72. *Хиль Е.В.* Марковские зависимости в последовательности локальных максимумов и промежутков между ними // Теория вероятн. и ее примен. 2013. **58**, № 3. 472–485.

Поступила в редакцию
14.07.2024

УДК 517

НАУЧНАЯ РАБОТА НА КАФЕДРЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Б. С. Кашин[1], **В. К. Белошапка**[2], **В. И. Богачев**[3], **П. А. Бородин**[4], **П. В. Парамонов**[5], **К. Ю. Федоровский**[6], **А. А. Шкаликов**[7]

Работа содержит краткий обзор наиболее значимых научных результатов, полученных сотрудниками кафедры ТФФА за последние десять лет.

Ключевые слова: действительный анализ, комплексный анализ, функциональный анализ.

The paper contains a brief survey of the most significant results obtained by the staff of the TFFA Chair over the past ten years.

Key words: real analysis, complex analysis, functional analysis.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-66-1-6

Кафедра **теории функций и функционального анализа** (ТФФА) была создана в 1933 г., спустя полгода после образования механико-математического факультета МГУ. Первым ее заведующим стал академик М. А. Лаврентьев. Впоследствии кафедру возглавляли члены-корреспонденты АН СССР И. И. Привалов (1938–1941), Д. Е. Меньшов (1941–1979), П. Л. Ульянов (1979–2006, избран академиком РАН в 2006 г.). С 2007 г. кафедрой заведует академик РАН Б. С. Кашин. Сейчас на

[1] *Кашин Борис Сергеевич* — академик РАН, доктор физ.-мат. наук, зав. каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: kashin@mi-ras.ru.

Kashin Boris Sergeevich — Academician of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Head of the Chair of Theory of Functions and Functional Analysis.

[2] *Белошапка Валерий Константинович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vkb@strogino.ru.

Beloshapka Valerii Konstantinovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Functions and Functional Analysis.

[3] *Богачев Владимир Игоревич* — член-корреспондент РАН, доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vibogach@mail.ru.

Bogachev Vladimir Igorevich — Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Functions and Functional Analysis.

[4] *Бородин Петр Анатольевич* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: pborodin@inbox.ru.

Borodin Petr Anatolievich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Functions and Functional Analysis.

[5] *Парамонов Петр Владимирович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: petr.paramonov@list.ru.

Paramonov Petr Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Functions and Functional Analysis.

[6] *Федоровский Константин Юрьевич* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: kfedorovs@yandex.ru.

Fedorovskiy Konstantin Yurievich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Functions and Functional Analysis.

[7] *Шкаликов Андрей Андреевич* — член-корреспондент РАН, доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ashkaliko@yandex.ru.

Shkalikov Andrei Andreevich — Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Functions and Functional Analysis.

кафедре работают 18 докторов наук (профессоров) и 7 кандидатов наук (доцентов и ассистентов). В последние десять лет трое сотрудников кафедры — А. И. Аптекарев, А. А. Шкаликов и В. И. Богачев — были избраны членами-корреспондентами РАН (в 2016, 2019 и 2022 гг. соответственно). При кафедре работают лаборатория операторных моделей и спектрального анализа (заведующий — чл.-корр. РАН А. А. Шкаликов) и лаборатория "Многомерная аппроксимация и приложения" (заведующий — профессор В. Н. Темляков), образованная в 2018 г. в рамках мегагранта Правительства РФ.

Научные достижения кафедры ежегодно отмечаются различными премиями, стипендиями и грантами. В 2018 г. профессор кафедры В. И. Богачев был удостоен премии им. А. Н. Колмогорова РАН. Премии Московского математического общества был удостоен Е. Д. Косов (2021), который стал также победителем конкурса "Молодая математика России". П. А. Бородин и К. Ю. Федоровский в 2014 г. стали лауреатами конкурса фонда "Династия" для молодых докторов наук. За последние 10 лет более 20 аспирантов кафедры защитили кандидатские диссертации, в их числе молодые сотрудники кафедры М. А. Степанова, И. В. Лимонова и К. С. Шкляев. Докторские диссертации защитили выпускница кафедры И. В. Садовничая (2016), сотрудники кафедры А. М. Савчук (2019) и Е. Д. Косов (2023). В последнее десятилетие в свет вышли книги [1–19] сотрудников кафедры, среди которых выделяется коллективная монография [1], представляющая собой уникальное собрание учебных мини-курсов по широкому спектру современных направлений анализа.

Общеизвестно глубокое влияние методов теории функций и функционального анализа на другие области математики. Особенно ощутимо это влияние в теории вероятностей, теории дифференциальных уравнений, теории управления, математической физике, дифференциальной и выпуклой геометрии, алгебре, теории чисел. В последние десятилетия в связи с бурным развитием информационных технологий значительно расширилась область практических приложений ТФФА. При этом востребованными оказались и направления, на первый взгляд далекие от реальной жизни. Традиционно, хотя и условно, научные направления на кафедре делятся на три основных: действительный анализ, комплексный анализ и функциональный анализ. Кратко расскажем об основных результатах, полученных сотрудниками кафедры по этим направлениям в последнее десятилетие.

Действительный анализ. Известные результаты Б. С. Кашина 70-х и 80-х гг. прошлого века об *оценках поперечников* и геометрии выпуклых тел давно применяются в практических вопросах обработки сигналов и машинного обучения. В работе [20] Б. С. Кашина и аспиранта кафедры Д. Г. Ромского был предложен еще один, основанный на тех же результатах алгоритм, позволяющий эффективно проводить квантизацию сигналов большого объема. В работах Б. С. Кашина и И. В. Лимоновой [21, 22] исследовался вопрос о свойствах лакунарности случайных достаточно плотных подсистем, выбранных из произвольной конечной равномерно ограниченной ортонормированной системы. Недавно выяснилось, что применительно к конкретным дискретным системам эти результаты позволяют продвинуться в задачах, связанных с классическим принципом неопределенности и имеющих большое значение для процедур обработки сигналов. В [23] было получено принципиальное продвижение в известной задаче А. М. Олевского, частные случаи которой рассматривались еще в 20-х гг. прошлого века. Показано, что при $N = 1, 2, \ldots$ произвольную систему функций $\{f_j(x)\}_{j=1}^N$, $x \in (0,1)$, продолжаемую до ортонормированной системы на $(0,2)$, можно продолжить до ортогональной системы на $(0,2)$ так, что $\|f_j\|_{L^\infty(1,2)} \leqslant C$, где постоянная C от N не зависит.

Систематическое изучение *дискретизации* по значениям в точках L^p-норм функций из заданного конечномерного подпространства было начато В. Н. Темляковым в 2017 г. Первые результаты в этом направлении были получены в 1930-е гг. и восходят к С. Н. Бернштейну, Ю. Марцинкевичу и А. Зигмунду. В настоящее время это обширная и активно развивающаяся область исследований, имеющая глубокие связи с другими направлениями. Сотрудники кафедры В. Н. Темляков, Б. С. Кашин, Е. Д. Косов и И. В. Лимонова получили глубокие результаты в теории дискретизации. На эту тему написаны обзорные работы [24] и [25]. Работа [24] охватывает результаты по точной весовой дискретизации, дискретизации равномерной нормы многомерных тригонометрических полиномов [26], а также некоторые результаты об универсальной дискретизации (см. [27, 28]). В [25] приводятся недавние результаты о дискретизации по значениям в точках (см. [29–32]) и подробно рассматриваются связи с другими областями: теорией моментов случайных векторов, теорией подматриц, обладающих хорошими свойствами, вложениями конечномерных подпространств, разреженной аппроксимацией, теорией обучения и восстановлением по выборке. В последнее время в работах [31, 33] результаты о дискретизации и об универсальной дискретизации по значениям в точках успешно применялись в задачах восстановления по выборке. Более того, оказалось, что для некоторых из этих приложений достаточно иметь одностороннее неравенство дискретизации. Это обстоятельство привело к появлению работы [34] об односторонних неравенствах дискретизации и их приложениях к задачам восстановления по выборке.

В. Н. Темляков, П. А. Бородин и их ученики развивали *теорию жадных приближений*, представляющую прикладной интерес. В [35] предложен единый метод анализа жадных алгоритмов как в гильбертовом, так и в банаховом пространствах. Был определен и проанализирован новый класс алгоритмов (слабые биортогональные жадные алгоритмы), включающий как частные случаи такие важные алгоритмы, как слабый чебышёвский жадный и жадный алгоритм со свободной релаксацией. Был определен и исследован новый полезный алгоритм — масштабированный слабый релаксационный алгоритм. Получены теоремы сходимости и оценки скорости сходимости таких алгоритмов. В [36] были определены различные алгоритмы жадных приближений элементами произвольного множества M в банаховом пространстве, исследована сходимость этих алгоритмов в гильбертовом пространстве при различных геометрических условиях на M. В [37] построен пример такого несимметричного словаря D в гильбертовом пространстве H, что линейные комбинации элементов D с положительными коэффициентами плотны в H, но жадный алгоритм относительно D, в котором на каждом шаге максимизируется скалярное произведение с элементами D (а не модуль этого скалярного произведения, как в симметричном случае), расходится для некоторого начального элемента. Критерий В. Н. Темлякова сходимости слабого жадного алгоритма относительно словарей в гильбертовом пространстве был распространен в [38] на случай дальних проекций на произвольный набор выпуклых замкнутых множеств с непустым пересечением и определенным свойством симметрии.

В. А. Скворцов и его ученики продолжали исследование неабсолютных обобщений интеграла Лебега и их приложений в *гармоническом анализе*. С помощью обобщенных формул Фурье решены задачи восстановления коэффициентов рядов по системам характеров компактных групп. Для некоторых классов групп вопрос решен и в неабелевом случае. Например, в [39] найдено необходимое и достаточное условие, при котором формальный ряд, построенный по системе неприводимых представлений компактной нульмерной группы, является рядом Фурье–Стилтьеса аддитивной меры. Получена теорема единственности представления функций такими рядами. В работах [40, 7] найдены условия на банахово пространство X, при которых обобщенные интегралы от X-значных функций (типа интегралов Бохнера и Петтиса) дифференцируемы почти всюду относительно соответствующих базисов дифференцирования. Изучены взаимоотношения между перроновским и хенстоковским подходами к задаче восстановления функций по их производным в многомерном случае (см. [41]) и в случае, когда дифференцирование определяется в пространстве L^p (см. [42]). Для широкого класса обобщенных интегралов в [43, 44] получены дескриптивные характеристики в стиле теоремы Радона–Никодима.

Продолжались исследования в классической *теории тригонометрических рядов*. М. И. Дьяченко и С. Ю. Тихонов разработали новый метод изучения различных классов тригонометрических рядов с обобщенно-монотонными коэффициентами. С помощью этого метода в [45, 46] удалось перенести многие свойства тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами, в частности теоремы Харди–Литлвуда, Конюшкова, Лоренца, на рассматриваемые классы. Дальнейшее развитие этот метод получил в [47]. В работах [48, 49] изучалась возможность расширения классической теоремы Харди–Литлвуда с помощью усреднения функции или ее коэффициентов Фурье, а также рассматривались сходные вопросы для преобразований Фурье. В работах [50, 51] решена задача нахождения точных классов дробной монотонности синус- и косинус-коэффициентов Фурье, обеспечивающих вблизи нуля справедливость салемовских оценок сверху и снизу сумм соответствующих тригонометрических рядов. Ученица М. И. Дьяченко К. А. Оганесян получила в [52] окончательное решение известной задачи П. Л. Ульянова о максимальной мере множества нулей невырожденного синус-ряда с монотонными коэффициентами на отрезке $[0,\pi]$.

В цикле работ М. К. Потапова (1931–2021), Б. В. Симонова и С. Ю. Тихонова для классов гладких функций многих переменных исследовались связи между смешанными модулями гладкости в различных метриках (см. [9, 53]). За последние десять лет десятки изданий выдержали учебники по математике для средней школы, одним из авторов которых был М. К. Потапов.

В. М. Федоров, П. А. Бородин и К. С. Шкляев получили несколько ярких результатов в *геометрической теории приближений*. В. М. Федоров [54, 55] охарактеризовал пространства непрерывных комплекснозначных функций на хаусдорфовом компакте в терминах метрических свойств граней единичной сферы банахова пространства. В работе [56] он построил первый пример чебышёвского подпространства с бесконечными размерностью и коразмерностью в $C[0,\infty)$. В связи с этим напомним, что задача о существовании такого подпространства в $C[0,1]$ до сих пор не решена.

Одной из основных проблем геометрической теории приближений является проблема выпуклости чебышёвских множеств: верно ли, что в гильбертовом пространстве всякое чебышёвское множество выпукло? Н. В. Ефимов и С. Б. Стечкин установили в 1961 г., что в гладком банаховом пространстве всякое компактное чебышёвское множество выпукло. К. С. Шкляев [57] обобщил это утверждение: всякий компакт M в гладком банаховом пространстве не более чем с k-значной метрической проекцией является k-выпуклым, т.е. всякий элемент выпуклой оболочки M является выпуклой комбинацией не более чем k элементов M. В [58] была решена задача М. В. Балашова: доказано, что всякое компактное связное локально чебышёвское множество в произвольном банаховом пространстве является чебышёвским. В случае гладкого пространства отсюда следует частный случай теоремы Титце–Накаямы о выпуклости замкнутого связного локально выпуклого множества.

В [59] решена старая задача: доказано, что наименьшие рациональные уклонения в L^2 не могут образовывать произвольную строго монотонную последовательность. Ученик П. А. Бородина студент 3-го курса Ю. А. Скворцов [60] значительно продвинулся в проблеме существования элемента с заданными уклонениями от системы вложенных подпространств, улучшив более ранний результат С. В. Конягина.

П. А. Бородин и К. С. Шкляев занимались вопросами плотности *квантованных приближений* в следующей общей постановке: какие условия на множество M в банаховом пространстве X необходимы или достаточны для того, чтобы порождаемая им аддитивная полугруппа $R(M) = \{x_1+\ldots+x_n : x_k \in M, n \in \mathbb{N}\}$ была плотна в X? Доказано, в частности, что если M — спрямляемая кривая в равномерно гладком действительном пространстве X, не лежащая целиком ни в каком замкнутом полупространстве, то полугруппа $R(M)$ плотна в X. Были получены новые результаты о приближении наипростейшими дробями (логарифмическими производными многочленов, которые образуют полугруппу, порожденную сдвигами функции $1/z$) в различных пространствах функций комплексного переменного. При этом некоторые из известных теорем, в частности теорема Кореваара, были выведены из новых общих результатов о плотности полугруппы. Исследовались приближения естественным обобщением наипростейших дробей — суммами сдвигов одной функции. В частности, было доказано существование функции, суммы сдвигов которой плотны в $L^2(\mathbb{R})$, а также такого вектора в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z})$ двусторонних последовательностей, что суммы его сдвигов плотны в этом пространстве. Эти и другие результаты содержатся в обзоре [61].

