

$d_H(X, Y) = d_G(X, Y) \leq \max\{r_X, r_Y\} = r_Y$ в силу теоремы 2. Теперь применим теорему 3, заменив в ней хаусдорфово расстояние на r_Y . Получим $\|O_X - O_Y\|^2 \leq (r_X + r_Y)^2 - r_Y^2 = r_X^2 + 2r_X r_Y$. Так как $r_X \leq r_Y$, то $\|O_X - O_Y\|^2 \leq 3r_Y^2$, откуда $d(O_X, O_Y) \leq \sqrt{3}r_Y$. Предложение доказано.

Автор приносит благодарность научному руководителю профессору А. А. Тужилину, а также профессору А. О. Иванову за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gromov M. Groups of polynomial growth and expanding maps // Publ. math. **53**. 1981. 53–73.
2. Tuzhilin A. Who invented the Gromov–Hausdorff distance? // arXiv: 1612.00728, 2016.
3. Memoli F. Some properties of Gromov–Hausdorff distances // Discrete & Computational Geometry. 2012. **48**. 416–440.
4. Memoli F. Gromov–Hausdorff distances in Euclidean spaces // Computer Vision and Pattern Recognition Workshops. 2008 // IEEE Computer Society Conference. Anchorage, 2008. 1–8.
5. Majhi S., Vitter J., Wenk C. Approximating Gromov–Hausdorff distance in Euclidean space // arXiv:1912.13008, 2022.
6. Гаркави А.Л. О чебышёвском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи матем. наук. 1964. **19**, вып. 6. 139–145.
7. Сосов Е.Н. Геометрии выпуклых и конечных множеств геодезического пространства // Изд-во Казан. федерал. ун-та, 2010.
8. Алимов А.Р., Царьков И.Г. Чебышёвский центр множества, константа Юнга и их приложения // Успехи матем. наук. 2019. **74**, вып. 5 (449). 3–82.
9. Jung H. Ueber die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst // J. reine und angew. Math. 1901. **1901**, N 123. 241–257.
10. Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004.
11. Малышева О.С. Оптимальное положение компактов и проблема Штейнера в пространствах с евклидовой метрикой Громова–Хаусдорфа // Матем. сб. 2020. **211**, № 10. 32–49.

Поступила в редакцию
28.06.2023

УДК 531.36

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМАХ ТОРМОЖЕНИЯ ОПЕРЕННОГО ТЕЛА В СРЕДЕ

Ю. М. Окунев¹, О. Г. Привалова², В. А. Самсонов³

Рассматривается задача о торможении оперенного тела в однородной сопротивляющейся среде только под воздействием сил со стороны среды. Оперение тела состоит из одной лопасти. Показывается, что круговые режимы торможения типа “кувыркания” существуют для профилей лопасти как с низким, так и с высоким аэродинамическим качеством. Для профилей с высоким аэродинамическим качеством возможны дополнительные круговые режимы торможения типа “парашютного”.

Ключевые слова: оперенное тело, круговые режимы торможения.

The problem of deceleration of a finned body in homogeneous resistive medium is studied. The body is affected only by the medium. The plumage of the body consists of a single blade.

¹ Окунев Юрий Михайлович — канд. физ.-мат. наук, зав. лаб. НИИ механики МГУ, e-mail: okunev@imec.msu.ru.

Okunev Yury Mikhailovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of Laboratory of the Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University.

² Привалова Ольга Георгиевна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. НИИ механики МГУ, e-mail: privalova@imec.msu.ru.

Privalova Olga Georgievna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Research Scientist, Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University.

³ Самсонов Виталий Александрович — доктор физ.-мат. наук, проф., гл. науч. сотр. НИИ механики МГУ; проф. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: samson@imec.msu.ru.

Samsonov Vitaly Alexandrovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lead Research Scientist, Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.

It is shown that a circular kind trajectory of deceleration with “somersaults” is possible for blade profiles with both low and high aerodynamic quality. For airfoils with high aerodynamic quality, additional circular kind regimes of deceleration are possible that are in the style of a parachute.

Key words: finned body, circular regimes of deceleration.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-4-12

В работе [1] на качественном уровне обсуждался вопрос о существовании своего рода “установившегося” режима торможения при движении тела в однородной сопротивляющейся среде. Понятно, что провести параметрический анализ подобной задачи для тела сложной аэродинамической формы не представляется возможным. Поэтому в настоящей работе обсуждается модельная задача, во-первых, о движении тела простой формы и, во-вторых, в предположении о плоскопараллельном движении.

