СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры. М.: МЦНМО, 2020.
2. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра. М.: МЦНМО, 2021.
3. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры алгебры. М.: МЦНМО, 2018.
4. *Винберг Э.Б.* Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2024.
5. Сборник задач по алгебре / Под ред. А.И. Кострикина. М.: МЦНМО, 2015.

Поступила в редакцию
05.07.2024

УДК 517.938

О КАФЕДРЕ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О. Н. Агеев[1], И. А. Богаевский[2], А. А. Давыдов[3]

В статье кратко излагается истории кафедры теории динамических систем, освещаются направления исследований, проводимых ранее на кафедре и ведущихся в настоящее время, а также достигнутые в этих направлениях результаты.

Ключевые слова: динамические системы, особенности, нормальные формы.

The article briefly outlines the history of the Chair of Theory of Dynamical Systems, highlights the areas of research conducted at the Chair and currently underway, as well as the results achieved in these areas.

Key words: dynamical systems, singularities, normal forms.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-66-1-3

Теория динамических систем — это активно развивающаяся область современной математики, зарождавшаяся как естественная часть теории дифференциальных уравнений при исследовании известных проблем механики и статистической физики (как задача n тел, или эргодическая гипотеза). Позднее в работах Пуанкаре, Ляпунова и Биркгофа она развилась в самостоятельную ветвь математики, достижения в которой находят успешное применение как в других областях математики (например, в теории чисел, о чем скажем ниже), так и в других науках при анализе математических моделей процессов различной природы.

Современная теория динамических систем изучает не только статистические и иные свойства траекторий дифференциального уравнения, но и более общие группы преобразований абстрактного фазового пространства. Ее характерной особенностью стало удивительное соседство фундаментальных классических вопросов и абстрактных теорий, привлекающих все многообразие современных математических методов — от анализа и глобального анализа, вероятности, топологии и геометрии до алгебры и комбинаторики.

В этом контексте создание в 2000 г. кафедры теории динамических систем на механико-математическом факультете было и естественным откликом на бурное развитие данной области математики

[1] *Агеев Олег Николаевич* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории динамических систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ageevolegs@gmail.com.

Ageev Oleg Nikolaevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Dynamical Systems.

[2] *Богаевский Илья Александрович* — доктор физ.-мат. наук, пригл. проф. Изр. технол. ин-та “Гуандун Технион”, Китай; ст. науч. сотр. НИИ системных исследований РАН, e-mail: ibogaevsk@gmail.com.

Bogaevskii Ilya Aleksandrovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Visiting Professor, Guangdong Technion – Israel Institute of Technology, China; Senior Research Scientist, Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences.

[3] *Давыдов Алексей Александрович* — доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. теории динамических систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: davydov@mi-ras.ru.

Davydov Alexey Alexandrovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Head of the Chair of Theory of Dynamical Systems.

в XX веке, и как следствие назревшим естественным шагом в развитии структуры факультета. В создании и формировании кафедры основную роль сыграл классик современной теории динамических систем академик Дмитрий Викторович Аносов при поддержке и активном участии выдающегося математика XX века академика Андрея Андреевича Болибруха. Д. В. Аносов (1936–2014) руководил кафедрой со дня ее создания и до конца своей жизни. В эти годы Дмитрий Викторович помимо научной работы много и плодотворно занимался популяризацией математики в целом и теории динамических систем в частности. Из его последних работ отметим доказательство того, что в любой окрестности нуль-мерного компактного гиперболического множества существует содержащее его локально максимальное множество [1]. Для положительных размерностей такого множества может и не быть. Также было показано, что локальная максимальность самого этого множества (при наличии локально максимального множества в любой его окрестности) определяется внутренней динамикой на нем [2]. Андрей Андреевич Болибрух (1951–2003) работал на кафедре около четырех лет. Новый взгляд на, казалось бы, давно решенную 21-ю проблему Римана–Гильберта позволил ему построить контрпримеры в размерностях 3 и 4 к гипотезе Гильберта. Им было доказано, что любые данные монодромии с неприводимым набором матриц могут быть реализованы в качестве данных монодромии некоторой фуксовой системы. Как подтверждение обобщенной проблемы Римана–Гильберта в важных частных случаях были даны достаточные условия существования линейных систем дифференциальных уравнений, в которых допускается наличие конечного числа особенностей не только фуксова типа [3].

