием // Алгебра и анализ. 2008. **20**, № 2. 43–69.
23. Власов В.В., Медведев Д.А. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Фундаментальные направления. 2008. **30**. 3–173.
24. Власов В.В., Раутиан Н.А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М.: МАКС Пресс, 2016.
25. Раутиан Н.А. О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегродифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стильтьеса // Дифференц. уравнения. 2021. **57**, № 9. 1255–1272.
26. Евтушик Л.Е. Структуры высших порядков. Воспоминания о профессоре Леониде Евгеньевиче Евтушике друзей, коллег и учеников / Сост. Н. И. Гусева. М.: Интеллект-Центр, 2014.
27. Чирский В.Г. Арифметические свойства обобщенных гипергеометрических  $F$ -рядов // Докл. РАН. 2018. **483**, № 3. 257–259.
28. Чирский В.Г. Трансцендентность  $p$ -адических значений обобщенных гипергеометрических рядов с трансцендентными полиадическими параметрами // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2023. **510**. 29–32.

Поступила в редакцию  
09.10.2024