

69. *Hammer D., Romashchenko A.E., Shen A., Vereshchagin N.K.* Inequalities for Shannon entropies and Kolmogorov complexities // Proc. Computational Complexity. Twelfth Annual IEEE Conf. Ulm, Germany, 1997. 13–23.
70. *Мучник Ан.А.* Об основных структурах дескриптивной теории алгоритмов // Докл. АН СССР. 1985. **285**, № 2. 280–283.
71. *Muchnik An., Mezhirov I., Shen A., Vereshchagin N.K.* Game interpretation of Kolmogorov complexity // CoRR abs/1003.4712: 2010.
72. *Vereshchagin N.K.* Kolmogorov complexity and games // Bull. EATCS. 2008. **94**. 43–75.
73. *Muchnik An.A., Semenov A.L., Uspensky V.A.* Mathematical metaphysics of randomness // Theor. Comput. Sci. 1998. **207**, N 2. 263–317.
74. *Muchnik An.A.* Conditional complexity and codes // Theor. Comput. Sci. 2002. **271**, N 1–2. 97–109.
75. *Vereshchagin N., Shen A.* Algorithmic Statistics: Forty Years Later // Lect. Notes Comput. Sci. 2017. **10010**. 669–737 (ArXiv version of this survey, which contains all proofs: arXiv:1607.08077 [cs.CC]).
76. *Lyubetsky V.A., Rubanov L.I., Tereshina M.B., Ivanova A.S., Araslanova K.R., Uroshlev L.A., Goremykina G.I., Yang J., Kanovei V.G., Zverkov O.A., Shitikov A.D., Korotkova D.D., Zaraisky A.G.* Wide-scale identification of novel eliminated genes responsible for evolutionary transformations // Biology Direct. 2023. **18**, N 1. Art. 45 (DOI: 10.1186/s13062-023-00405-6).
77. *Gorbunov K.Yu., Lyubetsky V.A.* Algorithms for the reconstruction of genomic structures with proofs of their low polynomial complexity and high exactness // Mathematics. 2024. **12**, N 6. Art. 817 (DOI: 10.3390/math12060817).

Поступила в редакцию
21.07.2024

УДК 519.2

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

А. М. Зубков¹, А. В. Прохоров²

Статья содержит фрагменты истории кафедры, описание современной научно-педагогической деятельности и обзор основных научных результатов, полученных сотрудниками и аспирантами кафедры в последние годы.

Ключевые слова: математическая статистика, случайные и псевдослучайные числа, характеристика вероятностных распределений, критерии однородности и независимости, случайные блуждания, ветвящиеся случайные процессы, вероятности больших отклонений, функциональные предельные теоремы.

The paper contains fragments of the history of the Chair, an account of modern scientific and pedagogical activities and an overview of the main scientific results obtained by the staff and postgraduate students of the Chair in recent years.

Key words: mathematical statistics, random and pseudorandom numbers, characterisation of probability distributions, homogeneity and independence tests, random walks, branching random processes, probabilities of large deviations, functional limit theorems.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-66-1-5

Введение. Математическая статистика — это раздел теории вероятностей, в котором изучаются математические методы систематизации, интерпретации и использования массивов эмпирических

¹ *Зубков Андрей Михайлович* — доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. математической статистики и случайных процессов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: zubkov@mi-ras.ru.

Zubkov Andrei Mikhailovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Head of the Chair of Mathematical Statistics and Random Processes.

² *Прохоров Александр Владимирович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математической статистики и случайных процессов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: a.prokhorov@inbox.ru.

Prokhorov Alexander Vladimirovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Statistics and Random Processes.

данных. Методы математической статистики позволяют применять эмпирические данные для уточнения математических моделей изучаемых реальных явлений.

Кафедра математической статистики была основана великим русским ученым академиком Андреем Николаевичем Колмогоровым в 1976 г. Создание отдельной кафедры математической статистики на механико-математическом факультете было вызвано возросшей потребностью в специалистах-статистиках, подготовленных для проведения научных исследований в самых разных прикладных направлениях. С 1980 г. кафедра получает свое нынешнее наименование — математической статистики и случайных процессов — ввиду того, что современный этап развития математической статистики и ее приложений связан во многом с анализом случайных процессов.