После Дмитрия Викторовича Аносова кафедру возглавил профессор А. А. Давыдов. В разные годы на кафедре также работали И. А. Богаевский, А. Д. Брюно, Р. И. Григорчук, Н. В. Денисова, А. Ю. Жиров, В. М. Закалюкин, М. Е. Липатов, А. А. Приходько, Г. С. Чакветадзе, И. Д. Шкредов. В настоящее время преподавательскую деятельность на кафедре ведут профессора А. А. Давыдов, Д. В. Туницкий и Ю. Л. Сачков, доценты О. Н. Агеев и Е. А. Асташов (заместитель заведующего кафедрой) и к.ф.-м.н. А. В. Дуков. Кафедра теории динамических систем читает базовые курсы обыкновенных дифференциальных уравнений на механико-математическом факультете МГУ на дневном и вечернем отделениях, межфакультетский курс “Динамические системы” и целый ряд специальных курсов, связанных или с дополнительными главами читаемых дисциплин, или с тематикой научных исследований, ведущихся на кафедре. Работают научный семинар кафедры и просеминар кафедры для студентов младших курсов. Для более точного представления о тематиках спецкурсов и направленности семинаров расскажем об исследованиях, которые велись в различные годы на кафедре или проводятся в настоящее время.

Одно из направлений исследований на кафедре — это эргодическая теория, которая находится в фокусе научных исследований сотрудников кафедры с момента ее создания. Эта теория объясняет, откуда берутся хаос и случайность в динамических системах, имеющих по своей природе чисто детерминированный характер. Один из основных фактов этой теории, превратившийся в настоящее время в целое направление, — эргодическая теорема — утверждает существование предела усреднений функции вдоль траектории динамической системы (очень частным случаем эргодической теоремы является закон больших чисел теории вероятностей, например частота выпадения орла при подбрасывании “правильной” монетки стремится к $1/2$ с вероятностью 1). В этом направлении М. Е. Липатовым были получены естественные уточнения в вопросе о сходимости в мультипликативной эргодической теореме для измеримых коциклов над потоками — сходимость средних имеет место на множестве значений времени плотности 1 и даже вне множества на временной оси, которое можно выбрать сколь угодно малой лебеговой меры [4], а Г. С. Чакветадзе для двухпараметрического семейства одномерных динамических систем (заданных некоторыми рациональными функциями), моделирующего эволюцию кавитации Фабри–Перо в лазерах, было установлено наличие зон в пространстве параметров, отвечающих как динамически тривиальному, так и хаотическому поведению системы, а также доказано наличие конечной абсолютно непрерывной инвариантной меры для этих систем на множестве пар параметров положительной лебеговой меры возле выделенных точек в пространстве параметров, отвечающих топологически интересным динамическим системам [5].

О. Н. Агеевым были изучены расширения динамических систем с действия подгруппы на действие всей группы, точнее возможности такого расширения для типичной динамической системы до системы как действия всей группы, до типичной системы, а также наследование при этом разнообразных динамических свойств. Оказалась, что все определяется принадлежностью пары — подгруппа и группа — к определенному списку, который был получен в классе счетных абелевых групп, а также была показана независимость списка от наследуемого при расширении динамического свойства [6]. При анализе известной проблемы о возможном наборе значений функции кратности спектра эргодического преобразования пространства Лебега О. Н. Агеевым начато изучение потенциально интересного класса декартовых произведений, снабженных инвариантной мерой с конечнослойным носителем. В силу внутренней геометрии и симметрии такие преобразования имеют непростой спектр, который типично является конечнократным. О. Н. Агеев показал, что преобразования Робинсона допускают реализацию такими динамическими системами.

