Краткие сообщения

УДК 512.554.1

КЛАССИФИКАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ НИЙЕНХЕЙСА С ФУНКЦИОНАЛЬНО НЕЗАВИСИМЫМИ ИНВАРИАНТАМИ

С. Д. Дегтярева[1]

В работе решена задача классификации трехмерных левосимметрических алгебр, удовлетворяющих следующему дополнительному условию: коэффициенты характеристического многочлена оператора вида $L_k^i(x) = \sum a_{ks}^i x^s$, где a_{ks}^i — структурные константы алгебры, являются функционально независимыми полиномами от $x^1, \dots, x^n$.

Ключевые слова: левосимметрическая алгебра, оператор Нийенхейса.

The paper contains solution of the problem of classification of three-dimensional left-symmetric algebras satisfying the following additional condition: the coefficients of the characteristic polynomial of the operator $L_k^i(x) = \sum a_{ks}^i x^s$, where a_{ks}^i are the structural constants of the algebra, are functionally independent polynomials of $x^1, \dots, x^n$.

Key words: left-symmetric algebra, Nijenhuis operator.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-4-9

Классификация левосимметрических алгебр даже для малых размерностей является сложной задачей, которая решена лишь в некоторых частных случаях. В статье А. Ю. Коняева [1] получена классификация произвольных левосимметрических алгебр размерности два. Имеются также результаты о классификации левосимметрических алгебр, удовлетворяющих дополнительным условиям, например в [2] получена классификация алгебр Новикова, которые являются левосимметрическими алгебрами с некоторыми специальными свойствами. В настоящей работе решается задача о классификации трехмерных левосимметрических алгебр, удовлетворяющих следующему дополнительному условию: коэффициенты характеристического многочлена оператора вида $L_k^i(x) = \sum a_{ks}^i x^s$, где a_{ks}^i — структурные константы алгебры, являются функционально независимыми полиномами от x^1, x^2, x^3. Вопрос о классификации таких левосимметрических алгебр был поставлен в [3] в связи с изучением особых точек операторов Нийенхейса.

Определение 1. Пусть P — операторное поле на гладком многообразии M. Тензор Нийенхейса N_P определяется на паре векторных полей v, w следующим образом:

$$N_P(v,w) = [Pv, Pw] + P^2[v,w] - P[Pv,w] - P[v,Pw],$$

где $[\,,]$ обозначает стандартный коммутатор векторных полей.

Определение 2. Операторное поле P называется оператором Нийенхейса, если тензор Нийенхейса N_P тождественно равен нулю, т.е. $N_P \equiv 0$.

В дальнейшем мы будем рассматривать линейные операторы Нийенхейса на вещественных аффинных пространствах, т.е. такие операторные поля P, для которых $N_P \equiv 0$ и которые линейно зависят от координат $x^1, \dots, x^n$: $P_i^k = a_{ij}^k x^j$, где $a_{ij}^k \in \mathbb{R}$.

Пусть $\mathfrak{a}$ — алгебра размерности n над $\mathbb{R}$ с умножением $*$. Определим правое действие на $\mathfrak{a}$ по формуле $R_\eta \xi = \xi * \eta$. Произвольная конечномерная алгебра над $\mathbb{R}$ имеет естественную структуру n-мерного аффинного многообразия. Рассмотрим точку η на этом многообразии. Касательное пространство в точке η естественным образом отождествляется с $\mathfrak{a}$. Тогда определим тензорное поле P типа (1,1) по формуле правого действия: для $\xi \in T_\eta \mathfrak{a}$

$$P\xi := R_\eta \xi = \xi * \eta. \tag{1}$$

Зафиксируем базис e_i в $\mathfrak{a}$ и обозначим через a_{ij}^k структурные константы $\mathfrak{a}$. Координаты η в этом базисе обозначим через η^i: $\eta = \eta^i e_i$. Компоненты R_η запишутся как $(R_\eta)_i^k = a_{ij}^k \eta^j$, в частности они

[1] *Дегтярева Софья Денисовна* — студ. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ; Моск. центр фунд. и прикл. матем., e-mail: sofia.degtiareva@math.msu.ru.

Degtiareva Sofia Denisovna — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

являются линейными функциями от η^j. Таким образом, правое действие на $\mathfrak{a}$ порождает операторное поле, линейно зависящее от координат.