Оперение тела состоит из одной лопасти, которая перпендикулярна оси динамической симметрии тела с центром O на этой оси. С телом свяжем систему координат Oxz , ось Ox которой направим вдоль лопасти, а ось Oz — по оси симметрии, на которой находится центр G масс тела.

Нетрудно показать, что существуют два движения тела вдоль его оси: центр масс находится впереди центра давления и центр масс находится позади центра давления. Но оба этих движения являются неустойчивыми.

Покажем, что возможны установившиеся круговые режимы торможения. На рис. 1 представлено распределение действующих на тело сил, которые обеспечивают движение тела по кругу с центром вращения C в случае острого угла β (рис. 1, а) и тупого (рис. 1, б). Угол β — угол между прямыми OC и GC .

Будем считать, что аэродинамические силы действуют только на лопасть. Используем квазистатическую модель воздействия среды на тело [2]. Кажется, что вариант “парашютного” торможения, представленный на рис. 1, а, предпочтителен, так как центр масс движется “впереди” центра O давления. В то же время

вариант, представленный на рис. 1, б, больше похож на “кувыркание”. Аэродинамические силы приложены в точке O и взаимно перпендикулярны: S — сила лобового сопротивления и P — боковая (подъемная) сила, где вектор \mathbf{S} параллелен вектору \mathbf{V}_O , а вектор \mathbf{P} — перпендикулярен:

$$S = -s(\alpha)V_o^2, \quad P = p(\alpha)V_o^2.$$

Здесь V_o — скорость точки O — центра лопасти; $s(\alpha) = 1/2\rho c_d(\alpha)s$; $p(\alpha) = 1/2\rho c_l(\alpha)s$; ρ — плотность среды; s — характерная площадь лопасти; $c_d(\alpha)$, $c_l(\alpha)$ — безразмерные аэродинамические коэффициенты сопротивления и подъемной силы, являющиеся функциями текущего значения угла атаки α .

Угол α атаки лопасти вводим как угол между вектором скорости точки O и плоскостью, жестко связанной с лопастью, отсюда $\sin \alpha = -V_z/V_o$. Скорость точки O определяется по формуле $V_o = \sqrt{(V_x + \Omega R)^2 + V_z^2}$, где V_x , V_z — проекции вектора скорости V_G центра масс на оси системы координат Oxz , связанной с телом; Ω — угловая скорость тела; R — смещение центра масс тела G относительно центра лопасти O . Силы и момент, приложенные в центре масс тела, имеют вид

$$T = -t(\alpha)V_o^2, \quad N = n(\alpha)V_o^2, \quad M = -t_x(\alpha)RV_o^2,$$

где $t_x = -s(\alpha) \cos \alpha + p(\alpha) \sin \alpha$, $\sin \beta = \frac{R\Omega}{V_G} \sin \alpha$, $t = s(\alpha) \cos \beta - p(\alpha) \sin \beta$, $n = s(\alpha) \sin \beta + p(\alpha) \cos \beta$. Тогда

$$mV_G^2/l_G = nV_o^2, \quad m\dot{V}_G = -tV_o^2, \quad A\dot{\Omega} = -t_xRV_o^2, \quad (1)$$

где l_G — расстояние между центром масс тела G и центром окружности C , по которой движется центр масс; m — масса тела; A — экваториальный момент инерции тела. Отметим, что движение тела, отвечающее стационарному решению системы уравнений (1), протекает с уменьшением скорости

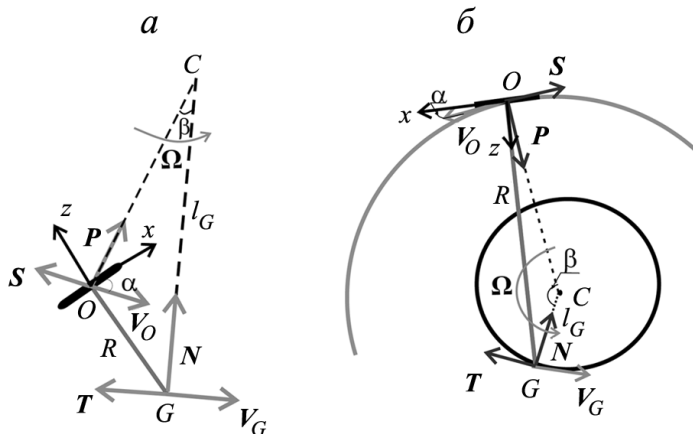


Рис. 1. Распределение сил: а — угол β острый; б — угол β тупой

V (в силу второго уравнения системы (1)). Однако для уменьшения угловой скорости необходимо, чтобы величина t_x была положительной для варианта рис. 1, а, а это удивительно, так как подобное условие в другой задаче [3] обеспечивало антидиссипацию. Да и реализуется оно лишь для профилей с высоким аэродинамическим качеством.