В 1980-е гг. в составе кафедры и лаборатории математической статистики работали непосредственные ученики А. Н. Колмогорова: А. В. Булинский, И. Г. Журбенко, В. М. Золотарев, М. В. Козлов, А. В. Прохоров, Ю. А. Розанов, А. Н. Ширяев, а также ученики его учеников: Л. И. Гальчук, Б. М. Гуревич, Н. В. Крылов, М. Б. Малютов, В. А. Лебедев.

После А. Н. Колмогорова кафедрой руководили профессор Ю. А. Розанов и академик В. В. Козлов. С 2005 г. заведующим кафедрой является Андрей Михайлович Зубков, известный специалист по теории вероятностей, дискретной математике и их применениям, заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

Лаборатория математической статистики как подразделение кафедры участвует в научно-педагогической работе кафедры. Заведует лабораторией с 1996 г. доцент М. В. Козлов, заслуженный преподаватель МГУ.

В настоящее время на кафедре работают: заведующий кафедрой А. М. Зубков, профессора В. И. Афанасьев, А. М. Райгородский, доценты Е. Вл. Булинская, М. В. Козлов, А. В. Прохоров, преподаватель Е. В. Хиль, ассистент М. Б. Лагутин, с.н.с. О. С. Смирнова. В лаборатории математической статистики работают: в.н.с. А. В. Шкляев, с.н.с. В. А. Лебедев, с.н.с. М. П. Савелов, н.с. О. П. Орлов, н.с. Г. А. Бакай. С 2020 г. обязанности ученого секретаря кафедры математической статистики и случайных процессов исполняет Е. В. Хиль.

На механико-математическом факультете сотрудники кафедры читают общие курсы: “Теория вероятностей” (А. М. Зубков), “Математическая статистика” (А. В. Прохоров), “Теория случайных процессов” (В. И. Афанасьев). На отделении теоретической и прикладной лингвистики филологического факультета МГУ А. В. Прохоров читает курсы “Вероятностные модели”, “Математическая статистика” и “Теория информации и кодирования”. А. М. Райгородский читает курс “Комбинаторика” на факультете биоинженерии и биоинформатики МГУ. На основе читаемых курсов и семинарских занятий опубликованы учебные пособия “Введение в математическую статистику” (М. В. Козлов, А. В. Прохоров [1]), “Элементы теории вероятностей в примерах и задачах” (М. В. Козлов [2]), “Задачи по теории вероятностей” (А. В. Прохоров, В. Г. Ушаков, Н. Г. Ушаков [3]).

Особое внимание сотрудники кафедры уделяют дисциплинам специализации. На 3-м курсе обязательно годовому курсу “Дополнительные главы теории вероятностей” (А. М. Зубков, А. В. Шкляев) сопутствует семинар, цель которого — введение в специальность. Уже два десятилетия семинаром руководит М. Б. Лагутин, а написанное им учебное пособие “Наглядная математическая статистика” [4] выдержало уже 9 изданий. Также на 3-м курсе студенты кафедры осваивают практикум по теории вероятностей и математической статистике (А. В. Шкляев, О. С. Смирнова, Е. В. Хиль).

На старших курсах студентам рекомендуют курсы по выбору: “Дополнительные главы теории вероятностей. II” (М. В. Козлов), “Дополнительные главы математической статистики” (О. С. Смирнова), “Дополнительные главы теории случайных процессов” (В. И. Афанасьев, Е. Вл. Булинская). Для 4–6 курсов на кафедре читаются спецкурсы и работают научно-исследовательские семинары. В течение многих лет кафедру выбирают 25–30 студентов мехмата, желающих специализироваться в научных направлениях, которые развивают сотрудники кафедры. С 2019 г. кафедра организует систематические занятия со студентами, желающими осваивать прикладную статистику, и выбор этой формы научно-учебной работы оказался удачным.

При кафедре создан Научно-методический кабинет по прикладной статистике имени А. Н. Колмогорова, возглавляемый А. В. Прохоровым. В состав кабинета входят созданная А. Н. Колмогоровым библиотека вероятностно-статистической книжной и журнальной литературы с читальным залом и аудиторией, а также дисплейный класс для работы студентов.