Наконец, А. А. Приходько были получены некоторые продвижения в задачах о возможности динамических систем иметь простой лебеговский спектр [7]. Здесь следует отметить, что классическая задача Банаха о существовании преобразования пространства Лебега с конечной не дискретной мерой, имеющего простой лебеговский спектр, еще не решена и можно решать аналоги задачи Банаха, варьируя пространство с мерой и действия групп, отличных от целочисленных решеток. А. А. Приходько для преобразований орнстейновского типа, естественно определяемого бесконечным числом конечных наборов вставок, доказал сингулярность спектра для почти каждого набора по любой вероятностной мере, являющейся произведением конечных дискретных мер на этих наборах [8]. Тем самым получено еще одно естественное обобщение теоремы Бургена.

Другое направление научных исследований сотрудников кафедры — это теория особенностей и ее приложения. Теория особенностей — это область математики, в которой изучают строение кривых, поверхностей, отображений и других объектов в окрестности их нетипичных точек, например точек, где кривая, поверхность или отображение устроены "не общим" образом, не так, как почти всюду (скажем, поверхность не имеет однозначно определенного касательного пространства). Эта наука лежит на стыке различных областей математики — математического анализа, алгебры, топологии, геометрии, теории динамических систем — и нередко позволяет установить связь, невидимую на первый взгляд, между объектами или явлениями совершенно различной природы. Результаты и методы теории особенностей находят свое применение при решении задач физики, экономики, биологии, медицины и др. В этой области математики работают Е. А. Асташов, И. А. Богаевский и А. А. Давыдов — представители всемирно известной научной школы академика В. И. Арнольда. Их исследования связаны с развитием методов теории особенностей и их приложениями в теории динамических систем, оптимальном управлении, теории дифференциальных уравнений и математической физике. Ярким представителем этой школы был профессор Владимир Михайлович Закалюкин (1951–2011), заместитель заведующего кафедрой со дня ее основания в 2000 г. до своей скоропостижной кончины.

Владимир Михайлович активно занимался теорией каустик и волновых фронтов, исследованием особенностей решений экстремальных задач и задач оптимального управления, изучением особенностей выпуклых оболочек. Каустики — это гиперповерхности в конфигурационном пространстве, образованные критическими значениями проектирования (возможно, негладкого) лагранжева подмногообразия фазового пространства. Например, оптические каустики состоят из точек фокусировки световых лучей и наблюдаются как поверхности или линии повышенной яркости. Много лет назад Владимир Михайлович предложил шутливую гипотезу о том, что летающие тарелки — это каустики характерной формы, описанной В. И. Арнольдом в его работе по классификации их перестроек. Однако позже выяснилось, что оптические каустики такой формы невозможны, но встречаются в других теориях, объясняющих явления внешнего мира (например, форму галактик). В. М. Закалюкин получил сильные результаты о каустиках и фронтах особых лагранжевых и лежандровых подмногообразий. Наиболее известные примеры особых лагранжевых и лежандровых подмногообразий, которыми интересовался В. М. Закалюкин и которые часто встречаются в приложениях, — это раскрытые ласточкины хвосты и раскрытые зонтики Уитни. В 1988 г. В. И. Арнольд описал еще одно универсальное особое лежандрово подмногообразие, не являющееся алгебраическим, в отличие от раскрытых ласточкиных хвостов и зонтиков Уитни. Совершенно неожиданно оказалось, что это подмногообразие естественным образом возникает в теории графена и описывает квазиклассические асимптотики превращения электронов в дырки и наоборот. Сегодня эта тематика развивается в исследованиях профессора И. А. Богаевского в тесном сотрудничестве с лабораторией механики природных катастроф ИПМех РАН. Недавно им совместно с М. Руло была получена нормальная форма типичной перестройки фазы асимптотического решения уравнения Гельмгольца с локализованной правой частью при проходе уровня энергии через критический [9].

Одно из важных направлений теории особенностей — это классификации типичных объектов и получение их наиболее простых (нормальных) форм относительно разрешенных групп преобразований, а также анализ влияния этих нормальных форм на интересующие исследователей свойства изучаемых объектов. Хорошо известна классификация линейных автономных векторных полей на плоскости относительно линейных замен координат. Результаты исследований, проводимых на кафедре, схожи по характеру, но отличаются сутью изучаемых объектов и группами разрешенных преобразований. В последние годы сотрудниками кафедры изучались особенности ростков функций, обладающих различными группами симметрий, особенности дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными, и их решений при наличии тех или иных свойств у самих уравнений, изучалась возможность оптимизации динамики различных управляемых систем, а также анализировалась устойчивость свойств управляемости этих систем относительно их малых возмущений. По этим направлениям исследований отметим следующие научные результаты, полученные сотрудниками кафедры лично или в соавторстве с коллегами.

В области математической теории управления, субримановых и сублоренцевых структур получена классификация типичных особенностей границы множества локальной транзитивности для управляемых систем на трехмерных многообразиях с невыпуклыми индикатрисами (В. М. Закалюкин совместно с А. Н. Курбацким для случая гладко вложенных индикатрис [10, 11] и совместно с А. А. Давыдовым в общем случае [12]), доказана структурная устойчивость управляемости типичных простейших динамических неравенств на двумерной сфере (А. А. Давыдов и Ю. А. Скиндер [13]), были найдены конформные локальные нормальные формы типичных сублоренцевых структур в четырехмерном пространстве и асимптотики в особых точках сфер и фронтов плоских субримановых структур на распределениях Мартине и Энгеля (И. А. Богаевский [14, 15]).

Активные исследования на кафедре ведутся по изучению особенностей дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной (неявных). Постановка задачи получения нормальных форм таких уравнений восходит к конкурсу короля Оскара II (см. "Acta Matematica", 1885 г.), на котором одной из проблем было описание кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, что включает и изучение кривых, доставляемых неявными уравнениями. Частный случай этой проблемы — задача получения локальных и нелокальных нормальных форм семейства характеристик типичного линейного уравнения с частными производными второго порядка на плоскости, где классическими результатами являются локальные канонические формы уравнения Лапласа и волнового уравнения. Локальную нормальную форму для другого типичного случая получили известные итальянские математики Ф. Трикоми и М. Чибрарио в начале прошлого века, а окончательный результат здесь был получен уже в конце прошлого века А. А. Давыдовым (1985, случай линеаризуемых сложенных особых точек [16]) и им же совместно с Э. Росалесом-Гонсалесом (1995, случай сложенных резонансных седел и узлов [17]), что завершило локальную классификацию главных символов типичных линейных уравнений с частными производными второго порядка на плоскости. В случае типичных однопараметрических семейств таких уравнений неустранимым образом встречаются вырожденные сложенные особые точки и морсовские перестройки линии смены типа уравнений семейства, при этом картина семейства характеристик уравнения, вообще говоря, перестраивается. Здесь для типичных однопараметрических семейств формальные нормальные формы морсовских перестроек были предложены И. А. Богаевским [18] и конечно гладкие формы ряда случаев для сложенных особых точек были найдены А. А. Давыдовым совместно с Л. Чинь Тхи Зиеп [19]. Как отмечено выше, в 2019 г. А. А. Давыдовым совместно с Ю. А. Скиндер была доказана структурная устойчивость простейших динамических неравенств на двумерной сфере и тем самым структурная устойчивость семейств характеристик типичных линейных уравнений второго порядка смешанного типа на сфере (или на плоскости с конечной областью гиперболичности) для открытых областей в пространстве главных символов таких уравнений. Этот результат ставит естественную задачу о такой устойчивости для типичных уравнений на двумерной сфере (а также на двумерном торе и др.) или на плоскости с конечной областью гиперболичности и о поиске подходящих нелокальных нормальных форм таких уравнений и их инвариантов. Первое продвижение в этом направлении было сделано Ю. А. Кастен [20] и ею же совместно с А. А. Давыдовым [21, 22].