Уравнения движения выпишем в системе координат Oxz и учтем, что $\sin \alpha = -V_z/V_o$, $V_x = V_o \cos \alpha - \Omega R$:

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= -\frac{\rho s}{2m} (c_d \cos \alpha - c_l \sin \alpha) V_o^2 + \Omega \sin \alpha V_o^2, \\ \dot{V}_z &= -\frac{\rho s}{2m} (c_l \cos \alpha + c_d \sin \alpha) V_o^2 + \Omega \cos \alpha V_o^2 - \Omega^2 R, \\ \dot{\Omega} &= \frac{\rho s}{2A} (-c_d \cos \alpha + c_l \sin \alpha) R V_o^2. \end{aligned}$$

Перейдем к новой независимой переменной — длине σ дуги, пройденной точкой O , так что $d\sigma = V_o dt$, и к безразмерным переменным $v_x = V_x/V_o$, $v_z = V_z/V_o$, $\omega = \Omega R/V_o$.

Рассмотрим вопрос о существовании режима установившегося торможения, при котором $\alpha = \text{const}$, $\omega = \text{const}$.

Уравнения движения в новых переменных примут вид:

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\omega^2 R \cos \alpha + \omega + \frac{\rho s}{2m} c_l (\alpha) + \frac{\rho s}{2A} \sin \alpha R^2 [-c_d (\alpha) \cos \alpha + c_l (\alpha) \sin \alpha], \\ \omega' &= \frac{\rho s}{2m} c_d (\alpha) \omega - R\omega^3 \sin \alpha + \frac{\rho s}{2A} R [-c_d (\alpha) \cos \alpha + c_l (\alpha) \sin \alpha] (1 - R\omega \cos \alpha), \end{aligned} \tag{2}$$

где $()' = d()/d\sigma$.

Определим стационарные значения угловой скорости $\omega(\alpha)$ и угла α , при которых возможны установившиеся режимы торможения. Очевидно, что установившиеся режимы возникают при значении угла $\alpha = \pm\pi/2$, при котором $\omega(\alpha) = 0$ из второго уравнения системы (2), что соответствует вышеописанным прямолинейным движениям тела.

В случае $\alpha = \text{const} \neq \pm\pi/2$ находим функцию угловой скорости от угла атаки из равенства нулю правой части первого уравнения системы (2).

Выражение для угловой скорости имеет вид

$$\omega_{1,2}(\alpha) = \frac{1 \mp \sqrt{1 + 2R\rho s \cos \alpha \left[\frac{c_l}{m} + \frac{1}{A} R^2 (-c_d \cos \alpha + c_l \sin \alpha) \sin \alpha \right]}}{2R \cos \alpha}.$$

Итак, найдены две функции угловой скорости $\omega_1(\alpha)$ и $\omega_2(\alpha)$, при которых угол $\alpha = \text{const}$. Подставляя выражения для этих функций в правые части второго уравнения системы уравнений (2) вместо переменной ω , соответственно будем иметь две функции: $f_1(\alpha)$ и $f_2(\alpha)$. При некоторых значениях угла α , отвечающих нулям этих функций, возникают установившиеся режимы торможения.

Значения углов α атаки, отвечающие установившимся режимам торможения, зависят от параметров задачи (R, A) и формы лопасти.

На рис. 2 представлены графики функций $f_1(\alpha)$ и $f_2(\alpha)$ для тела с лопастью в форме пластины удлинения 8 [4] со значениями параметров $R = 3$, $A = 0.5$. Лопасть такой формы имеет высокое аэродинамическое качество. Для таких лопастей возникают установившиеся круговые режимы торможения двух типов, описанные ранее.

Из рис. 2 видно, что функция $f_1(\alpha)$ имеет несколько нулей при следующих значениях угла атаки: $\alpha_1 = 0.1553093$ рад, $\alpha_2 = 0.3330291$ рад, $\alpha_3 = 0.560849$ рад. При значениях α_1 и α_3 возникают притягивающие установившиеся режимы торможения.

Функция $f_2(\alpha)$ обращается в нуль при следующих значениях угла атаки: $\alpha_4 = 0.0955$ рад и $\alpha_5 = -0.04865$ рад. При значении угла α_4 режим притягивающий, при α_5 — неустойчивый.