Значительное внимание на кафедре всегда уделялось работе со студентами младших курсов. В разные годы для них работали просеминары и специальные семинары, где в доступной форме рассматривались задачи и методы теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов, а также родственные им задачи из других дисциплин. Опыт работы одного

из этих семинаров, существовавшего ряд лет на механико-математическом факультете и в физико-математической школе имени Колмогорова, был обобщен в книге, вошедшей в «Библиотечку “Кванта”» и выдержавшей уже пять изданий [5]. В настоящее время для студентов второго курса работает постоянный семинар под руководством к.ф.-м.н. М. В. Козлова, А. В. Шкляева, Г. А. Бакая.

На кафедре математической статистики и случайных процессов проводятся научные исследования по нескольким направлениям. Далее приводится краткий обзор некоторых полученных в последние годы результатов.

Математическая статистика. А. В. Прохоров с соавторами [6–8] исследовал способы характеристики вероятностных распределений для применений к задачам математической статистики, связанным с восстановлением неизвестных распределений по функциям от наблюдений. В частности, получены необходимые и достаточные условия единственности восстановления распределения по распределению линейной статистики и его устойчивости, достаточные условия однозначности и устойчивости восстановления распределения независимых слагаемых по распределению суммы и максимума, а также условия неоднозначности восстановления распределения независимых слагаемых по распределению их суммы. Совместно с аспирантом А. В. Савицким получено нетривиальное обобщение на многомерный случай известного результата Колмогорова–Зингера о характеристике нормального распределения распределением некоторой статистики [9].

Под руководством А. В. Прохорова, Е. В. Хиль и А. В. Шкляева студенты совместно проводят исследования по теоретической и прикладной статистике. Одно из направлений связано с критериями согласия, критериями принадлежности параметрическому семейству, критериями однородности и критериями независимости. Аспиранткой кафедры У. Буяловой предложен RQ-RQ-критерий, использующий новый подход к гипотезам согласия и однородности, модернизирующий классические подходы Колмогорова–Смирнова, Крамера–фон Мизеса, Андерсона–Дарлинга. Разрабатываются аналоги критериев хи-квадрат и более общих степенных критериев Кресси–Рида, которые используют не заранее фиксированные, а адаптивные способы дискретизации (разбиения наблюдений на конечное число групп).

Сходимость значений статистики Пирсона к квадрату процесса Бесселя доказана в работе А. М. Зубкова и М. П. Савелова [10], а естественная модификация хи-квадрат критерия однородности полиномиальных выборок — в работе А. М. Зубкова и Б. И. Селиванова [11]. Метод точного вычисления распределений разделимых статистик в полиномиальной схеме (в частности, статистики Пирсона) описан в работе А. М. Зубкова и М. В. Филиной [12].

При проверке качества выходных последовательностей генераторов случайных и псевдослучайных чисел, как правило, по этим последовательностям вычисляются статистики нескольких различных критериев, чтобы учесть различные виды отклонения качества выходных последовательностей от заданного. Вероятности ошибок при использовании таких “пакетов” критериев легко вычисляются, если считать, что статистики разных критериев независимы, однако вопрос об условиях справедливости такого предположения слабо изучен. В последние годы М. П. Савелов разработал метод, позволяющий указывать достаточные условия совместной асимптотической независимости статистик нескольких видов в схеме серий [13–16]. Он получил также решение экстремальной задачи для вероятностей ошибок критериев выбора из нескольких гипотез в случаях, когда заданы расстояния по вариации между гипотетическими распределениями [17], и двусторонние оценки суммы вероятностей ошибок [18].

Двусторонние оценки расстояния по вариации между совместными распределениями элементов выборки при двух разных гипотезах получены А. М. Зубковым [19, 20].

Вместе с А. Н. Колмогоровым в течение многих лет А. В. Прохоров занимался разработкой статистических и теоретико-информационных методов анализа в лингвистике и стиховедении [21–23]. В последние годы им подготовлены два тома “Избранных трудов” А. Н. Колмогорова, содержащие исследования в гуманитарных областях [24, 25].

