6. *Короткевич А.А.* Интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли малой размерности // Матем. сб. 2009. **200**, № 12. 3–40.

Поступила в редакцию
26.04.2023

УДК 519.722:512.13

НОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ЭНТРОПИЙНОЙ ФУНКЦИИ

Вл. В. Прелов[1]

Доказываются новые неравенства для двоичной энтропийной функции.

Ключевые слова: двоичная энтропийная функция, неравенства, выпуклые функции, функция Ламберта W.

New inequalities for the binary entropy function are proved.

Key words: binary entropy function, inequalities, convex functions, Lambert W function.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-4-10

Двоичная энтропийная функция $h(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, играет важную роль в теории информации, теории вероятностей и математической статистике, поэтому получение различных и ранее неизвестных неравенств для нее представляет значительный интерес. Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *Для любых натуральных чисел $n \geqslant 1$ и любых действительных чисел p и q, таких, что $0 \leqslant q \leqslant 1/2 \leqslant p \leqslant 1$ и $p+q=1$, справедливы неравенства*

$$p^{n-1}h(q^n) \geqslant q^{n-1}h(p^n) \tag{1}$$

и

$$p^n(1+q^n-p^n)h(q^n) \geqslant q^n(1+p^n-q^n)h(p^n). \tag{2}$$

При этом правая часть в (1) при $n=1$ и $q=0$ определяется по непрерывности от q, т.е. $0^0h(1) = \lim\limits_{q\to 0} q^0 h((1-q)^n) = 0$.

Прежде чем привести доказательство этой теоремы, заметим, что гипотеза о справедливости неравенства (2) была высказана в работе [1].

Доказательство. Поскольку оба неравенства (1) и (2) справедливы при $q=0$ для любых $n \geqslant 1$, то в дальнейшем будем считать, что $q>0$ и $p=1-q<1$.

1. Переходим к доказательству неравенства (1), которое можно переписать в виде

$$\frac{p^n h(q^n)}{q^n h(p^n)} \geqslant \frac{p}{q}. \tag{3}$$

Сразу заметим, что для справедливости (3), а значит, и (1) достаточно доказать, что при любых заданных q и $p=1-q$ дробь $\dfrac{p^n h(q^n)}{q^n h(p^n)}$ возрастает по n, так как в этом случае имеет место неравенство

$$\frac{p^n h(q^n)}{q^n h(p^n)} \geqslant \frac{p\cdot h(q)}{q\cdot h(p)} = \frac{p}{q}.$$

Введем обозначение $B(n)$ для левой части неравенства (3). Нетрудно проверить, что после ряда тождественных преобразований производная по n от $B(n)$ будет иметь вид $\dfrac{d}{dn}B(n) = \dfrac{1}{n}B(n)\sum\limits_{i=1}^{3} A_i(n)$ или, что эквивалентно, $\dfrac{d}{dn}\ln B(n) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{3} A_i(n)$, где соответственно

[1] *Прелов Владимир Вячеславович* — канд. физ.-мат. наук, e-mail: prelov@iitp.ru.

Prelov Vladimir Vyacheslavovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences.

$$A_1(n) = \ln\frac{p^n}{q^n}, \quad A_2(n) = \frac{q^n \ln q^n}{h(q^n)} \ln\frac{1-q^n}{q^n}, \quad A_3(n) = -\frac{p^n \ln p^n}{h(p^n)} \ln\frac{1-p^n}{p^n}.$$

Таким образом, для доказательства возрастания $B(n)$ по n, т.е. того, что $\frac{d}{dn}B(n) \geqslant 0$, достаточно убедиться в том, что сумма $\sum\limits_{i=1}^{3} A_i(n)$ имеет нужный знак:

$$\ln\frac{p^n}{q^n} + \frac{q^n \ln q^n}{h(q^n)} \ln\frac{1-q^n}{q^n} - \frac{p^n \ln p^n}{h(p^n)} \ln\frac{1-p^n}{p^n} = F(q^n) - F(p^n) \geqslant 0, \tag{4}$$

где

$$F(x) = \frac{x \ln x}{h(x)} \ln\frac{1-x}{x} - \ln x = \frac{\ln x \ln(1-x)}{h(x)}, \quad 0 < x < 1.$$

Заметим, что на интервале $0 < x < 1$ функция $F(x)$ положительна и симметрична относительно прямой $x = 1/2$ и для доказательства неравенства (4) необходимо убедиться лишь в том, что $F(x)$ выпукла на данном интервале. Прямой путь доказательства приводит к громоздким выражениям как для первой производной $F'(x)$, так и для второй $F''(x)$. Однако существует способ избежать этого и доказать выпуклость функции $F(x)$, воспользовавшись изящной находкой группы тегеранских коллег Ф. Топсо [2, теорема 1.1] — новым равенством

$$\frac{1}{F(x)} = \varphi(x) + \varphi(1-x), \quad \text{где} \quad \varphi(x) = \frac{x-1}{\ln x}, \quad 0 < x < 1.$$

В [2] показано, что $\varphi''(x) \leqslant 0$, т.е. доказана вогнутость функции $1/F(x)$. Выпуклость нашей функции $F(x) \geqslant 0$ следует отсюда автоматически.

Теперь, пользуясь выпуклостью и симметричностью $F(x)$, доказать неравенство (4), а значит, и исходное неравенство (1) совсем просто. Действительно, если $0 < q^n \leqslant p^n \leqslant 1/2$, то $F(q^n) \geqslant F(p^n)$ в силу монотонного убывания $F(x)$ на интервале $0 < x \leqslant 1/2$, а если $p^n > 1/2$, то $F(p^n) = F(1 - p^n) \leqslant F(q^n)$ в силу симметричности $F(x)$ относительно прямой $x = 1/2$, очевидного неравенства $1 - p^n \geqslant q^n$ и монотонности $F(x)$ на интервале $0 < x \leqslant 1/2$. Таким образом, доказано неравенство (4), а следовательно, и (1).

2. Докажем теперь неравенство (2). На самом деле оно является достаточно простым следствием неравенства (1). Действительно, с учетом неравенства (1) для доказательства (2) следует лишь показать, что

$$\frac{1+q^n-p^n}{1+p^n-q^n} \geqslant \frac{q}{p}. \tag{5}$$

Имеем

$$\begin{aligned} 1+q^n-p^n &= 1 + p\cdot q\cdot\left[\frac{1}{p}\cdot\frac{1-p^n}{1-p} - \frac{1}{q}\cdot\frac{1-q^n}{1-q}\right] = \\ &= 1 + p\cdot q\cdot\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \sum_{k=1}^{n-2}(p^k - q^k)\right] = \\ &= 1 + q - p + A_0, \text{ где } A_0 = p\cdot q\cdot\sum_{k=1}^{n-2}(p^k-q^k) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Аналогично, заменяя p на q, а q на p, получаем

$$1 + p^n - q^n = 1 + p - q - A_0.$$

Поэтому, очевидно, имеем

$$\frac{1+q-p+A_0}{1+p-q-A_0} \geqslant \frac{q}{p},$$

что и доказывает неравенство (5), а значит, и (2).

Замечание. Наряду с неравенством (5) можно доказать и более общее неравенство:

$$\frac{1+q^\alpha-p^\alpha}{1+p^\alpha-q^\alpha} \geqslant \frac{q^p}{p^q}, \quad \text{если} \quad \alpha \geqslant \alpha_0,$$

где, как и в вышеприведенной теореме, p и q — любые действительные числа, такие, что $0 \leqslant q \leqslant 1/2 \leqslant p \leqslant 1$, $p+q=1$, а

$$\alpha_0 = \frac{W_{-1}\left(\dfrac{-1-\ln 2}{4}\cdot \ln 2\right)}{-\ln 2} \approx 2,64183.$$

Здесь $W_{-1}(t)$ — дополнительная ветвь функции Ламберта $W(t)$ (см. [3]), являющаяся действительным решением уравнения $W_{-1}(t)e^{W_{-1}(t)} = t$, $t \in [-1/e, 0)$, со значениями в интервале $(-\infty, -1]$. Доказательство этого утверждения выходит за рамки настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прелов В.В.* О вычислении информации через вариацию и неравенствах для энтропийной функции // Пробл. передачи информ. 2010. **46**, № 2. 24–29.
2. *Topsøe F.* Bounds for entropy and divergence for distributions over a two-elements set // J. Inequalities in Pure and Appl. Math. 2001. **2**, N 2. 1–13.
3. *Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E.* On the Lambert W function // Adv. Comput. Math. 1996. **5**. 329–359.

Поступила в редакцию
26.04.2023

УДК 515.124.4+514.177.2

ОЦЕНКИ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО (ЕВКЛИДОВА) РАССТОЯНИЯ ГРОМОВА–ХАУСДОРФА

О. С. Малышева[1]

Для расстояния Громова–Хаусдорфа $d_{GH}(X,Y)$ хорошо известны ограничения сверху и снизу диаметрами множеств X и Y. В работе изучаются модифицированное расстояние Громова–Хаусдорфа и орбиты действия подгруппы группы изометрии в евклидовых пространствах. Оказывается, для рассматриваемого расстояния имеют место подобные ограничения, но чебышёвскими радиусами представителей орбит. Как следствие приводится оценка расстояния между чебышёвскими центрами компактов при их оптимальном совмещении.

Ключевые слова: евклидово расстояние Громова–Хаусдорфа, чебышёвский радиус, оптимальное положение компактов.

The Gromov–Hausdorff distance $d_{GH}(X,Y)$ is well known to be bounded above and below by the diameters of the sets X and Y. In this paper, we study the modified Gromov–Hausdorff distance and the orbits of the action of the isometry group's subgroup in Euclidean spaces. It turns out that there are similar restrictions for it, but by the Chebyshev radii of the representatives of the orbits. As a consequence, we give an estimate for the distance between the Chebyshev centers of compact sets for their optimal alignment.

Key words: Euclidean Gromov–Hausdorff distance, Chebyshev radius, optimal positions of compacts.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-4-11

Введение. В настоящей работе рассматривается пространство компактных подмножеств евклидова пространства, наделенное модифицированным (евклидовым) расстоянием Громова–Хаус-

[1] *Малышева Ольга Сергеевна* — асп. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: osm95@mail.ru.

Malysheva Olga Sergeevna —Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.