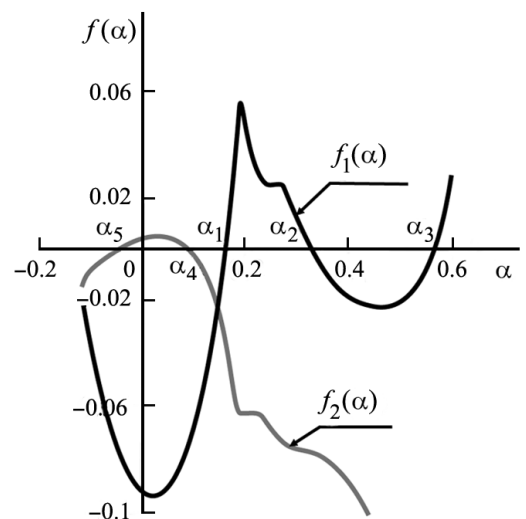


Рис. 2. Графики функций $f_1(\alpha)$ и $f_2(\alpha)$ для тела с лопастью в форме пластины удлинения 8

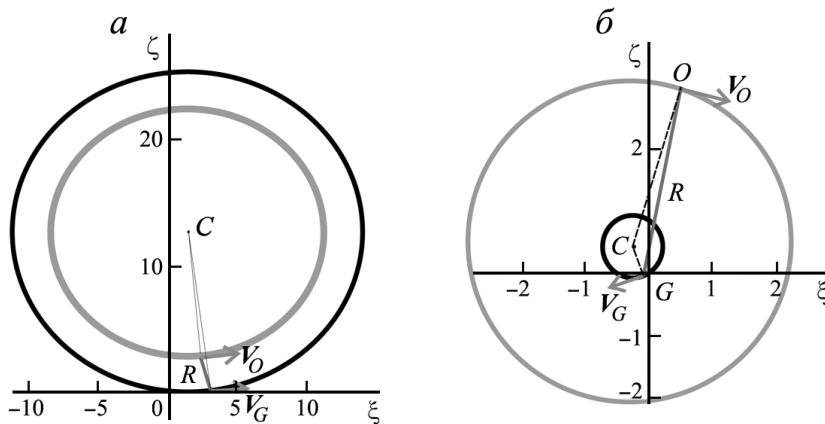


Рис. 3. Установившееся движение тела при торможении: *a* — с углом атаки α_1 ; *b* — с малым углом атаки α_4

0.560849 рад составляет 19. С уменьшением угла атаки увеличивается радиус круга, по которому движется центр масс тела.

В случае торможения с малым углом атаки $\alpha_4 = 0.0955$ рад центр лопасти движется по кругу, радиус которого больше радиуса круга, по которому движется центр масс тела, а прямая, соединяющая эти центры, пересекает круг, по которому движется центр масс тела (см. рис. 3, б). Диаметр круга, описываемого центром масс тела в случае $\alpha_4 = 0.0955$ рад, составляет 1.

Для тела с лопастями [5], у которых аэродинамическое качество $k(\alpha) \leq \text{ctg}(\alpha)$, возможен режим торможения только по второму варианту. Для профилей с высоким аэродинамическим качеством ($k(\alpha) > \text{ctg}(\alpha)$) существуют оба режима торможения — как “парашютного” типа, так и “кувыркания”.

Отметим, что во всех рассмотренных вариантах торможения разность радиусов концентрических кругов меньше величины смещения центра масс.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Садовничий В.А., Лошкин Б.Я., Окунев Ю.М., Самсонов В.А. К вопросу о моделировании полета болидов // Шестой международный аэрокосмический конгресс IAC'09. Пленарные и избранные доклады. М., 2010. 135–148.
2. Зенкин А.Н., Привалов В.А., Самсонов В.А. О квазистатической модели воздействия среды на авторотирующее тело // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 1993. № 4. 73–78.
3. Лошкин Б.Я., Привалова О.Г., Самсонов В.А. К динамике ротошпота. М.: Изд-во МГУ, 2018.
4. Табачников В.Г. Стандартные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1621. 79–93.
5. Flachsbarth O. Messungen an ebenen und gewölbten Platten // Ergeb. Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen / Hrsg. von L. Prandtl und A. Betz. Bd. 4. München; Berlin, 1932. 96–100.

Поступила в редакцию
18.10.2023

В обоих вариантах торможения центр масс тела и центр лопасти движутся по концентрическим окружностям. На рис. 3, *a* представлено установившееся движение тела при торможении с углами атаки α_1 и α_3 .

В этом случае центр масс тела движется по кругу, радиус которого больше, чем радиус круга, описываемого центром лопасти. Разность радиусов этих кругов меньше величины смещения центра масс. Величина диаметра круга, описываемого центром масс тела в случае $\alpha_1 = 0.1553093$ рад, составляет 25, при $\alpha_3 =$