Теперь предположим, что мы имеем операторное поле R_η на вещественном аффинном пространстве $\mathfrak{a}$ с координатами η^j, линейно зависящее от них: $(R_\eta)^k_i = a^k_{ij}\eta^j$. Тогда $\mathfrak{a}$ имеет естественную структуру алгебры над $\mathbb{R}$ со структурными константами $a^k_{ij} = \frac{\partial R^k_i}{\partial \eta^j}$. В итоге получаем биекцию между алгебрами и линейными операторными полями на вещественных аффинных пространствах.

Пусть $\mathfrak{a}$ — алгебра размерности n над $\mathbb{R}$ с умножением $*$. Ассоциатор $\mathcal{A}$ — это трилинейная операция на $\mathfrak{a}$, определенная на произвольной тройке $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{a}$ следующим образом: $\mathcal{A}(\xi, \eta, \zeta) = (\xi * \eta) * \zeta - \xi * (\eta * \zeta)$. Алгебра $\mathfrak{a}$ называется левосимметрической, если $\mathcal{A}(\xi, \eta, \zeta) = \mathcal{A}(\eta, \xi, \zeta)\ \forall \xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{a}$.

Отметим, что коммутатор $[\xi, \eta] = \xi * \eta - \eta * \xi$ задает структуру алгебры Ли на левосимметрической алгебре $\mathfrak{a}$. Эта алгебра Ли называется ассоциированной алгеброй Ли.

Следующая лемма устанавливает связь между линейными операторами Нийенхейса и левосимметрическими алгебрами.

Лемма 1 [4]. *Пусть $\mathfrak{a}$ — алгебра размерности n над $\mathbb{R}$. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathfrak{a}$ *— левосимметрическая алгебра;*

2) *операторное поле, заданное на* $\mathfrak{a}$ *формулой* (1)*, является оператором Нийенхейса.*

Мы будем рассматривать левосимметрические алгебры размерности три, для которых соответствующие (по лемме 1) операторы Нийенхейса имеют почти всюду функционально независимые коэффициенты характеристического многочлена. Алгоритм поиска таких операторов Нийенхейса основан на следующей теореме.

Теорема 1 [5]. *Пусть P — оператор Нийенхейса, а f_1, f_2, f_3 — коэффициенты характеристического многочлена $\chi(t) = \det(t \cdot \mathrm{Id} - P) = t^3 - f_1 t^2 + f_2 t - f_3$. Тогда в любой локальной системе координат x, y, z справедливо равенство*

$$AP = MA, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} f_1 & -1 & 0 \\ f_2 & 0 & -1 \\ f_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С помощью теоремы 1 мы можем восстанавливать операторы Нийенхейса по их инвариантам, т.е. по функциям f_1, f_2, f_3. Заметим, что для линейных операторов Нийенхейса f_1 — линейная функция, f_2 — однородный квадратичный многочлен, а f_3 — однородный кубический многочлен от координат x, y, z. Нам понадобится следующая лемма, доказательство которой мы опускаем.

Лемма 2. *Пусть даны линейная функция $f_1(x, y, z)$ и однородная квадратичная функция $f_2(x, y, z)$, которые функционально независимы. Линейной заменой координат $x, y, z \to x', y', z'$ функции f_1 и f_2 можно привести к одному из следующих видов, где $c \in \mathbb{R}$:*

$$f_1 = x', \quad f_2 = \left[\begin{array}{c} \pm y'^2 \pm z'^2 + cx'^2, \\ \pm y'^2 + x'z', \\ \pm y'^2 + cx'^2, \\ x'y' + cx'^2. \end{array} \right.$$

Теперь сформулируем и докажем основной результат.

Теорема 2. *Любой трехмерный линейный оператор Нийенхейса P с почти всюду функционально независимыми инвариантами в некотором базисе имеет один из видов, представленных в табл.* 1*, причем каждый из этих* 8 *операторов не может быть сведен к другим линейными заменами координат.*

Комментарий к табл. 1. В четвертом столбце указана алгебра Ли, ассоциированная с левосимметрической алгеброй, соответствующей данному оператору Нийенхейса. Обозначения для алгебр Ли взяты из статьи [6].

Отметим, что случаи **I, II, VI, VII** соответствуют прямым суммам двумерных левосимметрических алгебр из работы [1] с одномерными алгебрами: **I** соответствует $\mathfrak{b}_4^-$, **II** соответствует $\mathfrak{c}_5^+$, **VI** — $\mathfrak{b}_4^+$, **VII** — $\mathfrak{c}_5^-$.

Доказательство. Рассмотрим матрицы A и M из теоремы 1 для f_1, f_2, f_3, где $f_1 = x$, f_2 имеет вид из леммы 2, а f_3 — произвольный кубический однородный многочлен: $f_3 = r_1x^3 + r_2y^3 + r_3z^3 + r_4x^2y + r_5x^2z + r_6y^2x + r_7y^2z + r_8z^2x + r_9z^2y + r_{10}xyz$. Изучим случаи, когда $f_2(x, y, z) = \pm y^2 \pm z^2 + cx^2$.