Применениями методов математической статистики к задачам лингвистики занимается О. С. Смирнова [26–28]. Она же использовала методы многомерной классификации для прогнозирования самовозгорания угля в шахтах [29, 30].

Способы применения различных методов математической статистики и анализа данных (непараметрических методов, многомерных ранговых критериев, снижения размерности пространства признаков, кластер-анализа и классификации с обучением) к практическим задачам разрабатываются М. Б. Лагутиным. Он провел статистическую обработку результатов для 15 кандидатских и 3 докторские диссертации по медицинским наукам. В соавторстве с Н. И. Курышевой он опубликовал несколько работ о новых технологиях в диагностике глаукомы [31, 32]. Получен патент “Способ оценки риска развития периперационных сердечно-сосудистых осложнений при внесердечных хи-

ургических вмешательствах”. В соавторстве с Е. В. Будиловой опубликован ряд научных статей, посвященных, в частности, изучению связи демографических показателей здоровья населения и некоторых экологических факторов, проблем старения населения России, оценке индекса популяционного здоровья [33–35].

Теория случайных процессов. Научные интересы сотрудников кафедры в области случайных процессов в последние годы сосредоточились на двух связанных направлениях — случайные блуждания и ветвящиеся случайные процессы.

Для траекторий случайных блужданий с нулевым сносом, рассматриваемых при условии достижения ими высокого уровня, В. И. Афанасьев доказал функциональные предельные теоремы о сходимости к броуновскому прыжку в высоту и о сходимости к броуновской экскурсии [36]. Им доказаны также функциональные предельные теоремы для локальных времен целочисленных случайных блужданий, рассматриваемых либо при условии, что их остановка происходит после момента $n \rightarrow \infty$, либо при условии достижения уровня $n \rightarrow \infty$ [37, 38]. Для случайных блужданий в случайной среде В. И. Афанасьев изучал асимптотики вероятности достижения высокого уровня, времени достижения этого уровня, момента первого выхода из полосы [39, 40].

Для обобщенных процессов восстановления А. В. Шкляев и Г. А. Бакай получили локальные и интегролокальные предельные теоремы, включающие большие отклонения [41]. Г. А. Бакай разработал новый подход [42], который позволяет доказывать предельные теоремы, включающие большие отклонения, для регенерирующих последовательностей при простых условиях на производящую функцию моментов. Этим методом были получены аналогичные теоремы для случайных блужданий в случайной среде [43, 44]. Функциональные предельные теоремы для регенерирующих процессов при условии больших отклонений доказал А. В. Шкляев [45].

В. И. Афанасьев доказал функциональные предельные теоремы для критических и докритических ветвящихся процессов в случайной среде при условии достижения ими высокого уровня [46], а также для процессов с двумя типами частиц при различных условиях на полное число частиц первого или второго типа [47].

М. В. Козлов в статьях [48, 49], опубликованных в 2006 и 2009 гг., открыл новое направление в теории ветвящихся процессов в случайной среде — исследование вероятностей больших отклонений. В этих работах рассматривался лишь случай геометрического распределения числа потомков и было обнаружено, что существуют две зоны с разными асимптотиками вероятностей больших отклонений. А. В. Шкляев, Д. В. Дмитрущенко и К. Ю. Денисов распространили эти результаты на вероятности больших отклонений ветвящихся процессов в случайной среде с иммиграцией [50–52]. Зарубежными исследователями теоремы М. В. Козлова были распространены на логарифмические асимптотики вероятностей больших отклонений в общей модели ветвящихся процессов в случайной среде. Точные асимптотики вероятностей больших отклонений были независимо получены в 2018–2024 гг. А. В. Шкляевым и польскими математиками Д. Бурашевски, П. Дишевски. Разработанный А. В. Шкляевым подход [53, 54], основанный на введении подходящих цепей Маркова, применен к ряду других задач, в частности к ветвящимся процессам с частицами двух полов [55].