В теории особенностей дифференцируемых отображений поиск нормальных форм объектов, в том числе при наличии различных ограничений или на сами объекты, или на разрешенные группы их преобразований, по-прежнему сохраняет актуальность в этой области науки и высокую востребованность в прикладных исследованиях. В последние годы в этой тематике Е. А. Асташовым были найдены достаточные условия отсутствия ростков аналитических функций многих переменных, эквивариантно простых относительно действий конечных циклических групп [23], и им же совместно с Н. Т. Абдрахмановой была получена классификация простых ростков аналитических функций, четных или нечетных по каждой переменной [24], а также классификация простых кососимметричных матричных семейств с четной/нечетной зависимостью от параметров и некоторыми условиями на размер матрицы, число параметров и ранг 1-струи [25].

Молодой и активно развивающейся областью математики является аддитивная комбинаторика, которая находится на стыке теории чисел и комбинаторики и интенсивно использует инструменты из гармонического анализа, теории графов, эргодической теории, теории вероятностей, алгебраической геометрии, топологии и геометрии чисел. Основной предмет данной науки — это всевозможные комбинаторные утверждения, в формулировке которых присутствуют операции сложения или умножения. Например, что можно сказать о свойствах множества $A+A$ (множества всевозможных попарных сумм), зная свойства множества A, и наоборот? Верно ли, что, как бы мы ни раскрашивали натуральные числа в конечное число цветов, у уравнения $x+y=z$ найдется решение, такое, что x, y и z будут одного цвета? Как можно легко доказать, что любое число представимо в виде суммы некоторого фиксированного количества простых чисел и единицы? Все эти и многие другие вопросы изучает эта замечательная наука.

Много лет на кафедре работал известный специалист по аддитивной комбинаторике и теории чисел член-корреспондент РАН И. Д. Шкредов, автор целого ряда научных результатов, получивших международное признание. К числу его основных научных достижений, полученных во время работы на кафедре, относятся следующие результаты. Впервые И. Д. Шкредов дал точную оценку на плотность множества без решений аффинного линейного уравнения (совместно с Т. Шоеном) [26], предъявил конкретное алгебраическое уравнение с минимальным числом переменных [27], разрешимое для любых достаточно больших подмножеств конечного поля, а также получил самый общий точный результат о строении множеств больших тригонометрических сумм [28, 29]. Совместно с Т. Шоеном [30] и С. Еханиным [31] он ввел понятие аддитивной размерности множества и выполнил систематическое исследование данного объекта, его связи с суммами, аддитивными энергиями и т.д.

И. Д. Шкредов вместе с С. В. Конягиным решил (с точностью до константы) задачу Ж.-П. Кахана о количественной форме теоремы Берлинга–Хелсона [32]. Данный вопрос был задан Каханом на Международном математическом конгрессе в Швеции в 1962 г. Также вместе с С. В. Конягиным и другими соавторами [33–35] им получены наилучшие на сегодняшний день результаты в вопросах сумм-произведений как в вещественном поле, так и в конечных полях, найдены новые приложения данных результатов, которые связаны с криптографией, теоретической информатикой, теорией чисел, динамическими системами и др. Им также решена задача Эрдеша–Шаркози о непредставимости в виде разности произвольной достаточно малой мультипликативной подгруппы поля [36].

И. Д. Шкредовым разработан новый метод в аддитивной комбинаторике — метод старших энергий и старших сумм (см., например, [37, 38]). Этот подход позволил получить ряд новых результатов в различных областях математики: в аддитивной комбинаторике (структурные теоремы для множеств с малым удвоением, оценки энергий и сумм множеств различных комбинаторных семейств, декомпозиционные результаты), в теории чисел (новые оценки тригонометрических сумм по мультипликативным подгруппам поля, оценки тригонометрической суммы Хейльбронна, результаты по распределению частных Ферма), в теории сумм-произведений (оценки в вещественном и простом полях), в геометрии инциденций (выпуклые множества, единичные площади) и в теории динамических систем (структура множеств возвращаемости) (см. обзор [38]).

В последнее время И. Д. Шкредов активно занимался исследованиями в области мультипликативной комбинаторики (аддитивной комбинаторики для некоммутативных групп), а также задачами теории чисел, теории динамических систем и классического анализа (см., например, обзор [39]). С помощью этого нового подхода им и его соавторами было получено продвижение в проблеме Зарембы о цепных дробях (улучшение классической границы Коробова [40], оптимальное неравенство для модульной формы гипотезы Зарембы над конечным алфавитом хаусдорфовой размерности более 0.5) [41], в задаче об оценке билинейных сумм Клоостермана [42], а также в классических вопросах о числе аффинных отображений в евклидовой плоскости [43].

Сотрудники кафедры регулярно проводят исследования в рамках различных программ развития науки и ее финансовой поддержки, в том числе по совместным проектам с зарубежными учеными. Среди последних — российско-японский проект по теории особенностей и ее приложениям, а также проект РНФ по качественному анализу динамики распределенных гетерогенных систем и оптимизации этой динамики при наличии, скажем, эксплуатации распределенного возобновляемого ресурса. В рамках последнего проекта были получены новые фундаментальны результаты в исследовании модели Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера, в том числе на гладких компактных многообразиях, включая случаи двумерной сферы, ясным прототипом которой является поверхность Земли, и тора, естественно появляющегося как факторпространство при анализе моделей в периодических средах. В частности, было показано, что при стационарной или периодической эксплуатации ресурса его динамика стремится к решению — аттрактору, а тогда оптимизация динамики по функционалу среднего временного сбора сводится к оптимизации этого аттрактора (А. А. Давыдов и Д. В. Туницкий, в том числе совместно с А. О. Беляковым, Е. В. Винниковым и Д. А. Мельник [44–48]). Было показано, что соответствующее оптимальное решение существует. В настоящее время исследования здесь продолжаются для случая нелокальной модели такого типа, в которой коэффициенты члена реакции зависят или от общего объема имеющегося ресурса, или от интеграла от произведения плотности ресурса с некоторым ядром (см. [49]). В этом случае анализ динамики плотности ресурса становится существенно сложнее, как и задача оптимизации этой динамики.