Таблица 1

Случай	Инварианты	P	Алгебра Ли
I	$f_1 = x$ $f_2 = -y^2 - z^2 + \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = -\frac{1}{2}xz^2 - yz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 2y & 2z \\ \frac{1}{2}y & \frac{1}{2}x & -z \\ \frac{1}{4}z & -\frac{1}{2}z & 0 \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$
II	$f_1 = x$ $f_2 = -y^2 - z^2 + \frac{1}{3}x^2$ $f_3 = \frac{1}{27}x^3 + \frac{2}{3\sqrt{3}}z^3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}y^2z - \frac{1}{3}xy^2 - \frac{1}{3}xz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 2y & 2z \\ \frac{1}{3}y & \frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}z & -\frac{1}{\sqrt{3}}y \\ \frac{1}{3}z & -\frac{1}{\sqrt{3}}y & \frac{1}{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}z \end{pmatrix}$	$A_{3,10}$
III	$f_1 = x$ $f_2 = -y^2 - z^2 + \frac{1}{3}x^2$ $f_3 = \frac{1}{27}x^3 + \frac{2}{3\sqrt{3}}z^3 + \frac{\sqrt{3}}{3}y^2z - \frac{1}{3}xy^2 - \frac{1}{3}xz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 2y & 2z \\ \frac{1}{3}y & \frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}z & \frac{1}{2\sqrt{3}}y \\ \frac{1}{3}z & \frac{2}{\sqrt{3}}y & \frac{1}{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}z \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$
IV	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2$ $f_3 = (y-z)^2(2y-x)$	$\begin{pmatrix} x & -2y & 2z \\ y & x - 3y & -x + 2y + z \\ y & x - 4y + z & -x + 3y \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$
V	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2$ $f_3 = (y+z)^3$	$\begin{pmatrix} x & -2y & 2z \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z & -\frac{3}{2}(y+z) & -\frac{3}{2}(y+z) \\ -\frac{1}{6}y + \frac{1}{2}z & \frac{3}{2}(y+z) & \frac{3}{2}(y+z) \end{pmatrix}$	$A_{3,5}$
VI	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2 + \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = \frac{1}{2}xy^2 + y^2z$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & -2y & 2z \\ \frac{1}{4}y & 0 & -\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}z & y & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$
VII	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2 + \frac{1}{3}x^2$ $f_3 = \frac{1}{27}x^3 - \frac{2}{3\sqrt{3}}z^3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}y^2z + \frac{1}{3}xy^2 - \frac{1}{3}xz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & -2y & 2z \\ \frac{1}{3}y & \frac{1}{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}z & \frac{1}{\sqrt{3}}y \\ \frac{1}{3}z & -\frac{1}{\sqrt{3}}y & \frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}z \end{pmatrix}$	$A_{3,10}$
VIII	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2 + \frac{1}{3}x^2$ $f_3 = \frac{1}{27}x^3 - \frac{2}{3\sqrt{3}}z^3 + \frac{\sqrt{3}}{3}y^2z + \frac{1}{3}xy^2 - \frac{1}{3}xz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & -2y & 2z \\ \frac{1}{3}y & \frac{1}{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}z & -\frac{1}{2\sqrt{3}}y \\ \frac{1}{3}z & \frac{2}{\sqrt{3}}y & \frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}z \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$

Имеем $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2cx & \pm 2y & \pm 2z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 \\ \pm y^2 \pm z^2 + cx^2 & 0 & -1 \\ f_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $MA = \begin{pmatrix} x - 2cx & \mp 2y & \mp 2z \\ \pm y^2 \pm z^2 + cx^2 - \alpha & -\beta & -\gamma \\ f_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} x - 2cx & \mp 2y & \mp 2z \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}$, где $D_{ij} = a_{ij}x + b_{ij}y + c_{ij}z$, $\alpha = \dfrac{\partial f_3}{\partial x}$, $\beta = \dfrac{\partial f_3}{\partial y}$, $\gamma = \dfrac{\partial f_3}{\partial z}$.