Аспирант И. Д. Коршунов исследовал вероятность вырождения нового варианта ветвящихся процессов в случайной среде с “замораживаниями”, когда состояния среды не изменяются в течение нескольких поколений, причем длительность “замораживаний” растет [56]. Аспирант В. В. Харламов получил ряд результатов при переходе от докритических ветвящихся процессов к критическим, в частности найдены условия на нестационарное возмущение среды, при которых изменяется порядок асимптотики вероятности невырождения [57].

Е. Вл. Булинская провела глубокие исследования каталитических ветвящихся случайных блужданий по многомерным решеткам, в которых размножение и гибель частиц возможны только в заранее выбранных узлах решетки (источниках). Проведены полная классификация каталитических ветвящихся процессов с произвольным конечным числом источников [58], асимптотический анализ моментов как общих, так и локальных численностей частиц, доказаны предельные теоремы (в сильной и слабой форме) для этих численностей [59]. Впервые найдена форма фронта распространения популяции частиц при растущем времени, описана ее зависимость от хвостов распределения скачков блуждания [60]. Доказаны предельные теоремы для ветвящихся случайных блужданий с бесконечным числом источников ветвления, расположенных периодически [61].

Вероятностно-комбинаторные задачи. А. М. Зубков совместно с учениками (В. О. Миронкин, А. А. Серов, П. В. Халипов) провел исследования различных характеристик случайных отображений конечных множеств: связанных компонент, отрезков апериодичности, сжатия образа при итерациях [62–65].

Совместно с А. А. Серовым им получено уточнение классической теоремы Муавра–Лапласа в виде двусторонних неравенств для функции распределения биномиального закона, в которых разность между верхней и нижней оценками в любой целочисленной точке не превышает скачка функции распределения в этой точке [66].

В статье О. П. Орлова и Н. Ю. Пасынкова [67] найдены точные совместные и предельные распределения чисел попаданий элементов последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин в промежутки между рекордами и рекордными моментами. О. П. Орлов нашел также предельные распределения минимальных расстояний между точками выборки в метрическом пространстве [68, 69] и доказал локальную предельную теорему для вероятностей больших отклонений в равновероятной схеме размещения частиц по ячейкам [70]. Эти результаты могут использоваться при построении статистических критериев.

Вероятностную структуру промежутков между локальными максимумами в последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин изучала Е. В. Хиль [71, 72].

А. М. Райгородский опубликовал большое число статей с соавторами по теории графов и гиперграфов, алгоритмам оптимизации, интегральным неравенствам, моделям социальных сетей и т.п.

Кафедра математической статистики и случайных процессов и существующая при ней лаборатория математической статистики позволяют студентам получить хорошую подготовку по теории вероятностей, математической статистике, теории случайных процессов и другим смежным дисциплинам. Ведущаяся сотрудниками кафедры в рамках различных семинаров научная работа открывает перед студентами большие возможности для выбора тем самостоятельных работ и приобретения опыта проведения исследований в области математической статистики, теории случайных процессов и их приложений. Специалист по математической статистике и теории случайных процессов может найти применение своим знаниям в разных областях практической деятельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов М.В., Прохоров А.В. Введение в математическую статистику. М.: Изд-во МГУ, 1987.
2. Козлов М.В. Элементы теории вероятностей в примерах и задачах. М.: Изд-во МГУ, 1990.
3. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей. 2-е изд. М.: МЦНМО, 2023.
4. Лагутин М.Б. Наглядная математическая статистика. 9-е изд. М.: Лаборатория знаний, 2024.
5. Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В. Введение в теорию вероятностей. 5-е изд. М.: МЦНМО, 2024 (Библиотечка “Квант”. Вып. 23).
6. Беломестный Д.В., Прохоров А.В. О задаче восстановления генерального распределения по распределению линейной статистики // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2003. № 2. 3–8.
7. Беломестный Д.В., Прохоров А.В. Устойчивость характеристики независимости случайных величин по независимости линейных статистик // Теория вероятн. и ее примен. 2014. **59**, № 4. 776–781.
8. Прохоров А.В., Ушаков Н.Г. О задаче восстановления распределения слагаемых по распределению суммы // Теория вероятн. и ее примен. 2001. **46**, № 3. 449–462.
9. Прохоров А.В., Савицкий А.В. Характеризующие статистики и их применения // Теория вероятн. и ее примен. 2021. **66**, № 3. 487–507.
10. Зубков А.М., Савелов М.П. Сходимость последовательности значений статистики Пирсона к квадрату нормированного процесса Бесселя // Дискретн. матем. 2016. **28**, № 3. 49–58.
11. Зубков А.М., Селиванов Б.И. Об одной статистике для проверки однородности полиномиальных выборок // Дискретн. матем. 2014. **26**, № 3. 30–44.
12. Зубков А.М., Филина М.В. Вычисление распределений статистик с помощью цепей Маркова // Дискретн. матем. 2020. **32**, № 4. 38–51.
13. Савелов М.П. Предельная теорема для сглаженного варианта спектрального критерия равновероятности двоичной последовательности // Дискретн. матем. 2021. **33**, № 4. 132–140.
14. Савелов М.П. Предельное совместное распределение статистик критериев приближенной φ -энтропии // Дискретн. матем. 2023. **35**, № 3. 60–70.
15. Савелов М.П. Предельное совместное распределение U -статистик, M -оценок и выборочных квантилей // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. № 6. 9–16.
16. Савелов М.П. Предельные совместные распределения статистик критериев пакета NIST и их обобщений // Дискретн. матем. 2024. **36**, № 2. 71–116.
17. Савелов М.П. Экстремальные характеристики критериев выбора гипотез с заданными попарными расстояниями по вариации // Теория вероятн. и ее примен. 2016. **61**, № 3. 439–463.
18. Савелов М.П. Двусторонние оценки суммы вероятностей ошибок в задаче о различении конечного числа гипотез о неоднородной выборке // Теория вероятн. и ее примен. 2024. **69**, № 2. 405–416.