Комплексный анализ. А. И. Аптекарев, В. Н. Сорокин (1957–2022) и Р. В. Пальвелев продолжали развивать *теорию аппроксимаций Паде* и связанную с ней *теорию (комплексно-) ортогональных многочленов*.

В классической проблеме приближения ростков $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k/z^k$ аналитических функций f с конечным множеством точек ветвления рациональными аппроксимациями Паде $\pi_n(z) := p_n(z)/q_n(z)$, $q_n(z)f(z) - p_n(z) = O\big(1/z^{n+1}\big)$ при $z \to \infty$, $\deg(p_n, q_n) \leqslant n$ особый интерес вызывает выделение у f областей голоморфности. Знаменитая гипотеза Дж. Наттолла о сходимости аппроксимаций π_n по емкости в области голоморфности D^* с минимальной (в смысле логарифмической емкости) границей была доказана в 1985 г. Г. Шталем, который нашел слабый предел полюсов π_n и доказал логарифмическую (по емкости) асимптотику многочленов q_n. Замечательный результат Шталя описывает поведение полюсов π_n "в целом", но не позволяет контролировать динамику (по n) отдельных нулей q_n, называемых "блуждающими" ("wandering") или "ложными" ("spurious") и в отличие от большинства нулей q_n, не стремящихся к ∂D^*. Для учета этих тонких эффектов нужны более точные асимптотики π_n. А. И. Аптекарев и М. Л. Ятцелев [62] исследовали так называемые *сильные асимптотики* для q_n, т.е. пределы $\lim_{n\to\infty} q_n/\Phi^n$ в D^*, где Φ — подходящим образом определенная нормализующая функция. Найденные сильные асимптотики позволяют контролировать "блуждающие" полюсы и отвечать на вопросы о равномерной сходимости аппроксимаций π_n для аналитических ростков рассматриваемого класса. Полученные результаты помогли решить в [63] ряд известных задач: о нормальности аппроксимаций Паде для алгебраических функций (функциональный аналог теоремы Туэ–Зигеля–Рота и гипотеза Гончара–Чудновских), об оценке числа "ложных" ("блуждающих") полюсов для аппроксимаций Паде (гипотеза Шталя), о возникновении и исчезновении дефектов (дуплетов Фруассара). В. Н. Сорокин [64] использовал технику Шталя для описания асимптотики дискретных ортогональных многочленов.

Также отметим достижение, связанное с классической проблематикой теории ортогональных многочленов — гипотезой Стеклова (1921), которая гласила, что последовательность ортонормированных относительно положительного веса многочленов ограничена на интервале ортогональности. Эту гипотезу в 1979 г. опроверг Е. А. Рахманов, построив положительный вес, обеспечивающий логарифмический рост максимумов ортонормированных многочленов при увеличении их номера. В работе [65] А. И. Аптекарев и его ученики получили точную оценку снизу для возможного роста таких максимумов.

Исследования по *аппроксимациям Эрмита–Паде* для систем функций марковского вида и их приложениям к теории диофантовых приближений начались в классических работах Е. М. Никишина, А. А. Гончара и Е. А. Рахманова в 1970-е гг. В последние десятилетия эти исследования продолжались в работах А. И. Аптекарева и В. Н. Сорокина. В [66] получены сильные (в смысле Сегё) асимптотики для двух функций марковского вида с перекрывающимися носителями порождающих мер. Главный член этой асимтотики описывается алгебраической функцией второго рода, а следующий член находится решением матричной (3×3) задачи Римана–Гильберта. В работе [67], мотивированной задачей из теории диофантовых приближений, исследовались предельные свойства последовательности многочленов, генерирующих приближения Апери к значению $\zeta(3)$ дзета-функции Римана. В другой работе В. Н. Сорокина [68] получены результаты, связанные с верхними оценками на меры иррациональности некоторых математических констант. Показано, что в основе результатов М. Хаты об оценке меры иррациональности числа π и В. Х. Салихова об оценке меры иррациональности $\ln 3$ лежат конструкции, близкие к рассматриваемым в теории рациональных аппроксимаций: конструкция Хаты близка к рациональным аппроксимациям Эрмита–Паде в бесконечно удаленной точке, а конструкция Салихова — к двухточечным аппроксимациям Эрмита–Паде в нуле и в бесконечности.

Как уже отмечалось, для широкого класса многозначных аналитических функций асимптотическое поведение классических полиномов и аппроксимаций Паде описывается фундаментальной теоремой Г. Шталя. Однако каких-либо общих результатов для полиномов Эрмита–Паде в настоящее время нет. В работе [69] при произвольном $m \geqslant 2$ изучено асимптотическое поведение полиномов Эрмита–Паде первого типа для набора из $m+1$ ростков функций, мероморфных на компактной римановой поверхности с фиксированным $(m+1)$-листным накрытием сферы Римана. Развивая подход, предложенный Дж. Наттоллом в работах первой половины 1980-х, авторы [69] описали предельное распределение нулей полиномов Эрмита–Паде, их слабую асимптотику, а также асимптотику их отношений.

П. В. Парамонов получил *критерии C^m-приближаемости* функций решениями эллиптических уравнений второго порядка и метрическое описание некоторых связанных с ними емкостей. Пусть в $\mathbb{R}^N$ дан эллиптический дифференциальный оператор второго порядка $\mathcal{L} = \sum_{i,j \leqslant N} c_{ij}\partial^2/(\partial x_i \partial x_j)$ с постоянными комплексными коэффициентами. Рассматривается следующая задача. Пусть X — непустой компакт в $\mathbb{R}^N$, $m \geqslant 0$, $f \in BC^m(\mathbb{R}^N)$. При каких условиях на $\mathcal{L}$, m, X и f найдется последовательность $\{f_n\} \subset BC^m(\mathbb{R}^N)$, сходящаяся к f в норме $BC^m(\mathbb{R}^N)$ и такая, что $\mathcal{L}f_n = 0$ в окрестности компакта X (своей для каждого n)? Эта задача при $m \geqslant 2$ решена А. Г. О'Фарреллом (1979) и Д. Вердерой (1987), при $m = 0$ — М. Я. Мазаловым (2020), а при $m \in (0,2)$ — П. В. Парамоновым в работах [70, 71], в которых установлена теорема, аналогичная известному критерию А. Г. Витушкина: указанная приближаемость имеет место тогда и только тогда, когда для всякого шара B некоторая специальная $\mathcal{L}$-осцилляция функции f по B оценивается сверху произведением некоторой функции от радиуса B и величины $\alpha_{m,\mathcal{L}}(B \setminus X)$, где $\alpha_{m,\mathcal{L}}$ — связанная с $\mathcal{L}$ и m емкость, определяемая стандартным образом. Емкости $\alpha_{m,\mathcal{L}}$ описаны в метрических терминах: при нецелых m — через нижние обхваты по Хаусдорфу (О. Фростман (1935), А. Г. О'Фаррелл (1979), Дж. Вердера (1987)), при $m = 0$ — через классическую гармоническую емкость (М. Я. Мазалов (2024)). Случай $m = 1$ при $N = 2$ изучен в [72], а при $N \geqslant 3$ — в работе К. Толсы (2021): все емкости $\alpha_{1,\mathcal{L}}(E)$ сравнимы друг с другом при фиксированном N, а при $N = 2$ — с классической C-аналитической емкостью, причем все они счетно-субаддитивны.

П. В. Парамонов и К. Ю. Федоровский [73, 74] нашли точные необходимые и достаточные условия C^m-непрерывности для операторов гармонического отражения через границы простых областей Каратеодори в $\mathbb{R}^N$ при $m \in [0,1]$.

К. Ю. Федоровский продолжал исследование свойств *неванлинновских областей*, введенных им в 1990-х в связи с задачей о равномерной аппроксимации функций полианалитическими многочленами на компактах в $\mathbb{C}$. Окончательное решение задачи о возможной размерности границ таких областей было получено в [75]: для любого $\beta \in [1,2]$ существует неванлинновская область, размерность по Хаусдорфу достижимой части границы которой равна β. В той же работе найдена точная асимптотика (равная $\sqrt{n}$) длины границы неванлинновской области, являющейся образом единичного круга при конформном отображении однолистной рациональной функцией степени n.

К. Ю. Федоровский с соавторами [76] получил решение аналога *задачи Чуи* о наипростейших дробях (логарифмических производных комплексных многочленов) в весовых гильбертовых пространствах Бергмана в единичном круге: для широкого класса весов установлено, что при всяком $N \in \mathbb{N}$ наипростейшая дробь с N полюсами на единичной окружности имеет минимальную норму тогда и только тогда, когда ее полюсы являются вершинами правильного N-угольника. Получены точные оценки соответствующих норм и описаны замыкания множества наипростейших дробей с полюсами на единичной окружности в этих пространствах.

А. В. Домрин [77] развил метод обратной задачи теории рассеяния для *солитонных уравнений* с локально голоморфными потенциалами без каких-либо граничных условий (обычно этот метод применяется для быстро убывающих на бесконечности или периодических потенциалов). Это позволило дать критерий разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для солитонных уравнений в терминах данных рассеяния начального условия и показать, что все локальные голоморфные решения аналитически продолжаются до глобально мероморфных функций от пространственной переменной, а также установить ряд дальнейших свойств таких решений [78]. Одним из приложений стало решение в [79] давнего открытого вопроса аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений — доказательство глобальной мероморфности всех локально голоморфных решений всех уравнений, входящих в иерархии первого и второго уравнений Пенлеве.

А. Г. Сергеев продолжал применение методов комплексного анализа в *математической физике*. Он исследовал кэлерову геометрию бесконечномерных комплексных многообразий, построил квантование универсального пространства Тейхмюллера и других бесконечномерных комплексных многообразиий. Этим результатам посвящены монография [17], а также работы [80, 81].

В работах по адиабатическому пределу в классических уравнениях Гинзбурга–Ландау и Зайберга–Виттена А. Г. Сергеев дал математическую интерпретацию указанного предела и показал, что адиабатический предел в уравнениях Зайберга–Виттена можно рассматривать как комплексную версию аналогичного предела в уравнениях Гинзбурга–Ландау. Этой теме посвящена статья [82]. Твисторный подход успешно применен к исследованию гармонических отображений компактных римановых поверхностей в пространства петель компактных групп Ли. В работе [83] сформулирована гипотеза о гармонических сферах, связывающая такие отображения с полями Янга–Миллса, и получен ряд результатов в направлении ее решения. В последние годы А. Г. Сергеев [84] разрабатывает математические методы в физике твердого тела.

В. К. Белошапка и М. А. Степанова продолжали свои исследования в *CR-геометрии*. Эффективным и плодотворным подходом к локальному анализу вещественных подмногообразий комплексного пространства является метод модельной поверхности, относящийся к аналитической технике, которую успешно разрабатывали и применяли А. Пуанкаре, а затем Ю. Мозер и А. Г. Витушкин. Недавно сфера применимости этого подхода была расширена до класса ростков любого конечного типа по Блуму–Грэму [85]. При этом использовалась стандартная версия данного метода, т.е. такая, что все переменные из комплексной касательной ростка имеют одинаковый вес. Однако в ряде частных случаев давно и успешно использовалась более гибкая техника свободного назначения весов переменным комплексной касательной. В работе [86] удалось дать систематическое построение такой “взвешенной” теории модельных поверхностей. Концепция взвешенной модельной поверхности позволила объединить серию ранее разрозненных примеров высоко симметричных CR-многообразий, выявить перспективные направления и сформулировать новые гипотезы. В центре внимания CR-геометрии также находятся объекты с богатыми группами симметрий, в частности самые симметричные. В работе [87] построены контрпримеры к долго остававшейся открытой гипотезе о размерности в CR-геометрии. Гипотеза состоит в следующем: самыми симметричными в классе многообразий с конечномерными алгебрами автоморфизмов являются невырожденные модельные поверхности. Данная гипотеза органически связана с техникой метода модельной поверхности и уточнялась по мере развития метода.

За последние пятнадцать лет В. К. Белошапке удалось построить красивую *теорию аналитической сложности* функций нескольких комплексных переменных. Класс аналитических функций двух переменных сложности один, т.е. функций вида $f(x, y) = c(a(x) + b(y))$, обладает рядом уникальных свойств различной природы, при доказательстве которых используются весьма разнообразные методы (комплексный анализ, дифференциальная геометрия, группы и алгебры Ли, дифференциальная алгебра и т. д.). В частности, в [88] доказано, что размерность стабилизатора аналитической функции двух переменных в калибровочной псевдогруппе максимальна (и равна трем) в точности для функций сложности один. Отметим также, что функции, реализующие арифметические операции, содержатся в этом уникальном классе. Тематика аналитической сложности естественно связана с задачами о суперпозициях и 13-й проблемой Гильберта, которые можно рассматривать не только в контексте непрерывных функций, но и в классах аналитических, дифференциально-алгебраических, алгебраических и других. В [89] построены примеры дифференциально-алгебраических функций бесконечной аналитической сложности. Из факта существования таких примеров следует, что класс всех дифференциально-алгебраических функций шире класса всех функций конечной сложности.

Функциональный анализ. А. А. Шкаликов, И. А. Шейпак, А. М. Савчук и их ученики исследовали вопросы *спектральной теории* и *операторные модели в математической физике*.

В работе [90] изучались спектральные свойства краевой задачи, являющейся моделью колебания сингулярной струны с закрепленными концами. Плотность массы (весовая функция уравнения) является обобщенной производной n-звенной самоподобной (фрактальной) функции P. Параметры самоподобия функции P таковы, что обобщенная производная P' является мультипликатором в пространстве Соболева с отрицательным показателем гладкости. Установлена связь таких задач со спектральными свойствами матриц Якоби, в частности с периодичностью матрицы в случае некомпактности мультипликатора, что позволяет сказать существенно больше о спектральных свойствах задачи для струны. Для неубывающей функции P показано, что спектр состоит не более чем из $n-1$ отрезка непрерывного спектра, в лакунах которого может быть не более $n-2$ собственных значений (не более одного в каждой лакуне).

Задача о нахождении точных констант $A_{n,k,p}(a)$ в оценках промежуточных производных

$$|y^{(k)}(a)| \leqslant A_{n,k,p}(a)\|y^{(n)}\|_{L^p[0;1]}, \quad k < n,$$

для функций y, принадлежащих пространству Соболева $W_p^n[0;1]$ и удовлетворяющих краевым условиям Дирихле, издавна привлекала математиков. Здесь a — фиксированная точка интервала $(0,1)$. Такие неравенства часто называют неравенствами типа Колмогорова–Маркова–Фридрихса. Однако точные значения констант $A_{n,k,p}(a)$ были известны лишь для некоторых значений k и $n \leqslant 4$. И. А. Шейпак с аспирантами Т. А. Гармановой и Д. Д. Казимировым обнаружил связь указанной задачи с задачей наилучшего приближения сплайна специального вида многочленами степени не выше $n-1$ в пространстве $L^{p'}[0;1]$, $1/p + 1/p' = 1$. В результате была получена красивая явная формула

$$A^2_{n,k,2}(t) = \frac{-t^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)((n-k-1)!)^2} \cdot {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -k,\, n-k-\frac{1}{2},\, 2n-k \\ n-k,\, 2n-2k \end{matrix} ; -4t \right]$$

(здесь ${}_3F_2$ — гипергеометрическая функция). Для четных k в [91] найдены явные формулы для констант вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ пространства $\mathring{W}_2^n[0;1]$ в пространство $\mathring{W}_\infty^k[0;1]$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Получено описание функций $A_{n,k,p}(a)$ при $k=n-1$, $p=1$ и $k=n-1$, $p=\infty$, а также при $k=0$, $p=\infty$. Найдены точные константы вложения в этих случаях. В частности,

$$\Lambda_{n,0,\infty,\infty} = \frac{n+1}{\pi n!}\frac{1}{2^{n-2}} \cdot \int_0^1 \frac{(1-u^2)^n}{1+(-1)^n u^{2(n+1)}}\, du.$$

В исследованиях А. А. Шкаликова в последние годы можно выделить три важных направления: теория возмущений операторов с дискретным спектром, асимптотическая теория и теория мультипликаторов в пространствах типа Соболева. Его наиболее значимые результаты в первом направлении опубликованы в работе [92]: они дают условия или критерии сохранения свойств безусловной базисности собственных функций самосопряженных или нормальных операторов при их возмущении подчиненными (в разных смыслах) несамосопряженными операторами. Эта тематика берет начало в работах М. В. Келдыша. По второму направлению наиболее значимыми являются работы А. А. Шкаликова [93] и [94], выполненные с его учениками — А. М. Савчуком и А. П. Косаревым. В этих работах в новом свете и в более общей форме приведены результаты по асимптотическим представлениям решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с большим (спектральным) параметром, позволяющие решать новые задачи об исследовании спектральных свойств дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами. Третье направление посвящено описанию функций q (мультипликаторов), для которых оператор умножения $Af = qf$ является ограниченным из пространства Соболева $W_p^s[0,1]$ в пространство $W_t^r[0,1]$, где $r < s$, и в более общих пространствах типа Соболева. Эта классическая задача была хорошо изучена для неотрицательных показателей гладкости $s > r \geqslant 0$, но А. А. Шкаликов показал, что решение этой задачи для показателей $s > 0, r < 0$ является важной для корректного определения операторов Шрёдингера и более общих эллиптических операторов с потенциалами-распределениями. Наиболее значимые результаты для таких показателей были получены в работе [95].

В. И. Богачев со своими учениками занимался *бесконечномерным анализом и стохастикой*. В работе [96] доказана единственность вероятностного решения задачи Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова на прямой с единичным коэффициентом диффузии и локально ограниченным на прямой коэффициентом сноса. Тем самым дан ответ на вопрос А. Н. Колмогорова.

В работе [97] доказано, что для всякого непостоянного многочлена f степени d от n переменных и независимых стандартных гауссовских случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ распределение случайной величины $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ принадлежит классу Никольского–Бесова $B^{1/d}$ дробной дифференцируемости порядка $1/d$ независимо от числа переменных. В работе [98] найдено точное условие равенства значений в задачах Монжа и Канторовича оптимальной транспортировки мер. В этих задачах даны вероятностные меры Радона μ и ν на вполне регулярных топологических пространствах X и Y и ограниченная непрерывная функция стоимости h на $X \times Y$. Задача Монжа состоит в нахождении инфимума $M(\mu, \nu)$ интегралов

$$\int_X h(x, T(x))\, \mu(dx)$$

по борелевским отображениям $T\colon X \to Y$, переводящим меру μ в меру ν. Задача Канторовича состоит в нахождении минимума $K(\mu, \nu)$ интегралов

$$\int_{X \times Y} h(x, y)\, \sigma(dx\, dy)$$

по радоновским вероятностным мерам σ на $X \times Y$ с проекциями μ и ν на сомножители. Всегда выполнено неравенство $K(\mu, \nu) \leqslant M(\mu, \nu)$. Было известно, что для мер без атомов во многих важных случаях верно равенство $K(\mu, \nu) = M(\mu, \nu)$. В работе [98] установлено, что это равенство верно в случае сепарабельных мер без атомов, причем условие сепарабельности снять нельзя.

О. Г. Смолянов (1938–2021) занимался широким кругом задач бесконечномерного анализа и математической физики. В работе [99] рассмотрены различные представления состояний квантовых систем, в том числе восходящий к Л. Д. Ландау подход, в котором оператор плотности описывается как редукция чистого состояния квантовой системы, описываемой тензорным произведением подходящих гильбертовых пространств. Доказана эквивалентность таких представлений. Ряд новых результатов вошел в монографии [3] и [14].

Важные задачи *теории динамических систем* решены в работах В. В. Рыжикова. В [100] дано конструктивное решение проблемы А. Н. Колмогорова о групповом свойстве спектра и проблемы В. А. Рохлина об однородном спектре преобразований в классе перемешивающих автоморфизмов пространства Лебега. Указан явный класс перемешивающих действий с непростым однородным спектром, не удовлетворяющим групповому свойству. В [101] обнаружены новые метрические и спектральные свойства динамических систем, включая гауссовские и пуассоновские действия. В [102] в теорию типичных действий с инвариантной мерой введены численные энтропийные инварианты, позволяющие различать детерминированные действия и их расширения. В работе [103] доказано, что все бернуллиевские действия квазиподобны, и обобщена теорема Пинскера о независимости детерминированных действий и K-систем Колмогорова.

А. М. Степин (1940–2020) в совместной работе [104] получил конструктивное обобщение принципа сжимающих отображений на случай отображений с произвольной скоростью сжатия, а также опубликовал ряд результатов о регулярности решений в краевых задачах для эллиптических операторов в случае областей на многообразиях [105], в том числе оценки отклонения собственных значений операторов при возмущении области. Кроме того, он дал ответ на вопрос В. И. Оселедца о классе аддитивных коциклов, для которых средние Биркгофа не сходятся: для таких коциклов доказана сходимость средних на временных множествах плотности 1.

А. Я. Хелемский продолжал исследование гомологических свойств *банаховых алгебр.* В частности, он доказал в [106], что алгебра всех комплексных регулярных борелевских мер на недискретной локально компактной группе не является аменабельной. В теории операторных алгебр он разработал общий подход к понятию проективного операторного модуля, основанный на использовании оснащенных категорий, свободных объектов в них, а также на новом понятии асимптотической категории [107]. А.Я. Хелемскому удалось также построить тензорное произведение для матрично нормированных пространств Эффроса–Руана [108] и для обобщенных мультинормированных пространств, точнее $L_p(X, \mu)$-пространств [109, 110].