По теореме 1 должно быть выполнено равенство $AP = MA$. Заметим, что сразу однозначно определяются r_1 и c: если приравнять коэффициенты при x^2 в элементе (2,1) и при x^3 в элементе (3,1) матриц AP и MA, то

$$\begin{cases} c - 3r_1 = 2c(1-2c), \\ r_1 = 3r_1(1-2c). \end{cases}$$

Отсюда $r_1 = 0$, $c = 0$, или $r_1 = 0$, $c = \frac{1}{4}$, или $r_1 = \frac{1}{27}$, $c = \frac{1}{3}$. Дальнейшие вычисления проводились с использованием программы Wolfram Mathematica. При некоторых комбинациях знаков в f_2 и значениях c получаются решения, зависящие от параметра, например $f_1 = x$, $f_2 = y^2 - z^2$, $f_3 = \alpha(y+z)^3$. Сделаем замену:

$$x' = x, \qquad \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} a & \operatorname{sh} a \\ \operatorname{sh} a & \operatorname{ch} a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

Тогда $y^2 - z^2 = (y')^2 - (z')^2$, $\alpha(y+z)^3 = \alpha \cdot e^{-3a} \cdot (y' + z')^3$. При помощи такой линейной замены, меняя a, можно получить любой параметр, имеющий тот же знак, что и α. Аналогично при замене

$$x' = x, \qquad \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{ch} a & -\operatorname{sh} a \\ -\operatorname{sh} a & -\operatorname{ch} a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

будем иметь $y^2 - z^2 = (y')^2 - (z')^2$, $\alpha(y+z)^3 = -\alpha \cdot e^{-3a} \cdot (y'+z')^3$ и получаем любой параметр, имеющий знак, противоположный знаку α. Полагаем $\alpha = 1$. При рассмотрении оставшихся случаев для f_2 из леммы 2 система уравнений относительно компонентов матрицы и коэффициентов f_3 оказывается несовместной.

Покажем, что случаи из табл. 1 не сводятся друг к другу линейными заменами координат. Инварианты имеют вид $f_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, f_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3, f_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — собственные значения оператора P. Положим $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Тогда $f_1 = 3\lambda$, $f_2 = 3\lambda^2$, $f_3 = \lambda^3$ и инварианты связаны соотношениями $f_1^3 = 27f_3$, $f_1^2 = 3f_2$. Для каждого случая решим эту систему, т.е. определим множество точек, где собственные значения соответствующего оператора одинаковы. Если эти множества разные для случаев из табл. 1, то все доказано, иначе изучим жорданову нормальную форму J оператора P для точек этих множеств. Результаты представлены в табл. 2.

Таблица 2

Случай	Решения	J	Инварианты при $f_1 = 0$
I	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$	$f_1 = 0$ $f_2 = -y^2 - z^2$ $f_3 = -yz^2$
II	$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} \frac{x}{3}&0&0 \\ 0&\frac{x}{3}&0 \\ 0&0&\frac{x}{3} \end{pmatrix}$	$f_1 = 0$ $f_2 = -y^2 - z^2$ $f_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}}z^3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}y^2z$
III	$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} \frac{x}{3}&0&0 \\ 0&\frac{x}{3}&0 \\ 0&0&\frac{x}{3} \end{pmatrix}$	$f_1 = 0$ $f_2 = -y^2 - z^2$ $f_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}}z^3 + \frac{\sqrt{3}}{3}y^2z$
IV	1) $\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \frac{2x}{3} \\ z = \frac{x}{3} \end{cases}$	1) $\begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} \frac{x}{3}&0&0 \\ 0&\frac{x}{3}&1 \\ 0&0&\frac{x}{3} \end{pmatrix}$	$f_1 = 0$ $f_2 = y^2 - z^2$ $f_3 = 2y(y-z)^2$
V	1) $\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \frac{2x}{3} \\ z = -\frac{x}{3} \end{cases}$	1) $\begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} \frac{x}{3}&1&0 \\ 0&\frac{x}{3}&1 \\ 0&0&\frac{x}{3} \end{pmatrix}$	$f_1 = 0$ $f_2 = y^2 - z^2$ $f_3 = (y+z)^3$
VI	1) $\begin{cases} y = -\frac{x}{3} \\ z = -\frac{x}{6} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \frac{x}{3} \\ z = -\frac{x}{6} \end{cases}$	1) $\begin{pmatrix} \frac{x}{3}&0&0 \\ 0&\frac{x}{3}&1 \\ 0&0&\frac{x}{3} \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} \frac{x}{3}&0&0 \\ 0&\frac{x}{3}&1 \\ 0&0&\frac{x}{3} \end{pmatrix}$	$f_1 = 0$ $f_2 = y^2 - z^2$ $f_3 = y^2z$
VII	$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} \frac{x}{3}&0&0 \\ 0&\frac{x}{3}&0 \\ 0&0&\frac{x}{3} \end{pmatrix}$	$f_1 = 0$ $f_2 = y^2 - z^2$ $f_3 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}z^3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}y^2z$
VIII	$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} \frac{x}{3}&0&0 \\ 0&\frac{x}{3}&0 \\ 0&0&\frac{x}{3} \end{pmatrix}$	$f_1 = 0$ $f_2 = y^2 - z^2$ $f_3 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}z^3 + \frac{\sqrt{3}}{3}y^2z$