19. *Зубков А.М.* Новые оценки расстояния по вариации между двумя распределениями выборки // Матем. вопросы криптогр. 2018. **9**, № 3. 45–60.
20. *Зубков А.М.* Оценки расстояния по вариации между распределениями двух наборов независимых случайных величин // Матем. вопросы криптогр. 2020. **11**, № 3. 21–29.
21. *Прохоров А.В.* Статистический анализ стихотворного текста // Славянский стих. Т. IX. М.: Рукописные памятники Древней Руси, 2012. 465–481.
22. *Колмогоров А.Н., Прохоров А.В.* Статистические методы исследования ритма стихотворной речи. Опыт расчета и сравнения моделей ритма // *Колмогоров А.Н.* Труды по стиховедению. М.: Из-во МЦНМО, 2015. 181–214.
23. *Прохоров А.В.* Распределение междударных интервалов // М.Л. Гаспарову-стиховеду. In memoriam. М.: Изд. дом ЯСК, 2017. 34–57.
24. *Колмогоров А.Н.* Об истории, филологии, кибернетике / Ред.-сост. А.В. Прохоров. М.: Изд-во МЦНМО, 2023.
25. *Колмогоров А.Н.* Труды по стиховедению / Ред.-сост. А.В. Прохоров. М.: Изд-во МЦНМО, 2015.
26. *Кривнова О.Ф., Смирнова О.С.* База дискурсивных признаков словораздела в устной русской речи: структура, состав и опыт применения // Компьютерная лингвистика и интеллектуальные технологии. Т. 17. М.: РГГУ, 2018. 363–374.
27. *Kruglova A., Smirnova O., Skulacheva T.* Syntax and Pauses in a Verse Line: Statistical Analysis // Quantitative Approaches to Versification. Institute of Czech Literature of the Czech Academy of Sciences, 2019. 113–124.
28. *Кривнова О.Ф., Смирнова О.С.* Текстовые характеристики словораздела в устной речи: база данных как инструмент прогнозирования просодического членения звучащего текста // Фонетика в современной лингвистической парадигме. Минск: Изд-во МГЛУ (Минский государственный лингвистический университет), 2021. 48–53.
29. *Гольнская Ф.А., Смирнова О.С.* Особенности самовозгораемости бурых углей Канско-Ачинского бассейна и перспективы ее прогноза методом многомерной классификации по эталонным точкам на примере угольного пласта “Березовский” разреза “Березовский Г” // Разведка и охрана недр. 2019. № 4. 57–60.
30. *Гольнская Ф.А., Смирнова О.С., Никонов Р.А.* Особенности применения метода многомерной классификации по эталонным точкам для определения степени самовозгораемости бурых углей на примере Харанорского бурогоугольного месторождения (Забайкалье) // Горн. информ.-анал. бюл. 2017. № 9. 5–12.
31. *Курьшьева Н.И., Паршунина О.А., Арджевнишвили Т.Д., Иртегова Е.Ю., Киселева Т.Н., Лагутин М.Б.* Поиск новых маркеров в ранней диагностике первичной открытоугольной глаукомы // Рос. офтальм. журн. 2015. **8**, № 3. 23–30.
32. *Курьшьева Н.И., Паршунина О.А., Арджевнишвили Т.Д., Иртегова Е.Ю., Киселева Т.Н., Лагутин М.Б., Фомин А.В.* Новые технологии в диагностике первичной открытоугольной глаукомы // Нац. журн. “Глаукома”. 2015. **14**, № 2. 22–31.
33. *Будилова Е.В., Лагутин М.Б., Мигранова Л.А.* Влияние демографических и социально-экономических факторов на популяционное здоровье населения // Народонаселение. 2019. № 3. 80–92.
34. *Будилова Е.В., Лагутин М.Б.* Загрязнение атмосферного воздуха и демографические показатели здоровья в городах России // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 23: Антропология. 2021. № 4. 81–99.
35. *Будилова Е.В., Лагутин М.Б.* Социально значимые заболевания в России: территориальные кластеры и факторы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 23: Антропология. 2021. № 2. 87–101.
36. *Афанасьев В.И.* Функциональная предельная теорема для остановленного случайного блуждания, достигающего высокого уровня // Дискретн. матем. 2016. **28**, № 3. 3–13.
37. *Афанасьев В.И.* Функциональная предельная теорема для локального времени остановленного случайного блуждания // Дискретн. матем. 2019. **31**, № 1. 7–20.
38. *Афанасьев В.И.* О локальном времени остановленного случайного блуждания, достигающего высокого уровня // Тр. Матем. ин-та РАН. 2022. **316**. 11–31.
39. *Афанасьев В.И.* Двуграничная задача для случайного блуждания с ограничением на максимальное приращение // Дискретн. матем. 2019. **31**, № 3. 3–16.
40. *Афанасьев В.И.* О моментах достижения высоких уровней случайным блужданием в случайной среде // Теория вероятн. и ее примен. 2020. **65**, № 3. 460–478.
41. *Бакай Г.А., Шкляев А.В.* Большие уклонения обобщенного процесса восстановления // Дискретн. матем. 2019. **31**, № 1. 21–55.
42. *Бакай Г.А.* О характеристике вероятностей больших уклонений для регенерирующих последовательностей // Тр. Матем. ин-та РАН. 2022. **316**. 47–63.
43. *Бакай Г.А.* О больших уклонениях момента достижения далекого уровня случайным блужданием в случайной среде // Дискретн. матем. 2022. **34**, № 4. 3–13.

