Замечание. Наряду с неравенством (5) можно доказать и более общее неравенство:

$$\frac{1+q^\alpha-p^\alpha}{1+p^\alpha-q^\alpha} \geqslant \frac{q^p}{p^q}, \quad \text{если} \quad \alpha \geqslant \alpha_0,$$

где, как и в вышеприведенной теореме, p и q — любые действительные числа, такие, что $0 \leqslant q \leqslant 1/2 \leqslant p \leqslant 1$, $p+q=1$, а

$$\alpha_0 = \frac{W_{-1}\left(\dfrac{-1-\ln 2}{4}\cdot \ln 2\right)}{-\ln 2} \approx 2,64183.$$

Здесь $W_{-1}(t)$ — дополнительная ветвь функции Ламберта $W(t)$ (см. [3]), являющаяся действительным решением уравнения $W_{-1}(t)e^{W_{-1}(t)} = t$, $t \in [-1/e, 0)$, со значениями в интервале $(-\infty, -1]$. Доказательство этого утверждения выходит за рамки настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прелов В.В.* О вычислении информации через вариацию и неравенствах для энтропийной функции // Пробл. передачи информ. 2010. **46**, № 2. 24–29.
2. *Topsøe F.* Bounds for entropy and divergence for distributions over a two-elements set // J. Inequalities in Pure and Appl. Math. 2001. **2**, N 2. 1–13.
3. *Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E.* On the Lambert W function // Adv. Comput. Math. 1996. **5**. 329–359.

Поступила в редакцию
26.04.2023

УДК 515.124.4+514.177.2

ОЦЕНКИ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО (ЕВКЛИДОВА) РАССТОЯНИЯ ГРОМОВА–ХАУСДОРФА

О. С. Малышева[1]

Для расстояния Громова–Хаусдорфа $d_{GH}(X, Y)$ хорошо известны ограничения сверху и снизу диаметрами множеств X и Y. В работе изучаются модифицированное расстояние Громова–Хаусдорфа и орбиты действия подгруппы группы изометрии в евклидовых пространствах. Оказывается, для рассматриваемого расстояния имеют место подобные ограничения, но чебышёвскими радиусами представителей орбит. Как следствие приводится оценка расстояния между чебышёвскими центрами компактов при их оптимальном совмещении.

Ключевые слова: евклидово расстояние Громова–Хаусдорфа, чебышёвский радиус, оптимальное положение компактов.

The Gromov–Hausdorff distance $d_{GH}(X, Y)$ is well known to be bounded above and below by the diameters of the sets X and Y. In this paper, we study the modified Gromov–Hausdorff distance and the orbits of the action of the isometry group's subgroup in Euclidean spaces. It turns out that there are similar restrictions for it, but by the Chebyshev radii of the representatives of the orbits. As a consequence, we give an estimate for the distance between the Chebyshev centers of compact sets for their optimal alignment.

Key words: Euclidean Gromov–Hausdorff distance, Chebyshev radius, optimal positions of compacts.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-4-11

Введение. В настоящей работе рассматривается пространство компактных подмножеств евклидова пространства, наделенное модифицированным (евклидовым) расстоянием Громова–Хаус-

[1] *Малышева Ольга Сергеевна* — асп. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: osm95@mail.ru.

Malysheva Olga Sergeevna —Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.

дорфа $d_{\mathcal{G}}$. Группа изометрий $\mathcal{G}$ порождает орбиты. Отдельно рассматриваются случаи группы движений, сохраняющих ориентацию, и группы, содержащей подгруппу параллельных переносов. Таким образом, модифицированное расстояние $d_{\mathcal{G}}$ есть наименьшее хаусдорфово расстояние между соответствующими орбитами. В качестве приложения оно позволяет выяснить, насколько “похожи” два объекта. Принято считать, что определение упоминаемых расстояний и связанных с ними понятий введено Ф. Хаусдорфом в книге “Теория множеств” и приобретает современный вид в работе М. Громова [1], однако мы отсылаем читателя к публикации [2], где в истории вопроса участвует Д. Эдвардс, давший эквивалентные определения до М. Громова.