Ю. А. Неретин занимался исследованиями в традиционной для нашей кафедры тематике *теории представлений.* Из его результатов в последние годы выделим следующие. В работе [111] рассматриваются преобразования g лебеговских пространств с непрерывной вероятностной мерой и соответствующие унитарные операторы $U(g)$. Известно, что для преобразований g общего положения (в смысле бэровской категории) оператор $U(g)$ имеет простой спектр, спектральные меры чисто сингулярны, а все их сверточные степени попарно сингулярны. При этом преобразования общего положения имеют ранг 1 и допускают простую “каноническую форму”, а спектральные меры известны

(Ж. Бургейн) и задаются бесконечными тригонометрическими произведениями типа Рисса. В [111] построены явные разложения таких операторов $U(g)$ по обобщенным собственным функциям.

Известно, что у классического преобразования Фурье есть "высшие аналоги", связанные со спектральными разложениями L^2 на однородных пространствах G/H групп Ли. В работе [112] для нескольких пространств G/H (а именно для плоскости Лобачевского и групповых пространств $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$) построено "операционное исчисление", т.е. вычислены образы дифференциальных операторов при преобразовании Фурье. Эти образы являются дифференциально-разностными операторами, при этом разностная часть содержит сдвиги в мнимом направлении $(f(s) \mapsto f(s+i))$.

Как было замечено в середине 1960-х гг. (И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин), классическая гипергеометрическая функция Гаусса имеет естественный "комплексный аналог":

$$ {}_2F_1^{\mathbb{C}}\begin{bmatrix} a,b \\ c \end{bmatrix}; z\Bigg] = \mathrm{const}\cdot\int_{\mathbb{C}} t^{2b-1}(1-t)^{2c-2b-1}(1-zt)^{-2a}d\,\mathrm{Re}\,z\,d\,\mathrm{Im}\,z. $$

Эти функции вновь появились лишь в начале этого тысячелетия в исследованиях по теории представлений и математической физике. В работе [113] функции ${}_2F_1^{\mathbb{C}}$ были детально исследованы, в работе [114] были введены функции ${}_pF_q^{\mathbb{C}}$ (они могут быть выражены как квадратичные линейные комбинации обычных функций ${}_pF_q$). Оказалось, что гипергеометрические тождества и гипергеометрические интегралы, как правило, имеют аналоги для функций ${}_pF_q^{\mathbb{C}}$. Основные инструменты исследования таких функций — спектральные разложения для разностных операторов мнимого направления, а также интегральные преобразования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белошапка В.К., Богачев В.И., Бородин П.А., Домрин А.В., Кашин Б.С., Неретин Ю.А., Парамонов П.В., Протасов В.Ю., Рыжиков В.В., Сорокин В.Н., Федоровский К.Ю., Хелемский А.Я., Шейпак И.А., Шкаликов А.А.* ТФФА — лекции для аспирантов. М.: Изд-во МГУ, 2023.
2. *Богачев В.И.* Слабая сходимость мер. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2016.
3. *Богачев В.И., Смолянов О.Г.* Действительный и функциональный анализ: университетский курс. 3-е изд. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2020.
4. *Богачев В.И.* Основы теории меры. Т. 1, 2. 3-е изд., испр. и доп. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2021.
5. *Богачев В.И., Колесников А.В., Шапошников С.В.* Задачи Монжа и Канторовича оптимальной транспортировки. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2023.
6. *Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И.А.* Задачи по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2017.
7. *Лукашенко Т.П., Скворцов В.А., Солодов А.П.* Обобщенные интегралы. 3-е изд. М.: URSS, 2024.
8. *Неретин Ю.А.* Время Лузина: Рождение Московской математической школы и общественные схватки 20–30-х годов. М.: URSS, 2020.
9. *Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.* Дробные модули гладкости. М.: МАКС Пресс, 2016.
10. *Хелемский А.Я.* Гомология в банаховых и топологических алгебрах. 2-е изд. М.: Ленанд, 2022.
11. *Хелемский А.Я.* Банаховы и полинормированные алгебры: Общая теория, представления, гомологии. 2-е изд. М.: Ленанд, 2022.
12. *Хелемский А.Я.* Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2014.
13. *Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* Fokker–Planck–Kolmogorov equations. Rhode Island, Providence: Amer. Math. Soc., 2015.
14. *Bogachev V.I., Smolyanov O.G.* Topological vector spaces and their applications. Cham: Springer, 2017.
15. *Bogachev V.I.* Weak convergence of measures. Rhode Island, Providence: Amer. Math. Soc., 2018.
16. *Dung D., Temlyakov V., Ullrich T.* Hyperbolic cross approximation. Cham: Birkhäuser/Springer, 2018.
17. *Sergeev A.G.* Lectures on universal Teichmüller space. Zürich: EMS Publshing House, 2014.
18. *Temlyakov V.* Multivariate approximation. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.
19. *Temlyakov V.* Sparse approximation with bases. Basel: Birkhäuser/Springer, 2015.
20. *Кашин Б.С., Ромский Д.Г.* Эффективный алгоритм разложения вектора на два вектора с малой равномерной нормой // Матем. заметки. 2023. **114**, № 6. 945–948.
21. *Кашин Б.С., Лимонова И.В.* Слабо лакунарные ортогональные системы и свойства оператора мажоранты частных сумм для подсистем // Тр. Матем. ин-та РАН. 2020. **311**. 164–182.
22. *Лимонова И.В.* Плотные слабо лакунарные подсистемы ортогональных систем и оператор мажоранты частных сумм // Матем. сб. 2023. **214**, № 11. 63–88.

23. *Кашин Б.С.* Замечание о матрицах Грама систем равномерно ограниченных функций и одной задаче Олевского // Успехи матем. наук. 2022. **77**, № 1. 183–184.
24. *Дай Ф., Примак А., Темляков В.Н., Тихонов С.Ю.* Дискретизация интегральной нормы и близкие задачи // Успехи матем. наук. 2019. **74**, № 4. 3–58.
25. *Kashin B., Kosov E., Limonova I., Temlyakov V.* Sampling discretization and related problems // J. Complexity. 2022. **71**. 101653.
26. *Kashin B., Konyagin S., Temlyakov V.* Sampling discretization of the uniform norm // Constr. Approx. 2023. **57**, N 2. 663–694.
27. *Dai F., Temlyakov V.* Random points are good for universal discretization // J. Math. Anal. and Appl. 2024. **529**, N 1. 127570.
28. *Темляков В.Н.* Об универсальном восстановлении функций по значениям в точках в равномерной норме // Тр. Матем. ин-та РАН. 2023. **323**. 213–223.
29. *Dai F., Kosov E., Temlyakov V.* Some improved bounds in sampling discretization of integral norms // J. Funct. Anal. 2023. **285**, N 4. 109951.
30. *Dai F., Prymak A., Shadrin A., Temlyakov V., Tikhonov S.* Entropy numbers and Marcinkiewicz-type discretization // J. Funct. Anal. 2021. **281**, N 6. 109090.
31. *Дай Ф., Темляков В.Н.* Дискретизация интегральных норм по значениям в точках и ее приложение // Тр. Матем. ин-та РАН. 2022. **319**. 106–119.
32. *Limonova I., Temlyakov V.* On sampling discretization in L_2 // J. Math. Anal. and Appl. 2022. **515**, N 2. 126457.
33. *Temlyakov V.* On optimal recovery in L_2 // J. Complexity. 2021. **65**. 101545.
34. *Лимонова И.В., Малыхин Ю.В., Темляков В.Н.* Односторонние неравенства дискретизации и восстановление по выборке // Успехи матем. наук. 2024. **79**, № 3. 149–180
35. *Dereventsov A., Temlyakov V.* Biorthogonal greedy algorithms in convex optimization // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2022. **60**. 489–511.
36. *Бородин П.А.* Жадные приближения произвольным множеством // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. **84**, № 2. 43–59.
37. *Бородин П.А.* Пример расходимости жадного алгоритма относительно несимметричного словаря // Матем. заметки. 2021. **109**, № 3. 352–360.
38. *Borodin P.A., Kopecká E.* Convergence of remote projections onto convex sets // Pure and Appl. Funct. Anal. 2023. **8**, N 6. 1603–1620.
39. *Скворцов В.А.* Восстановление обобщенного ряда Фурье по его сумме на компактной нуль-мерной группе в неабелевом случае // Матем. заметки. 2021. **109**, № 4. 616–624.
40. *Skvortsov V.* Recovering Banach-valued coefficients of series with respect to characters of zero-dimensional group // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp. 2019. **49**. 379–397.
41. *Skvortsov V.A., Tulone F.* Multidimensional dyadic Kurzweil–Henstock- and Perron-type integrals in the theory of Haar and Walsh series // J. Math. Anal. and Appl. 2015. **421**. 1502–1518.
42. *Musial P., Skvortsov V., Tulone F.* The HK_r-integral is not contained in the P_r-integral // Proc. Amer. Math. Soc. 2022. **150**. 2107–2114.
43. *Лукашенко Т.П., Скворцов В.А., Солодов А.П.* Идеи Колмогорова по теории интеграла в современных исследованиях // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2024. № 1. 20–31.
44. *Мущал П., Скворцов В.А., Тулоне Ф.* О дескриптивных характеристиках интеграла, восстанавливающего функцию по ее производной в L^r // Матем. заметки. 2022. **111**, № 3. 411–421.
45. *Dyachenko M.I., Tikhonov S.Yu.* Smoothness and asymptotic properties of functions with general monotone Fourier coefficients // J. Fourier Anal. and Appl. 2018. **24**, N 4. 1072–1097.
46. *Дьяченко М.И., Муканов А.Б., Тихонов С.Ю.* Гладкость функций и коэффициенты Фурье // Матем. сб. 2019. **210**, № 7. 94–119.
47. *Белов А.С., Дьяченко М.И., Тихонов С.Ю.* Функции с обобщенно-монотонными коэффициентами Фурье // Успехи матем. наук. 2021. **75**, № 6 (462). 3–70.
48. *Dyachenko M., Nursultanov E., Tikhonov S.* Hardy–Littlewood and Pitt's inequalities for Hausdorff operators // Bull. Sci. Math. 2018. **147**. 40–57.
49. *Dyachenko M., Nursultanov E., Tikhonov S.* Hardy-type theorems on Fourier transforms revised // J. Math. Anal. and Appl. 2018. **467**. 171–184.
50. *Дьяченко М.И.* Асимптотика сумм косинус-рядов с коэффициентами дробной монотонности // Матем. заметки. 2021. **110**, № 6. 865–874.
51. *Dyachenko M.I., Solodov A.P.* Asymptotic of sums of sine series with fractional monotonicity coefficients // Anal. Math. 2023. **49**, N 1. 67–73.
52. *Оганесян К.А.* Мера множества нулей суммы невырожденного синус-ряда с монотонными коэффициентами на отрезке $[0,\pi]$ // Матем. заметки. 2018. **103**, № 4. 576–581.

53. *Потапов М.К., Симонов Б.В.* Уточнение соотношений между модулями гладкости // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. № 2. 11–23.
54. *Федоров В.М.* Представление комплексных банаховых пространств пространством непрерывных функций на компакте // Матем. заметки. 2013. **93**, № 2. 316–320.
55. *Федоров В.М.* Характеристика пространства орбитальных комплекснозначных функций на компакте // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2014. № 3. 19–32.
56. *Федоров В.М.* О чебышёвских подпространствах рядов Дирихле // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. № 6. 17–23.
57. *Шкляев К.С.* Выпуклая оболочка и число Каратеодори множества в терминах метрической проекции // Матем. сб. 2022. **213**, № 10. 167–184.
58. *Шкляев К.С.* О локально чебышевских множествах // Матем. заметки. 2024. **115**, № 4. 626–633.
59. *Borodin P.A., Kopecká E.* Sequences of m-term deviations in Hilbert space // J. Approx. Theory. 2022. **284**. 105821.
60. *Скворцов Ю.А.* О существовании элемента с заданными уклонениями от расширяющейся системы подпространств // Матем. заметки. 2023. **114**, № 5. 780–788.
61. *Бородин П.А., Шкляев К.С.* Плотность квантованных приближений // Успехи матем. наук. 2023. **78**, № 5. 3–64.
62. *Aptekarev A.I., Yattselev M.L.* Pade approximants for functions with branch points — strong asymptotics of Nuttall–Stahl polynomials // Acta Math. 2015. **215**. 217–280.
63. *Аптекарев А.И., Ятцелев М.Л.* Гипотеза Гончара–Чудновских и функциональный аналог теоремы Туэ–Зигеля–Рота // Тр. Моск. матем. о-ва. 2022. **83**, № 2. 297–318.
64. *Сорокин В.Н.* Аппроксимации Эрмита–Паде функции Вейля и ее производной для дискретных мер // Матем. сб. 2020. **211**, № 10. 139–156.
65. *Aptekarev A.I., Denisov S.A., Tulyakov D.N.* On a problem by Steklov // J. Amer. Math. Soc. 2016. **29**. 1117–1165.
66. *Aptekarev A.I., Van Assche W., Yattselev M.L.* Hermite–Padé approximants for a pair of Cauchy transforms with overlapping symmetric supports // Communs Pure and Appl. Math. 2017. **70**, N 3. 444–510.
67. *Сорокин В.Н.* Об одном обобщении дискретной формулы Родрига для многочленов Мейкснера // Матем. сб. 2022. **213**, № 11. 79–101.
68. *Сорокин В.Н.* Об интеграле Салихова // Тр. Моск. матем. о-ва. 2016. **77**, № 1. 131–154.
69. *Комлов А.В., Пальвелев Р.В., Суетин С.П., Чирка Е.М.* Аппроксимации Эрмита–Паде для мероморфных функций на компактной римановой поверхности // Успехи матем. наук. 2017. **72**, № 4. 95–130.
70. *Парамонов П.В.* Критерии индивидуальной C^m-приближаемости функций решениями однородных эллиптических уравнений второго порядка на компактах в $\mathbb{R}^N$ // Матем. сб. 2018. **209**, № 6. 83–97.
71. *Парамонов П.В.* Критерии C^1-приближаемости функций решениями однородных эллиптических уравнений второго порядка на компактах в $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$ // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. **85**, № 3. 154–177.
72. *Paramonov P.V., Tolsa X.* On C^1-approximability of functions by solutions of second order elliptic equations on plane compact sets and C-analytic capacity // Anal. Math. Phys. 2019. **9**, N 3. 1133–1161.
73. *Fedorovskiy K., Paramonov P.* On Lip^m-reflection of harmonic functions over boundaries of simple Carathéodory domains // Anal. Math. Phys. 2019. **9**, N 3. 1031–1042.
74. *Парамонов П.В., Федоровский К.Ю.* О C^m-отражении гармонических функций и C^m-приближаемости гармоническими полиномами // Матем. сб. 2020. **211**, № 8. 102–113.
75. *Belov Yu., Borichev A., Fedorovskiy K.* Nevanlinna domains with large boundaries // J. Funct. Anal. 2019. **277**. 2617–2643.
76. *Abakumov E., Borichev A., Fedorovskiy K.* Chui conjecture in Bergman spaces // Math. Ann. 2021. **379**, N 3-4. 1507–1532.
77. *Домрин А.В.* Голоморфные решения солитонных уравнений // Тр. Моск. матем. о-ва. 2021. **82**. 227–312.
78. *Домрин А.В.* Тау-функции решений солитонных уравнений // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. **85**, № 3. 30–51.
79. *Домрин А.В., Сулейманов Б.И., Шумкин М.А.* О глобальной мероморфности решений уравнений Пенлеве и их иерархий // Тр. Матем. ин-та РАН. 2020 **311**. 106–122.
80. *Сергеев А.Г.* Квантование соболевского пространства полудифференцируемых функций // Матем. сб. 2016. **207**, № 10. 96–104.
81. *Сергеев А.Г.* В поисках бесконечномерной кэлеровой геометрии // Успехи матем. наук. 2020. **75**, № 2. 133–184.
82. *Сергеев А.Г.* Адиабатический предел в уравнениях Гинзбурга–Ландау и Зайберга–Виттена // Тр. Матем. ин-та РАН. 2015. **289**. 242–303.
83. *Сергеев А.Г.* Геометрия твисторов и калибровочные поля // Тр. Моск. матем. о-ва. 2018. **79**, № 2. 155–207.

84. *Сергеев А.Г.* BB-соответствие в теории твердого тела // Тр. Моск. матем. о-ва. 2023. **84**, № 2. 179–203.
85. *Beloshapka V.K.* CR-manifolds of finite Bloom–Graham type: the method of model surface // Russ. J. Math. Phys. 2020. **27**. 155–174.
86. *Beloshapka V.K.* Model CR surfaces: weighted approach // Russ. J. Math. Phys. 2023. **30**, N 1. 25–45.
87. *Степанова М.А.* Гипотеза о размерности: решение и дальнейшие перспективы // Матем. заметки. 2022. **112**, № 5. 784–800.
88. *Beloshapka V.K.* Stabilizer of a function in the gage group // Russ. J. Math. Phys. 2017. **24**. 148–152.
89. *Степанова М.А.* Об аналитической сложности дифференциально-алгебраических функций // Матем. сб. 2019. **210**, № 12. 120–135.
90. *Шаров Е.Б., Шейпак И.А.* Уравнение струны с весом — некомпактным мультипликатором: непрерывный спектр и собственные значения // Алгебра и анализ. 2021. **33**, № 4. 155–172.
91. *Гарманова Т.А., Шейпак И.А.* О точных оценках производных четного порядка в пространствах Соболева // Функц. анализ и его прил. 2021. **55**, № 1. 43–55.
92. *Шкаликов А.А.* Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром // Успехи матем. наук. 2016. **71**, № 5. 113–174.
93. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Асимптотический анализ решений обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями // Матем. сб. 2020. **211**, № 11. 129–166.
94. *Косарев А.П., Шкаликов А.А.* Асимптотические представления решений $n \times n$-систем обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром // Матем. заметки. 2024. **116**, № 2. 290–313.
95. *Беляев А.А., Шкаликов А.А.* Мультипликаторы в пространствах бесселевых потенциалов: случай индексов гладкости разного знака // Алгебра и анализ. 2018. **30**, № 2. 76–96.
96. *Богачев В.И., Красовицкий Т.И., Шапошников С.В.* О единственности вероятностных решений уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова // Матем. сб. 2021. **212**, № 6. 3–42.
97. *Bogachev V.I., Kosov E.D., Zelenov G.I.* Fractional smoothness of distributions of polynomials and a fractional analog of the Hardy–Landau–Littlewood inequality // Trans. Amer. Math. Soc. 2018. **370**, N 6. 4401–4432.
98. *Богачев В.И., Калинин А.Н., Попова С.Н.* О равенстве значений в задачах Монжа и Канторовича // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2017. **457**. 53–73.
99. *Козлов В.В., Смолянов О.Г.* Математические структуры, связанные с описанием квантовых состояний // Докл. РАН. Матем., информ., процессы упр. 2021. **501**. 57–61.
100. *Рыжиков В.В.* О сохраняющих меру преобразованиях ранга один // Тр. Моск. матем. о-ва. 2020. **81**, № 2. 281–318.
101. *Рыжиков В.В.* Спектры самоподобных эргодических действий // Матем. заметки. 2023. **113**, № 2. 273–282.
102. *Рыжиков В.В.* Типичные расширения эргодических систем // Матем. сб. 2023. **214**, № 10. 98–115.
103. *Рыжиков В.В., Тувено Ж.-П.* Квазиподобие, энтропия и дизъюнктность эргодических действий // Функц. анализ и его прил. 2024. **58**, № 1. 117–124.
104. *Корнев А.А., Степин А.М.* Об асимптотически сжимающих отображениях // Матем. заметки. 2013. **94**, № 2. 218–224.
105. *Stepin A.M., Tsylin I.V.* Spectral boundary value problems for Laplace–Beltrami operator: Moduli of continuity of eigenvalues under domain deformation // Contemp. Math. AMS. 2017. **692**. 275–290.
106. *Helemskii A.Y.* Amenability, flatness and measure algebras // Geometric Methods in Physics. XXXVII Workshop 2018. Trends in Math. Cham: Birkhäuser, 2019. 221–233.
107. *Helemskii A.Ya.* Projectivity for operator modules: approach based on freedom // Rev. Roum. Math. Pures and Appl. 2014. **59**, N 2. 219–236.
108. *Helemskii A.Ya.* Projective tensor product of proto-quantum spaces // Colloq. Math. 2017. **149**, N 1. 45–73.
109. *Хелемский А.Я.* Мультинормированные пространства, основанные на недискретных мерах, и их тензорные произведения // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. **82**, № 2. 194–216.
110. *Helemskii A.Ya.* The existence of p-convex tensor products of $L_p(X)$-spaces for the case of an arbitrary measure // Positivity. 2021. **25**, N 2. 649–662.
111. *Neretin Yu.A.* Riesz products and spectral decompositions for rank 1 measure preserving transformations. Preprint. URL: https://arxiv.org/abs/1806.10884.
112. *Неретин Ю.А.* Преобразование Фурье на плоскости Лобачевского и операционное исчисление // Функц. анализ и его прил. 2020. **54**, № 4. 64–73.
113. *Molchanov V.F., Neretin Yu.A.* A pair of commuting hypergeometric operators on the complex plane and bispectrality // J. Spectr. Theory. 2021. **11**, N 2. 509–586.
114. *Neretin Yu. A.* Barnes–Ismagilov integrals and hypergeometric functions of the complex field // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 2020. **16**. Paper N 072.

Поступила в редакцию
22.08.2024