44. Бакай Г.А. Большие отклонения момента достижения далекого нижнего уровня случайным блужданием в случайной среде // Дискретн. матем. 2023. **35**, № 4. 3–17.
45. Шкляев А.В. Условная функциональная предельная теорема для случайной рекуррентной последовательности при условии совершения ею большого отклонения // Теория вероятн. и ее примен. 2024. **69**, № 1. 125–147.
46. Афанасьев В.И. Функциональные предельные теоремы для высокоуровневых докритических ветвящихся процессов в случайной среде // Дискретн. матем. 2015. **27**, № 2. 22–44.
47. Афанасьев В.И. Функциональные предельные теоремы для разложимого ветвящегося процесса с двумя типами частиц // Дискретн. матем. 2014. **26**, № 2. 6–24.
48. Козлов М.В. О больших отклонениях ветвящихся процессов в случайной среде: геометрическое распределение числа потомков // Дискретн. матем. 2006. **18**, № 2. 29–47.
49. Козлов М.В. О больших отклонениях строго докритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков // Теория вероятн. и ее примен. 2009. **54**, № 3. 439–465.
50. Дмитриуценков Д.В. О больших отклонениях ветвящегося процесса в случайной среде с иммиграцией в моменты вырождения // Дискретн. матем. 2014. **26**, № 4. 36–42.
51. Дмитриуценков Д.В., Шкляев А.В. Большие отклонения ветвящихся процессов с иммиграцией в случайной среде // Дискретн. матем. 2016. **28**, № 3. 28–48.
52. Денисов К.Ю. Локальная асимптотика вероятностей нижних отклонений строго надкритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическими распределениями чисел потомков // Дискретн. матем. 2022. **22**, № 4. 14–27.
53. Шкляев А.В. Большие отклонения ветвящегося процесса в случайной среде. I // Дискретн. матем. 2019. **31**, № 4. 102–115.
54. Шкляев А.В. Большие отклонения ветвящегося процесса в случайной среде. II // Дискретн. матем. 2020. **32**, № 1. 135–156.
55. Шкляев А.В. Большие отклонения ветвящегося процесса с частицами двух полов в случайной среде // Дискретн. матем. 2023. **35**, № 3. 125–142.
56. Коршунов И.Д. Ветвящиеся процессы в случайной среде с замораживаниями // Дискретн. матем. 2023. **35**, № 3. 20–36.
57. Харламов В.В. Асимптотика вероятности невырождения почти критических ветвящихся процессов в случайной среде // Матем. сб. 2024. **215**, № 1. 131–152.
58. Булинская Е.Вл. Полная классификация каталитических ветвящихся процессов // Теория вероятн. и ее примен. 2014. **59**, № 4. 639–666.
59. Булинская Е.Вл. Предельные распределения численностей частиц в ветвящемся случайном блуждании // Матем. заметки. 2011. **90**, № 6. 845–859.
60. Булинская Е.Вл. Распространение фронта ветвящегося случайного блуждания с периодическими источниками ветвления // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2024. № 1. 31–40.
61. Булинская Е. Вл. Распространение ветвящегося случайного блуждания на периодических графах // Тр. Матем. ин-та РАН. 2024. **324**. 73–82.
62. Зубков А.М., Серов А.А. Предельная теорема для мощности образа подмножества при композиции случайных отображений // Дискретн. матем. 2017. **29**, № 1. 17–26.
63. Зубков А.М., Миронкин В.О. Распределение длины отрезка аperiodичности в графе k -кратной итерации случайного равновероятного отображения // Матем. вопросы криптогр. 2017. **8**, № 4. 63–74.
64. Зубков А.М., Серов А.А. Оценки среднего размера образа подмножества при композиции случайных отображений // Дискретн. матем. 2018. **30**, № 2. 27–36.
65. Зубков А.М., Халитов П.В. Вероятность принадлежности нескольких вершин одной связной компоненте случайного равновероятного отображения // Дискретн. матем. 2022. **34**, № 4. 28–35.
66. Зубков А.М., Серов А.А. Полное доказательство универсальных неравенств для функции распределения биномиального закона // Теория вероятн. и ее примен. 2012. **57**, № 3. 597–602.
67. Орлов О.П., Пасынков Н.Ю. Распределения межрекордных наполнений // Дискретн. матем. 2015. **27**, № 3. 56–73.
68. Зубков А.М., Орлов О.П. Предельные распределения экстремальных расстояний до ближайшего соседа // Дискретн. матем. 2017. **29**, № 2. 3–17.
69. Орлов О.П. Предельные распределения максимального расстояния до ближайшего соседа // Дискретн. матем. 2018. **30**, № 3. 88–98.
70. Орлов О.П. Локальная предельная теорема для числа пустых ячеек при случайных равновероятных размещениях // Дискретн. матем. 2021. **33**, № 4. 83–93.
71. Зубков А.М., Харитонова Н.А., Хиль Е.В. Расстояние между локальными максимумами в последовательностях случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 2011. **56**, № 4. 690–703.