В общем случае задача нахождения такого расстояния сложная и неизвестно, разрешима ли она за полиномиальное время. Предпринимались попытки ограничить $d_{\mathcal{G}}$ для случая $\mathcal{G} = \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ расстоянием Громова–Хаусдорфа d_{GH}. Относительно последнего в свою очередь известно, что его вычисление связано с различными NP-сложными задачами [3]. В [4] показано, что для размерности пространства $n \geqslant 2$ модифицированное расстояние Громова–Хаусдорфа не ограничивается Cd_{GH}, где C — константа. Для $n = 1$ такая верхняя оценка получена с $C = \frac{5}{4}$ [5], причем показано, что она неулучшаема. Ф. Мемоли в [4] показал, что имеет место ограничение $d_{\mathcal{G}}(X,Y) \leqslant c_n M^{\frac{1}{2}}(d_{GH}(X,Y))^{\frac{1}{2}}$, где $M = \max\{\mathrm{diam}X, \mathrm{diam}Y\}$, а c_n — константа, зависящая лишь от размерности объемлющего пространства.

Мы дадим оценки иной природы, а именно через радиус чебышёвского шара, который определен для каждого компактного подмножества и который в общем случае не меньше половины диаметра этого подмножества. Вопросы условий существования, единственности чебышёвских центров поднимались, например, в [6, 7]. В [8] обобщается понятие чебышёвского радиуса на случай, когда чебышёвский центр множества ему не принадлежит; дается верхняя оценка чебышёвского радиуса $\sqrt{2n/(n+1)}$ для подмножества $\mathbb{R}^n$ диаметра, не превосходящего 2. Еще одно обобщение — константа Юнга, являющаяся, по сути, радиусом наименьшего шара, которым можно покрыть множество диаметра 1, т.е. отношением чебышёвского радиуса к диаметру; константа определена и впервые вычислена для конечномерных евклидовых пространств в [9].

Хорошо известно, что расстояние Громова–Хаусдорфа между множествами X и Y ограничено полуразностью диаметров снизу и половиной максимального диаметра сверху. Основной результат настоящей работы — аналогичные ограничения для евклидова расстояния Громова–Хаусдорфа в случае группы всех движений $|r_X - r_Y| \leqslant d_{\mathcal{G}}(X,Y) \leqslant \max\{r_X, r_Y\}$, где r_X и r_Y — чебышёвские радиусы компактных подмножеств $X, Y \in \mathbb{R}^n$ соответственно, причем показано, что такие границы точны. В качестве приложения даются оценки для расстояния между чебышёвскими центрами в оптимальном положении, т.е. таком, в котором достигается наименьшее расстояние Хаусдорфа.

1. Основные определения и предварительные результаты. Всюду ниже M обозначает метрическое пространство с функцией расстояния d, $\mathcal{P}(M)$ — семейство непустых подмножеств M, а $\mathcal{H}(M)$ — семейство непустых замкнутых ограниченных подмножеств M. Обозначим через $\mathcal{G}$ произвольную подгруппу группы движений в $\mathbb{R}^n$, через $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ группу всех движений евклидова пространства, через $\mathrm{Iso}_o(\mathbb{R}^n)$ группу движений, сохраняющих ориентацию. В частности, будем рассматривать $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ с введенной на нем эквивалентностью ν: два элемента будем считать эквивалентными, если один из другого получается некоторым движением $O \in \mathcal{G}$. Таким образом, возникает пространство орбит действия группы, которое будем обозначать $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1. *Замкнутой окрестностью радиуса r точки $x \in M$* называется множество $B_r(x) = \{y \in M : d(x,y) \leqslant r\}$.

Определение 2. *Расстоянием $d(y,A)$ от точки y до произвольного множества $A \in \mathcal{P}(M)$* называется величина $\inf_{a\in A}\big\{d(y,a)\big\}$.

Определение 3. *Замкнутой окрестностью радиуса r множества $A \in \mathcal{P}(M)$* называется множество $B_r(A) = \big\{y \in M : d(y,A) \leqslant r\big\}$.

Определение 4. Пусть A и B — элементы $\mathcal{P}(M)$. *Расстоянием Хаусдорфа* между этими множествами называется величина

$$d_H(A,B) = \inf\Big\{r : \big(A \subseteq B_r(B)\big) \wedge \big(B \subseteq B_r(A)\big)\Big\}.$$

Замечание 1. Хорошо известно, что d_H является метрикой на множестве всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства [10].

Определение 5. Пусть A и B — элементы $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}(\mathbb{R}^n)$. *Модифицированным евклидовым расстоянием Громова–Хаусдорфа между A и B* называется величина

$$\mathrm{d}_{\mathcal{G}}(A,B) = \inf_{O\in\mathcal{G}}\Big\{\mathrm{d}_H(A,OB)\Big\}.$$

Определение 6. Движение $O \in \mathcal{G}$, на котором достигается $d_{\mathcal{G}}(A, B)$, будем называть *оптимальным*, а пару (A, OB) — *оптимальным взаимным расположением* (относительно группы $\mathcal{G}$).

Теорема 1. *Если группа $\mathcal{G}$ ограниченно компактна, то оптимальное движение всегда существует.*

Доказательство. Так как движения $\mathbb{R}^n$ являются изометриями в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, для поиска расстояния между орбитами A и B выберем произвольный компакт $K' \in B$ и будем искать компакт из орбиты A, на котором достигается минимальное расстояние от K' до точек орбиты A. Фиксируем $K \in A$ произвольно. Отображение $f_K : g \mapsto g(K)$ из группы движений в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, сопоставляющее каждому движению g-образ компакта K, непрерывно, при этом прообразы ограниченных подмножеств $f_K(\mathcal{G})$ ограничены в $\mathcal{G}$. Замыкания таких прообразов компактны в силу ограниченной компактности $\mathcal{G}$. Поэтому точная нижняя грань расстояний от K' до компактов орбиты A равна точной нижней грани расстояний от K' до компактов из множества $f_K(G)$, где $G \subset \mathcal{G}$ — некоторый компакт. Тогда непрерывный образ $f_K(G)$ компакта тоже компакт и расстояние от компакта K' до компактов орбиты A достигается на компакте $f_K(G)$ в силу непрерывности функции расстояния. Теорема доказана.

Замечание 2. Расстояние $d_{\mathcal{G}}$ в случае $\mathcal{G} = \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ порождает метрику на $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}(\mathbb{R}^n)$ [4], которую мы будем обозначать тем же образом. В общем случае это псевдометрика. Рассмотрим, например, группу параллельных переносов на рациональные векторы и компакты X и Y, получающиеся из X сдвигом на вектор, одна из компонент которого иррациональна. Такие компакты лежат в разных орбитах, но расстояние между ними нулевое.

Определение 7. Пусть X и Y — произвольные непустые компактные метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием* $d_{GH}(X, Y)$ *по Громову–Хаусдорфу между* X *и* Y назовем точную нижнюю грань чисел ρ, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y), такая, что $d_H(X', Y') \leqslant \rho$.

Определение 8. Величина $\sup\limits_{x,y \in A} d(x, y)$ называется *диаметром* множества $A \subset M$ и обозначается $\mathrm{diam} A$.

Определение 9. *Чебышёвский центр* множества $A \in \mathcal{H}(M)$ — это центр шара в M с наименьшим возможным радиусом, которому принадлежит A; радиус этого шара называется *чебышёвским радиусом.*

Предложение 1. *Для любого компактного подмножества $\mathbb{R}^n$ чебышёвский центр существует и определен однозначно* [6].

Замечание 3. Для центрально-симметричных компактов в $\mathbb{R}^n$ чебышёвский центр совпадает с центром симметрии. (Если бы это было не так, то его центрально-симметричная копия также являлась бы чебышёвским центром, что противоречит единственности.)

Замечание 4. Чебышёвский центр в общем случае не единственный. Например, рассмотрим в качестве M плоскость с манхэттенским расстоянием, заданным нормой $\big|(x, y)\big| = |x| + |y|$, возьмем в качестве A двухточечное множество $A = \big\{(0, 0), (1, 1)\big\}$, тогда множество чебышёвских центров — это отрезок $\big[(1, 0), (0, 1)\big]$.

Замечание 5. Для расстояния Громова–Хаусдорфа между множествами X и Y хорошо известны оценки через их диаметры:

$$\frac{1}{2}|\mathrm{diam} X - \mathrm{diam} Y| \leqslant d_{GH}(X, Y) \leqslant \frac{1}{2}\max\{\mathrm{diam} X, \mathrm{diam} Y\}.$$

Оказывается, подобные ограничения имеют место и для евклидова расстояния Громова–Хаусдорфа, однако, вообще говоря, $d_{\mathcal{G}} \geqslant d_{GH}$, поэтому верхняя и нижняя границы зависят от чебышёвских радиусов множеств, которые в свою очередь не меньше половины диаметра.

2. Оценки для модифицированного евклидова расстояния Громова–Хаусдорфа. Всюду ниже для всякого множества $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ его чебышёвские радиус и центр будем обозначать r_A и O_A соответственно.

Следующий результат был доказан в [11] в предположении $\mathcal{G} = \mathrm{Iso}_o(\mathbb{R}^n)$. Основная же теорема настоящей работы распространяется и на орбиты действия более общей группы движений.

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{G} \subset \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ — произвольная группа, содержащая подгруппу параллельных переносов. Пусть $X \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $Y = \{y\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$. Тогда компакты находятся в оптимальном положении относительно группы $\mathcal{G}$, если и только если $y = O_X$. При этом $d_{\mathcal{G}}(X, Y) = r_X$.*

Доказательство. Перенесем y в чебышёвский центр O_X компакта X. Положим $r = d_H(X, Y)$, тогда r — радиус минимального замкнутого шара, содержащего компакт X. Таким образом,

$r = r_X$ — чебышёвский радиус. Покажем, что для любой точки $y' \neq y$ имеем $d_H\big(X, \{y'\}\big) > r_X$. Пусть это не так, т.е. существует точка $y' \neq y$, для которой $d_H\big(X, \{y'\}\big) \leqslant r_X$. Тогда $X \subseteq B_{r_X}(y')$, поэтому y' — чебышёвский центр, что противоречит его единственности в $\mathbb{R}^n$ [6]. Предложение доказано.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{G}$ — одна из групп $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{Iso}_o(\mathbb{R}^n)$. Для произвольных $X, Y \in \mathcal{H}_G(\mathbb{R}^n)$ имеет место формула*

$$|r_X - r_Y| \leqslant d_{\mathcal{G}}(X, Y) \leqslant \max\{r_X, r_Y\}.$$

Доказательство. В случае, когда хотя бы один из компактов одноточечный, утверждение теоремы выполнено. Будем считать, что $r_Y \geqslant r_X > 0$, т.е. $\max\{r_X, r_Y\} = r_Y$. Покажем, как расположить компакты, чтобы $X \subset B_{r_Y}(Y)$ и $Y \subset B_{r_Y}(X)$.

Пусть $x_0 \in X$ — точка, для которой $d(x_0, O_X) = r_X$, а $y_0 \in Y$ — точка, для которой $d(y_0, O_Y) = r_Y$. Разместим компакты так, чтобы точка x_0 совместилась с O_Y, а точка O_X располагалась на отрезке y_0O_Y. В таком положении шары $B_{r_X}(O_X) \subset B_{r_Y}(y_0)$ касаются внутренним образом в точке $x_0 = O_Y$. Тогда выполнено $X \subset B_{r_X}(O_X) \subset B_{r_Y}(y_0) \subset B_{r_Y}(Y)$. Далее, $Y \subset B_{r_Y}(O_Y) = B_{r_Y}(x_0) \subset B_{r_Y}(X)$. Следовательно, $d_{\mathcal{G}}(X, Y) \leqslant r_Y = \max\{r_X, r_Y\}$.

Нижняя оценка получается из неравенства треугольника, а именно $d_{\mathcal{G}}(X, Y) \geqslant |d_{\mathcal{G}}(X, Z) - d_{\mathcal{G}}(Y, Z)| = |r_X - r_Y|$, где Z — одноточечное пространство. Теорема доказана.

Следствие. *Если для пары $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ существует положение, в котором $d_H(A, B) = |r_A - r_B|$, то такое положение оптимально.*

Замечание 6. Приведенные в теореме 2 границы точны. Так, в [11] для ориентированно-подобных компактов X, Y и $\mathcal{G} = \mathrm{Iso}_o(\mathbb{R}^n)$ вычислено $d_{\mathcal{G}}(X, Y) = |r_X - r_Y|$. Но если отказаться от сохранения ориентации, т.е. рассмотреть в качестве группы $\mathcal{G}$ группу $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ всех движений, то эта формула также имеет место, так как группа движений в таком случае больше, а значит, наименьшее расстояние не увеличится, но и меньше оно не может быть в силу теоремы 2. Достижение верхней границы в теореме демонстрирует следующий пример.

Предложение 3. *Пусть $\mathcal{G}$ — одна из групп $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{Iso}_o(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим $X = \{x_1, x_2\}$ — двухточечное множество с расстоянием $d(x_1, x_2) = \rho$ и Y — шар радиуса r. Тогда $d_{\mathcal{G}}(X, Y) = \max\{r, \frac{\rho}{2}\} = \max\{r_X, r_Y\}$, причем оптимальным является положение, описанное в теореме 2, и оно единственно.*

Доказательство. Если $r \geqslant \rho/2$, то расположим компакты так, как описано в теореме 2, а именно совместим O_Y и x_1, а в роли y_0 подойдет любая из точек граничной сферы шара. В таком положении $d_H(X, Y) = r$. Допустим, оно не оптимально. Покажем, что для всех $\varepsilon \leqslant r$ ни в каком другом положении шар Y не попадет в ε-окрестность X.

Действительно, если $O_Y \neq x_1$ и $O_Y \neq x_2$, рассмотрим точки y_1, y_2 граничной сферы шара Y, такие, что прямая y_1y_2 проходит через O_Y перпендикулярно прямой x_1O_Y. Расстояния $d(y_1, x_1), d(y_2, x_1)$ больше, чем $d(y_1, O_Y) = d(y_2, O_Y) = r$, поэтому в $B_\varepsilon(x_1)$ эти точки не попадут. Но и в $B_\varepsilon(x_2)$ эти точки одновременно не попадут, поскольку точка, от которой y_1 и y_2 удалены не дальше чем на r, единственная — это $O_Y \neq x_2$. Значит, $d_{\mathcal{G}}(X, Y) = r$ и $d(O_X, O_Y) = r$.

Если же $r < \rho/2$, то совместим O_X и некоторую граничную точку y_1 так, чтобы точки O_Y, O_X, y_1, x_1 лежали на одной прямой. Пусть для определенности O_Y лежит между точками x_1 и O_X. В таком положении $d_H(X, Y) = \rho/2$. Допустим, положение не оптимально. Для всех $\varepsilon < \rho/2$ окрестность X радиуса ε состоит из двух компонент. Значит, чтобы компакт Y принадлежал ε-окрестности X, необходимо, чтобы он полностью принадлежал одной из компонент этой окрестности. Поместим Y в $B_\varepsilon(x_1)$. Но тогда $d_H(Y, X) = d(Y, x_2) \geqslant d(B_\varepsilon(x_1), x_2) = \rho - \varepsilon > \rho/2$. Таким образом, уменьшить расстояние $\rho/2$ между компактами нельзя. Более того, в последнем неравенстве равенство $d(Y, x_2) = d(B_\varepsilon(x_1), x_2)$ достигается только при условии, что шары Y и $B_\varepsilon(x_1)$ касаются внутренним образом в точке O_X, причем $\varepsilon = \rho/2$. Но такое расположение — это в точности то, чего требует теорема 2. Значит, оптимальное положение единственно. Предложение доказано.

Замечание 7. На первый взгляд кажется, что наилучшим совмещением шара и двухточечного множества является совмещение их центров. Однако приведенный только что пример показывает, что ни при каком соотношении их параметров в оптимальном положении чебышёвские центры не сопадают.

Теорема 3 [7]. *Пусть X и Y — ограниченные непустые подмножества гильбертова пространства. Тогда если $r_X \leqslant r_Y$, то $\|O_X - O_Y\|^2 \leqslant \big(r_X + d_H(X, Y)\big)^2 - r_Y{}^2$.*

Предложение 4. *Пусть $\mathcal{G}$ — одна из групп $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{Iso}_o(\mathbb{R}^n)$. Если произвольные компакты $X, Y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ расположены оптимально, то $d(O_X, O_Y) \leqslant \sqrt{3}\max\{r_X, r_Y\}$.*

Доказательство. Пусть $r_Y = \max\{r_X, r_Y\}$. Расположим компакты оптимально. Тогда

$d_H(X,Y) = d_{\mathcal{G}}(X,Y) \leqslant \max\{r_X, r_Y\} = r_Y$ в силу теоремы 2. Теперь применим теорему 3, заменив в ней хаусдорфово расстояние на r_Y. Получим $\|O_X - O_Y\|^2 \leqslant (r_X + r_Y)^2 - r_Y{}^2 = r_X{}^2 + 2r_X r_Y$. Так как $r_X \leqslant r_Y$, то $\|O_X - O_Y\|^2 \leqslant 3r_Y{}^2$, откуда $d(O_X, O_Y) \leqslant \sqrt{3} r_Y$. Предложение доказано.

Автор приносит благодарность научному руководителю профессору А. А. Тужилину, а также профессору А. О. Иванову за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gromov M.* Groups of polynomial growth and expanding maps // Publ. math. **53**. 1981. 53–73.
2. *Tuzhilin A.* Who invented the Gromov–Hausdorff distance? // arXiv: 1612.00728, 2016.
3. *Memoli F.* Some properties of Gromov–Hausdorff distances // Discrete & Computational Geometry. 2012. **48**. 416–440.
4. *Memoli F.* Gromov–Hausdorff distances in Euclidean spaces // Computer Vision and Pattern Recognition Workshops. 2008 // IEEE Computer Society Conference. Anchorage, 2008. 1–8.
5. *Majhi S., Vitter J., Wenk C.* Approximating Gromov–Hausdorff distance in Euclidean space // arXiv:1912.13008, 2022.
6. *Гаркави А.Л.* О чебышёвском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи матем. наук. 1964. **19**, вып. 6. 139–145.
7. *Сосов Е.Н.* Геометрии выпуклых и конечных множеств геодезического пространства // Изд-во Казан. федерал. ун-та, 2010.
8. *Алимов А.Р., Царьков И.Г.* Чебышёвский центр множества, константа Юнга и их приложения // Успехи матем. наук. 2019. **74**, вып. 5 (449). 3–82.
9. *Jung H.* Ueber die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst // J. reine und angew. Math. 1901. **1901**, N 123. 241–257.
10. *Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В.* Курс метрической геометрии. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004.
11. *Малышева О.С.* Оптимальное положение компактов и проблема Штейнера в пространствах с евклидовой метрикой Громова–Хаусдорфа // Матем. сб. 2020. **211**, № 10. 32–49.

Поступила в редакцию
28.06.2023

УДК 531.36

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМАХ ТОРМОЖЕНИЯ ОПЕРЕННОГО ТЕЛА В СРЕДЕ

Ю. М. Окунев[1], О. Г. Привалова[2], В. А. Самсонов[3]

Рассматривается задача о торможении оперенного тела в однородной сопротивляющейся среде только под воздействием сил со стороны среды. Оперение тела состоит из одной лопасти. Показывается, что круговые режимы торможения типа “кувыркания” существуют для профилей лопасти как с низким, так и с высоким аэродинамическим качеством. Для профилей с высоким аэродинамическим качеством возможны дополнительные круговые режимы торможения типа “парашютного”.

Ключевые слова: оперенное тело, круговые режимы торможения.

The problem of deceleration of a finned body in homogeneous resistive medium is studied. The body is affected only by the medium. The plumage of the body consists of a single blade.

[1] *Окунев Юрий Михайлович* — канд. физ.-мат. наук, зав. лаб. НИИ механики МГУ, e-mail: okunev@imec.msu.su.

Okunev Yury Mikhailovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of Laboratory of the Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University.

[2] *Привалова Ольга Георгиевна* — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. НИИ механики МГУ, e-mail: privalova@imec.msu.ru.

Privalova Olga Georgievna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Research Scientist, Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University.

[3] *Самсонов Виталий Александрович* — доктор физ.-мат. наук, проф., гл. науч. сотр. НИИ механики МГУ; проф. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: samson@imec.msu.ru.

Samsonov Vitaly Alexandrovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lead Research Scientist, Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.