Авторы выражают благодарность Е. А. Асташову и И. Д. Шкредову за помощь при подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аносов Д.В.* Расширение нульмерных гиперболических множеств до локально максимальных // Матем. сб. 2010. **201**, № 7. 3–14.
2. *Аносов Д.В.* Локальная максимальность гиперболических множеств // Современные проблемы математики, Тр. Матем. ин-та РАН. 2011. **273**. 28–29.
3. *Bolibruch A.A., Malekk S., Mitschi C.* On the generalized Riemann–Hilbert problem with irregular singularities // arXiv: math/0410483v1 [math. CA] 2004, 1–39.
4. *Липатов М.Е.* Об асимптотическом поведении коциклов над потоками // Тр. Моск. матем. о-ва. 2021. **82**, № 1. 175–184.
5. *Чакветадзе Г.С.* Топологические и метрические свойства одномерной динамической системы из лазерной физики // Матем. сб. 2002. **193**, № 8. 101–140.
6. *Ageev O.N.* On extensions of typical group actions // arXiv: 1212.2660v1 [math. DS] 2012, 1–30.
7. *Приходько А.А.* Полиномы Литлвуда и их приложения к спектральной теории динамических систем // Матем. сб. 2013. **204**, № 6. 135–160.
8. *El Abdalaoui E.H., Parreau F., Prikhod'ko A.A.* A new class of Ornstein transformations with singular spectrum // Ann. Inst. H. Poincaré B. Probability and Statistics. 2006. **42**, N 6. 671–681.
9. *Bogaevskii I.A., Rouleux M.* Lagrangian intersections and glancing points: typical transitions of phase in semiclassical approximations // 2023 Days on Diffraction (DD), Saint Petersburg, Russian Federation, 2023. 12–18.
10. *Закалюкин В.М., Курбацкий А.Н.* Особенности огибающих семейств плоскостей в теории управления // Тр. Матем. ин-та РАН. 2008. **262**. 73–86.
11. *Закалюкин В.М., Курбацкий А.Н.* Выпуклые оболочки поверхностей с краем и углами и особенности зоны транзитивности в R^3 // Тр. Матем. ин-та РАН. 2010. **268**. 284–303.
12. *Давыдов А.А., Закалюкин В.М.* Управляемость нелинейных систем: типичные особенности и их устойчивость // Успехи матем. наук. 2012. **67**, № 2(404). 65–92.
13. *Davydov A., Skinder Yu.* On structural stability of dynamic inequalities // AIP Conf. Proc. 2019. 2172:030017. 1–5.
14. *Богаевский И.А.* Асимптотики фронта плоской субримановой структуры на распределении Энгеля // Тр. Матем. ин-та РАН. 2023. **321**. 62–76.
15. *Богаевский И.А.* Асимптотики сферы и фронта плоской субримановой структуры на распределении Мартине // Матем. сб. 2022. **213**, № 5. 50–67.
16. *Давыдов А.А.* Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки // Функц. анализ и его прил. 1985. **19**, № 2. 1–10.
17. *Давыдов А.А., Росалес-Гонсалес Э.* Полная классификация типичных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными на плоскости // Докл. РАН. 1996. **350**, № 2. 151–154.
18. *Богаевский И.А.* Неявные обыкновенные дифференциальные уравнения: перестройки и усиление эквивалентности // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. **78**, № 6. 5–20.
19. *Давыдов А.А., Чинь Тхи Зиеп Л.* Нормальные формы семейств линейных уравнений смешанного типа вблизи нерезонансных сложенных особых точек // Успехи матем. наук. 2010. **65**, № 5 (395). 189–190.
20. *Kasten J.A.* Solvability of the boundary value problem for a Tricomi type equation in the exterior of a disk // J. Math. Sci. 2013. **188**, N 3. 268–272.
21. *Davydov A.A., Kasten J.A.* On nonlocal normal forms of linear second order mixed type PDEs on the plane // Control Systems and Mathematical Methods in Economics., Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 2018. Vol. 687 / Ed. by G. Feichtinger, R. Kovacevic, G. Tragler. Springer, 2018. 15–25.

22. *Давыдов А.А., Кастэн Ю.А.* О структурной устойчивости сетей характеристик и задаче Коши для уравнения типа Трикоми–Чибрарио // Оптимальное управление и дифференциальные уравнения: Сб. статей. К 110-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. матем. ин-та РАН. Т. 304. М.: МИАН, 2019. 159–166.
23. *Astashov E.* Equivariant simple singularities and admissible sets of weights // WSEAS Trans. Math. 2018. **17**. 404–410.
24. *Abdrakhmanova N.T., Astashov E.A.* Simple singularities of functions that are even or odd in each variable // J. Math. Sci. 2020. **249**, N 6. 827–833.
25. *Abdrakhmanova N.T., Astashov E.A.* Simple germs of skew-symmetric matrix families with oddness or evenness properties // J. Math. Sci. 2023. **270**, N 5. 625–639.
26. *Schoen T., Shkredov I.D.* Roth's theorem in many variables // Isr. J. Math. 2014. **199**, N 1. 287–308.
27. *Shkredov I.D.* On monochromatic solutions of some nonlinear equations in Z/pZ // Math. Notes. 2010. **88**, N 4. 603–611.
28. *Shkredov I.D.* On sets of large trigonometric sums // Izv. Math. 2008. **72**, N 1. 149–168.
29. *Shkredov I.D.* Examples of sets with large trigonometric sums // Sb. Math. 2007. **198**, N 12. 1805–1838.
30. *Schoen T., Shkredov I.D.* Additive dimension and a theorem of Sanders // J. Austal. Math. Soc. 2016. **100**, N 1. 124–144.
31. *Shkredov I.D., Yekhanin S.* Sets with large additive energy and symmetric sets // J. Combin. Theory Ser. A. 2011. **118**, N 3. 1086–1093.
32. *Konyagin S.V., Shkredov I.D.* A quantitative version of the Beurling–Helson theorem // Funct. Anal. and Appl. 2015. **49**, N 2. 110–121.
33. *Konyagin S.V., Shkredov I.D.* On sum sets of sets having small product set // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. **290**. 288–299.
34. *Konyagin S.V., Shkredov I.D.* New results on sums and products in $\mathbb{R}$ // Proc. Steklov Inst. Math. 2016. **294**. 78–88.
35. *Rudnev M., Shakan G., Shkredov I.D.* Stronger sum-product inequalities for small sets // Proc. Amer. Math. Soc. 2020. **148**. 1467–1479.
36. *Shkredov I.D.* Any small multiplicative sugroup is not a sumset // Finite Fields Appl. 2020. **63**. 101645.
37. *Schoen T., Shkredov I.D.* Higher moments of convolutions // J. Number Theory. 2013. **133**. 1693–1737.
38. *Shkredov I.D.* Structure theorems in additive combinatorics // Russ. Math. Surveys. 2015. **70**, N 1. 113–163.
39. *Shkredov I.D.* Non-commutative methods in additive combinatorics and number theory // Russ. Math. Surveys. 2021. **76**, N 6. 1065–1122.
40. *Moshchevitin N., Murphy B., Shkredov I.* On Korobov bound concerning Zaremba's conjecture // 2022, arXiv preprint arXiv:2212.14646.
41. *Moshchevitin N., Shkredov I.* On a modular form of Zarembas conjecture // Pacif. J. Math. 2020. **309**, N 1. 195–211.
42. *Shkredov I.D.* Modular hyperbolas and bilinear forms of Kloosterman sums // J. Number Theory. 2021. **220**. 182–211.
43. *Rudnev M., Shkredov I.D.* On the growth rate in $SL_2(F_p)$, the affine group and sum-product type implications // Mathematika. 2022. **68**, N 3. 738–783.
44. *Беляков А.О., Давыдов А.А.* Оптимальный циклический сбор распределенного возобновляемого ресурса с диффузией // Оптимальное управление и дифференциальные игры: Сб. статей, Тр. Матем. ин-та РАН. Т. 315. М.: МИАН, 2021. 64–73.
45. *Давыдов А.А., Мельник Д.А.* Оптимальные состояния распределенных эксплуатируемых популяций с периодическим импульсным отбором // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. **27**, № 2. 99–107.
46. *Davydov A., Vinnikov E.* Optimal Cyclic Dynamic of Distributed Population Under Permanent and Impulse Harvesting // Dynamic Control and Optimization. DCO 2021 // Proc. Mathematics and Statistics 407 / Ed. by T.V. Tchemisova, D.F.M. Torres, A.Y. Plakhov. Springer, 2022. 90–101.
47. *Винников Е.В., Давыдов А.А., Туницкий Д.В.* Существование максимального среднего временного сбора в КПП-модели на сфере при постоянном и импульсном отборах // Докл. РАН. Матем., информ., процессы упр. 2023. **514**, № 1. 59–64.
48. *Туницкий Д.В.* О стабилизации решений полулинейных параболических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях // Изв. РАН. Сер. матем. 2023. **87**, № 4. 186–204.
49. *Давыдов А.А., Платов А.С., Туницкий Д.В.* Существование оптимального стационарного решения в КПП-модели при нелокальной конкуренции // Тр. ИММ УрО РАН. 2024. **30**, № 3. 113–121.

Поступила в редакцию
12.07.2024