Из вида f_2 следует, что случаи **II, III** линейными заменами координат не могут быть приведены к случаям **VII, VIII**, из вида f_3 следует, что случаи **II** и **III**, а также **VII** и **VIII** различны между собой. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Konyaev A.Yu.* Nijenhuis geometry II: Left-symmetric algebras and linearization problem for Nijenhuis operators // Diff. Geom. and its Appl. 2021. **74**.
2. *Burde D., de Graaf W.* Classification of Novikov algebras // AAECC. 2013. **24**. 1–15.
3. *Bolsinov A., Matveev V.S., Miranda E., Tabachnikov S.* Open problems, questions and challenges in finitedimensional integrable systems // Phil. Trans. Roy. Soc. A. 2018. **376**.
4. *Winterhalder A.* Linear Nijenhuis-tensors and the construction of integrable systems // arXiv.org:9709008. 1997.
5. *Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S.* Nijenhuis geometry // Adv. Math. 2022. **394**.

6. *Короткевич А.А.* Интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли малой размерности // Матем. сб. 2009. **200**, № 12. 3–40.

Поступила в редакцию
26.04.2023

УДК 519.722:512.13

НОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ЭНТРОПИЙНОЙ ФУНКЦИИ

Вл. В. Прелов[1]

Доказываются новые неравенства для двоичной энтропийной функции.

Ключевые слова: двоичная энтропийная функция, неравенства, выпуклые функции, функция Ламберта W.

New inequalities for the binary entropy function are proved.

Key words: binary entropy function, inequalities, convex functions, Lambert W function.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-4-10

Двоичная энтропийная функция $h(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, играет важную роль в теории информации, теории вероятностей и математической статистике, поэтому получение различных и ранее неизвестных неравенств для нее представляет значительный интерес. Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *Для любых натуральных чисел* $n \geqslant 1$ *и любых действительных чисел* p *и* q, *таких, что* $0 \leqslant q \leqslant 1/2 \leqslant p \leqslant 1$ *и* $p+q=1$, *справедливы неравенства*

$$p^{n-1}h(q^n) \geqslant q^{n-1}h(p^n) \tag{1}$$

и

$$p^n(1+q^n-p^n)h(q^n) \geqslant q^n(1+p^n-q^n)h(p^n). \tag{2}$$

При этом правая часть в (1) *при* $n=1$ *и* $q=0$ *определяется по непрерывности от* q, *т.е.* $0^0h(1) = \lim\limits_{q\to 0} q^0 h((1-q)^n) = 0$.

Прежде чем привести доказательство этой теоремы, заметим, что гипотеза о справедливости неравенства (2) была высказана в работе [1].

Доказательство. Поскольку оба неравенства (1) и (2) справедливы при $q=0$ для любых $n \geqslant 1$, то в дальнейшем будем считать, что $q>0$ и $p = 1-q < 1$.

1. Переходим к доказательству неравенства (1), которое можно переписать в виде

$$\frac{p^n h(q^n)}{q^n h(p^n)} \geqslant \frac{p}{q}. \tag{3}$$

Сразу заметим, что для справедливости (3), а значит, и (1) достаточно доказать, что при любых заданных q и $p=1-q$ дробь $\dfrac{p^n h(q^n)}{q^n h(p^n)}$ возрастает по n, так как в этом случае имеет место неравенство

$$\frac{p^n h(q^n)}{q^n h(p^n)} \geqslant \frac{p\cdot h(q)}{q\cdot h(p)} = \frac{p}{q}.$$

Введем обозначение $B(n)$ для левой части неравенства (3). Нетрудно проверить, что после ряда тождественных преобразований производная по n от $B(n)$ будет иметь вид $\dfrac{d}{dn}B(n) = \dfrac{1}{n}B(n)\sum\limits_{i=1}^{3} A_i(n)$ или, что эквивалентно, $\dfrac{d}{dn}\ln B(n) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{3} A_i(n)$, где соответственно

---

[1] *Прелов Владимир Вячеславович* — канд. физ.-мат. наук, e-mail: prelov@iitp.ru.

Prelov Vladimir Vyacheslavovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences.