

УДК 531.6+539.3+519.6

О ПОЛИНОМАХ СМЕШАННОЙ СТЕПЕНИ В ЗАДАЧАХ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. В. Романов¹

В рамках теории микрополярного континуума с использованием вариационного принципа Лагранжа, метода Ритца и обобщенного метода редуцированного и селективного интегрирования (“reduced and selective integration”) для кусочно-полиномиальных функций смешанной степени получена матрица жесткости и составлена система линейных алгебраических уравнений для материала произвольной анизотропии с центром симметрии при неизотермических процессах. Показана эффективность использования конечного элемента с полиномами смешанной степени на примере задачи о кубе.

Ключевые слова: микрополярная среда, континуум Коссера, метод редуцированного и селективного интегрирования, несимметричная теория упругости, вариационный принцип, тензор изгиба-кручения, тензор моментных напряжений, метод конечных элементов, матрица жесткости, полиномы смешанной степени, задача о кубе.

In this paper, a variational principle of Lagrange, the Ritz method with generalized reduced and selective integration for mixed piecewise polynomial functions are used to obtain a stiffness matrix and a system of linear algebraic equations for micropolar theory of elasticity. This approach is implemented for anisotropic, isotropic and centrally symmetric material in case of non isothermal process. The cube problem is considered. The performance for finite element with mixed piecewise polynomial functions is exposed.

Key words: micropolar continuum, Cosserat continuum, reduced and selective integration, theory of asymmetric elasticity, variational principle, rotation gradient tensor, couple stress tensor, finite element method, stiffness matrix, mixed polynomial functions, cube problem.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-4-7

1. Вариационный принцип Лагранжа. Обобщим задачу минимизации функционала Лагранжа классической теории упругости [1, 2] на микрополярную среду:

$$\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}: \quad L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) \leq L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}), \quad \forall \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}|_{\Sigma_1} = 0, \quad L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) - l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) \quad (1)$$

и запишем условие стационарности:

$$\begin{aligned} DL(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) &= 0, \quad a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}), \\ a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) &= \int_V [\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) \otimes (\nabla \mathbf{w} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi}) + \underline{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\varphi}) \otimes \nabla \boldsymbol{\psi}] dV, \\ l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) &= \int_V \rho(\mathbf{F} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\psi}) dV + \int_{\Sigma_2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\psi}) d\Sigma, \end{aligned} \quad (2)$$

где \otimes — знак внутреннего 2-произведения; D — дифференциал Гато; V — объем тела; Σ — поверхность тела ($\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$); $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}$ — действительная кинематическая система независимых векторов перемещений и микровращений (далее вращений) соответственно; $\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}$ — кинематически допустимая система векторов, т.е. возможные перемещения и вращения из того же пространства, что и $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}$. Если приняты тождества $\mathbf{w} = \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}$, то $a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi})$ есть энергия упругих деформаций и изгибов-кручений; $l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi})$ — работа внешних сил на соответствующих перемещениях и вращениях; $\underline{\mathbf{P}}$ — тензор напряжений второго ранга; $\underline{\boldsymbol{\mu}}$ — тензор моментных напряжений второго ранга; \mathbf{F} — вектор массовой силы; \mathbf{m} — вектор массовых пар; ρ — плотность среды; \mathbf{S} — вектор поверхностной силы; \mathbf{R} — вектор поверхностных пар; $\underline{\mathbf{C}}$ — дискриминантный тензор третьего ранга (тензор Леви-Чивиты).

При формулировке вариационного принципа Лагранжа аналогично классической теории потребуем выполнения кинематических соотношений и кинематических граничных условий [1, 3–8]:

¹Романов Александр Вячеславович — науч. сотр. каф. механики композитов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: atomicra@ya.ru.

Romanov Aleksandr Vyacheslavovich — Research Scientist, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Composite Mechanics.

$$\underline{\gamma} = \nabla \mathbf{u} - \underline{\mathbb{C}} \cdot \underline{\varphi}, \quad \underline{\kappa} = \nabla \underline{\varphi}, \quad \mathbf{u}|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}_0, \quad \underline{\varphi}|_{\Sigma_1} = \underline{\varphi}_0, \quad (3)$$

а из условия стационарности (2) следуют уравнения равновесия и статические граничные условия:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} + \underline{\mathbb{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}}|_{\Sigma_2} = \mathbf{S}, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}|_{\Sigma_2} = \mathbf{R}, \quad (4)$$

где $\underline{\gamma}$ — тензор деформаций микрополярной теории упругости; $\underline{\kappa}$ — тензор изгибов-кручений; \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности тела. Таким образом, достаточность утверждения принципа Лагранжа и эквивалентность краевой (4) и вариационной (2) формулировок задачи микрополярной теории упругости в перемещениях и вращениях установлены.

2. Потенциал деформаций и изгибов-кручений. Так как существует оператор (потенциал) деформаций и изгибов-кручений (3), с учетом обобщенного принципа Дюамеля–Неймана имеют место определяющие соотношения для материалов с центром симметрии при неизотермических процессах [9–11]:

$$\begin{aligned} \check{W}(\underline{\gamma}, \underline{\kappa}) = & \frac{1}{2} \left(\underline{\gamma} \otimes \underline{\mathbb{A}} \otimes \underline{\gamma} + \underline{\kappa} \otimes \underline{\mathbb{D}} \otimes \underline{\kappa} \right) + \left(\underline{\mathbf{P}}_0 - \underline{\mathbb{A}} \otimes \underline{\mathbf{a}} \vartheta \right) \otimes \underline{\gamma} + \left(\underline{\boldsymbol{\mu}}_0 - \underline{\mathbb{D}} \otimes \underline{\mathbf{b}} \vartheta \right) \otimes \underline{\kappa} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathbb{A}} \otimes \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} \otimes \underline{\mathbb{D}} \otimes \underline{\mathbf{b}} \right) \vartheta^2, \quad (5) \\ \underline{\mathbf{P}} = & \frac{\partial \check{W}}{\partial \underline{\gamma}}, \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial \check{W}}{\partial \underline{\kappa}} \quad (\underline{\mathbb{A}} = \underline{\mathbb{A}}^T, \quad \underline{\mathbb{D}} = \underline{\mathbb{D}}^T), \end{aligned}$$

где $\underline{\mathbb{A}}, \underline{\mathbb{D}}$ — материальные тензоры четвертого ранга; $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}$ — тензоры теплового расширения; ϑ — перепад температуры; $\underline{\mathbf{P}}_0, \underline{\boldsymbol{\mu}}_0$ — тензоры, образованные источниками, либо немеханической природы, либо являются результатом решения несвязанных задач. Для изотропного материала компоненты тензоров $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}$ принимают выражения $a_{ij} = \alpha_\tau g_{ij}$, $b_{ij} = \beta_\tau g_{ij}$, где α_τ, β_τ — коэффициенты линейного теплового расширения микрополярной теории упругости. С учетом выражения упругого потенциала при неизотермических процессах (5) функционал Лагранжа (1) примет вид [11]

$$\begin{aligned} L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = & \frac{1}{2} [a(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) + h] + l_0(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) - l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}), \\ h = & \int_V [(\underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathbb{A}} \otimes \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} \otimes \underline{\mathbb{D}} \otimes \underline{\mathbf{b}}) \vartheta^2] dV, \quad (6) \\ l_0(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = & \int_V [(\underline{\mathbf{P}}_0 - \underline{\mathbb{A}} \otimes \underline{\mathbf{a}} \vartheta) \otimes \underline{\gamma}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) + (\underline{\boldsymbol{\mu}}_0 - \underline{\mathbb{D}} \otimes \underline{\mathbf{b}} \vartheta) \otimes \underline{\kappa}(\boldsymbol{\psi})] dV. \end{aligned}$$

3. Система линейных алгебраических уравнений. Применив метод Ритца и записав условие стационарности (2) для лагранжиана (6) в дискретном виде, а также воспользовавшись ранее принятыми обозначениями в работах [9–11], приходим к системе линейных алгебраических уравнений для материала с центром симметрии произвольной анизотропии при неизотермических процессах:

$$DL(\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{\boldsymbol{\psi}}) = 0, \quad \begin{cases} + \mathbb{K}_{(1)}^{lj} \widehat{w}_l^p - \mathbb{K}_{(2)}^{lj} \widehat{\psi}_l^p = \mathbb{F}_{(1)}^j - \mathbb{T}_{(1)}^j, \\ - \mathbb{K}_{(3)}^{lj} \widehat{w}_l^p + \mathbb{K}_{(4)}^{lj} \widehat{\psi}_l^p = \mathbb{F}_{(2)}^j - \mathbb{T}_{(2)}^j, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{(1)}^{pq} & -\mathbb{K}_{(2)}^{pq} \\ -\mathbb{K}_{(3)}^{pq} & \mathbb{K}_{(4)}^{pq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{\mathbf{w}}^p \\ \widehat{\boldsymbol{\psi}}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbb{F}_{(1)}^q - \mathbb{T}_{(1)}^q \\ \mathbb{F}_{(2)}^q - \mathbb{T}_{(2)}^q \end{Bmatrix}. \quad (7)$$

Стоит упомянуть, что в работе [11] выписаны подынтегральные выражения $K_{(1)}^{lj} - K_{(4)}^{lj}$ с производными функций форм по декартовым координатам для изотропного материала:

$$\begin{aligned} K_{(1)}^{lj} &= \lambda N_{p,l} N_{q,j} + (\mu + \alpha) N_{p,i} N_{q,i} \delta_{jl} + (\mu - \alpha) N_{p,j} N_{q,l}, \\ K_{(2)}^{lj} &= -2\alpha \epsilon_{lji} N_p N_{q,i}, \quad K_{(3)}^{lj} = 2\alpha \epsilon_{ljk} N_{p,k} N_q, \\ K_{(4)}^{lj} &= \delta N_{p,l} N_{q,j} + (\gamma + \beta) N_{p,i} N_{q,i} \delta_{jl} + (\gamma - \beta) N_{p,j} N_{q,l} + 4\alpha N_p N_q \delta_{lj}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если положим $\alpha = 0$, то получим расщепленную систему уравнений (7) относительно независимых переменных $\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{\boldsymbol{\psi}}$. Данное свойство приводит не только к системе линейных алгебраических уравнений симметричной теории упругости относительно первого блока, но и к однородным уравнениям

для аппроксимации поля перемещений и микровращений, что отражает одинаковую сущность математического аппарата, схожего с классической теорией упругости. Это нетрудно заметить, если в выражениях (8) принять $\alpha = 0, \beta = 0$.

4. Аппроксимация поля перемещений и микровращений полиномами смешанной степени. Очевидно, что для материальных тензоров \mathbf{A}, \mathbf{D} характерна некоторая несогласованность по масштабному параметру длины $D^{ijkl} \sim l^2 A^{ijkl}$. Для учета этой особенности в краевых задачах микрополяридной теории упругости предлагается использовать аппроксимирующие полиномы более высокого порядка для поля перемещений, чем для поля микровращений [12, 13]. Следуя этой идеи, выпишем компоненты тензорно-блочных матриц жесткости и векторов сил для произвольной анизотропии при неизотермических процессах (7):

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{pq}^{lj} &= \int_{V_e} A^{ijkl} N_{p,s}^w N_{q,t}^w B_k^s B_i^t J dV_\xi, & \mathbb{K}_{pq}^{lj} &= \int_{V_e} A^{ijkm} C_{km}^{\cdot l} N_p^w N_{q,t}^w B_i^t J dV_\xi, \\ \mathbb{K}_{pq}^{lj} &= \int_{V_e} A^{inkl} N_{p,s}^w C_{in}^{\cdot j} N_q^w B_k^s J dV_\xi, \\ \mathbb{K}_{pq}^{lj} &= \int_{V_e} \left[A^{inkm} N_p^w N_q^w C_{km}^{\cdot l} C_{in}^{\cdot j} + D^{ijkl} N_{p,s}^w N_{q,t}^w B_k^s B_i^t \right] J dV_\xi, \\ \mathbb{F}_q^j &= \int_{V_e} F^j N_q^w J \rho dV_\xi + \int_{\Sigma_2} S^j N_q^w J_\Sigma d\Sigma_\xi, & \mathbb{F}_q^j &= \int_{V_e} m^j N_q^w J \rho dV_\xi + \int_{\Sigma_2} R^j N_q^w J_\Sigma d\Sigma_\xi, \\ \mathbb{T}_q^j &= \int_{V_e} \left(P_0^{ij} - A^{ijkl} a_{kl} \vartheta \right) N_{q,t}^w B_i^t J dV_\xi, \\ \mathbb{T}_q^j &= \int_{V_e} \left[\left(A^{inkl} a_{kl} \vartheta - P_0^{in} \right) C_{in}^{\cdot j} N_q^w + \left(\mu_0^{ij} - D^{ijkl} b_{kl} \vartheta \right) N_{q,t}^w B_i^t \right] J dV_\xi, \end{aligned}$$

где N_p^w — функции формы для аппроксимации поля перемещений в вершинах и в промежуточных узлах 20-узлового серендипова конечного элемента [14]:

$$\begin{aligned} N_p^w &= \frac{1}{8} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 + \xi_p^3 \xi^3) (\xi_p^1 \xi^1 + \xi_p^2 \xi^2 + \xi_p^3 \xi^3 - 2), & p &= \{1, 2, \dots, 8\}; \\ N_p^w &= \frac{1}{4} (1 - \xi^{1(2)}) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 + \xi_p^3 \xi^3), & \xi_p^1 &= 0, & p &= \{17, 18, 19, 20\}; \\ N_p^w &= \frac{1}{4} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 - \xi^{2(2)}) (1 + \xi_p^3 \xi^3), & \xi_p^2 &= 0, & p &= \{9, 11, 13, 15\}; \\ N_p^w &= \frac{1}{4} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 - \xi^{3(2)}), & \xi_p^3 &= 0, & p &= \{10, 12, 14, 16\}; \\ \xi_p^i &= \pm 1, \end{aligned} \tag{9}$$

N_p^ψ — функции формы лагранжева 8-узлового конечного элемента для аппроксимации поля микровращений [14]:

$$N_p^\psi = \frac{1}{8} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 + \xi_p^3 \xi^3), \quad p = \{1, 2, \dots, 8\}, \quad \xi_p^i = \pm 1, \tag{10}$$

где $\xi^{i(2)}$ — возведенная в степень 2 контравариантная компонента ξ^i вектора. При построении глобальной матрицы жесткости стоит учесть, что блок \mathbb{K} формирует матрицу размером $3 \overset{w}{n} \times 3 \overset{w}{n}$, где

$\overset{w}{n}$ — число узлов модели, сформированной 20-узловыми конечными элементами. В то же время блок \mathbb{K} формирует глобальную матрицу жесткости с шагом(офсетом) по строкам и столбцам, равным

$3 \overset{\psi}{n}$, размером $3 \overset{\psi}{n} \times 3 \overset{\psi}{n}$, где $\overset{\psi}{n}$ — число узлов модели, сформированной 8-узловыми конечными элементами. При построении глобальной матрицы жесткости блоками $\mathbb{K}_{(2)}, \mathbb{K}_{(3)}, \mathbb{K}_{(4)}$ можно принять правило,

по которому с точностью до транспонирования для узлов функций форм N_p^ψ задается шаг(офсет)

по строкам, равный 3^w , а для узлов N_q^ψ — шаг(офсет) по столбцам, равный 3^w . Таким образом, можно построить глобальную матрицу жесткости размером $(3^w + 3^\psi) \times (3^w + 3^\psi)$ по строкам и столбцам соответственно.

Вспомним, что функции формы 8-узловой лагранжева конечного элемента, интегрируемые по двухточечной схеме, приводят к эффекту запираания (“locking effect”) из-за ложных мод с нулевой энергией (“spurious zero-energy modes”). Поэтому для преодоления этого недостатка к полиномам данного типа в микрополярной среде применяется обобщенная схема редуцированного и селективного интегрирования (“reduced and selective integration”), подробно изложенная в работе [15] на примере изотропной среды:

$$\mathbb{K}_{pq}^{lj} \approx 8 \overset{\circ}{K}_{pq}^{lj}(0, 0, 0) J(0, 0, 0) + \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{c=1}^2 \omega_a \omega_b \omega_c \left(K_{pq}^{lj}(\xi_a, \xi_b, \xi_c) - \overset{\circ}{K}_{pq}^{lj}(\xi_a, \xi_b, \xi_c) \right) J(\xi_a, \xi_b, \xi_c),$$

$$\overset{\circ}{K}_{pq}^{lj} = \frac{3\delta + 2\gamma}{3} N_{p,k} N_{q,i} g^{kl} g^{ij}, \quad \omega_a = 1, \quad \xi_a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad a = 1, 2,$$

где ω_a, ξ_a — квадратуры Гаусса–Лежандра для двухточечной схемы интегрирования; $\overset{\circ}{K}_{(4)}$ — удельная жесткость шаровой части тензора изгиба-кручения.

Для анализа тензорных полей кинематических (3) и определяющих соотношений (5) изотропного материала при неизотермических процессах с учетом (9), (10) удобно записать выражения в дискретном виде:

$$\gamma_{ij} = N_{p,i}^w \widehat{w}_j^p - \epsilon_{ijm} N_p^\psi \widehat{\psi}_m^p - a_\tau \delta_{ij} \vartheta, \quad \varkappa_{ij} = N_{p,i}^\psi \widehat{\psi}_j^p - b_\tau \delta_{ij} \vartheta,$$

$$p_{ij} = \lambda(N_{p,k}^w \widehat{w}_k^p - 3 a_\tau \vartheta) \delta_{ij} + (\mu + \alpha) N_{p,i}^w \widehat{w}_j^p + (\mu - \alpha) N_{p,j}^w \widehat{w}_i^p - 2 \alpha \epsilon_{ijm} N_p^\psi \widehat{\psi}_m^p - 2 \mu a_\tau \delta_{ij} \vartheta - p_{ij}^0,$$

$$\mu_{ij} = \gamma(N_{p,k}^\psi \widehat{\psi}_k^p - 3 b_\tau \vartheta) \delta_{ij} + (\delta + \beta) N_{p,i}^\psi \widehat{\psi}_j^p + (\delta - \beta) N_{p,j}^\psi \widehat{\psi}_i^p - 2 \mu b_\tau \delta_{ij} \vartheta - \mu_{ij}^0,$$

здесь $N_{p,i}^w, N_{p,j}^w, N_{p,i}^\psi, N_{p,j}^\psi$ — производные функций форм в декартовом базисе.

5. Задача о кубе. Рассмотрим модель кубика со стороной 0.02 мм, на верхнюю грань которого действует равномерное давление $P = 120$ Н/мм², при этом боковые грани жестко заземлены (см. рис. 1). Примем изотропный материал — полые стеклянные сферы в эпоксидной матрице [16–18] с параметрами [Н/мм²] $\lambda = 2096, \mu = 1033, \alpha = 115; [H] \delta = -2.73, \gamma = 4.10, \beta = 0.13$. Модель кубика симметричной теории упругости выполнена в программе ABAQUS и аппроксимирована по схеме 20x20x20 конечными элементами квадратичного типа C3D20. Модель кубика микрополярной теории упругости аппроксимирована по той же схеме конечными элементами квадратичного типа C6D20 и конечными элементами с полиномами смешанной степени C6D208 в программе собственной разработки, реализованной в стеке C++, CUDA C. Здесь для моделирования симметричной теории упругости микрополярным конечным элементом C6D20 был принят материальный параметр $\alpha = 0$. Общее число узлов модели для элементов типа C3D20, C6D20 составляет 35721, для элементов типа C6D208 — 44982, из них 9261 узел приходится на полиномы лагранжева типа. Общее число конечных элементов каждого типа составляет 8000. Решение системы (7) выполнялось итерационным методом сопряженных градиентов CGM без предобусловливателя. Вычисления проводились на графической видеокарте GEFORCE GTX 960M.

Сравнение скорости сходимости итерационного процесса CGM при аппроксимации конечными элементами типа C6D20 и C6D208

Тип КЭ	Итерация	Невязка, r	Отношение r_1/r_0	Время, с
C6D20	8613	9.953374e-11	8.903740e-01	162
C6D208	4057	9.778749e-11	8.985241e-01	36

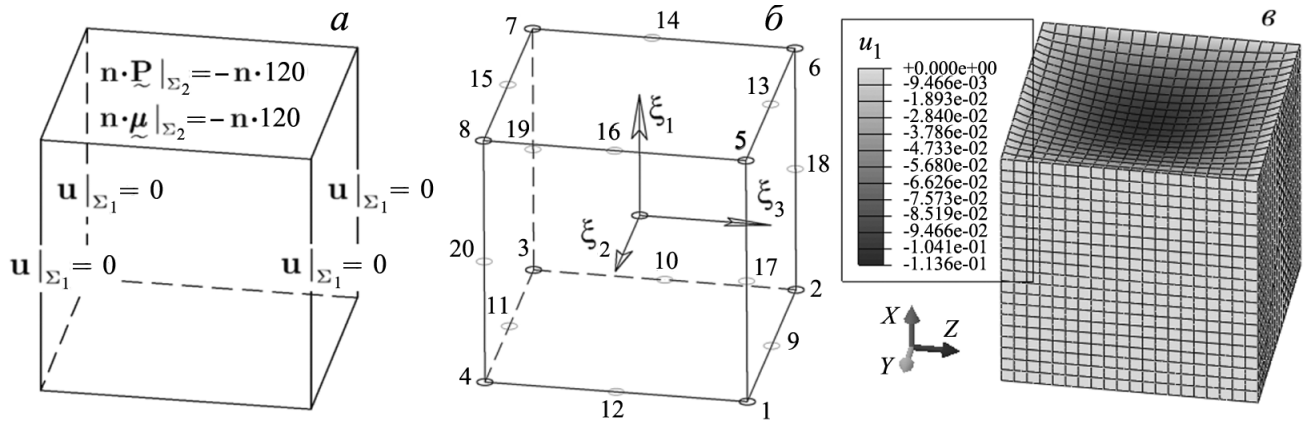


Рис. 1. Расчетная схема (а), нумерация узлов 8- и 20-узлового конечного элемента со смешанными полиномами (б), поле перемещений u_1 деформированного кубика (в)

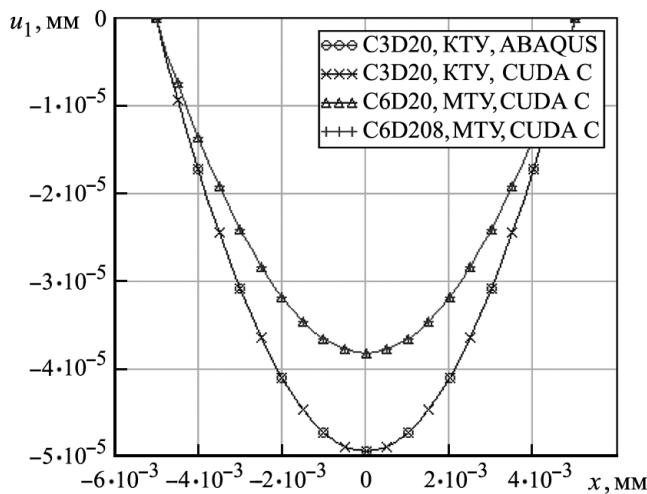


Рис. 2. Графики вертикальных перемещений u_1 вдоль средней линии нижней грани кубика для классической (КТУ) и микрополярной (МТУ) теорий упругости

который отвечает за микрополярные свойства материала, но и малым размером модели, сопоставимым с ее масштабным параметром длины [4, 12, 13, 16–18]. Данные результаты могут быть актуальны для исследования задач наномеханики микрополярного континуума с целью изучения механических свойств материала методом конечных элементов.

6. Выводы. Как видно из таблицы, в отличие от конечного элемента С6D20 применение С6D208 с полиномами смешанной степени для рассмотренной задачи увеличивает скорость сходимости более чем в 4 раза и уменьшает количество итераций более чем в 2 раза. Из рис. 2 также видно, что графики перемещений симметричной теории упругости вдоль средней линии нижней грани кубика, найденные из численного эксперимента программой ABAQUS и собственной программой, совпадают. Графики перемещений, аппроксимированные конечными элементами типа С6D20, С6D208, также совпадают. Данные результаты свидетельствуют о корректно реализованной модели микрополярной среды, аппроксимированной полиномами смешанной степени. Кроме того, перемещения средней точки нижней грани для классической и микрополярной сред отличаются на $\approx 23\%$. Это обусловлено не только отличным от нуля параметром α ,

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Победра Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности: Учеб. пособие. 2-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1995.
2. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
4. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories.1. Foundation and Solids. N.Y.: Springer-Verlag, 1999.
5. Никабадзе М.У. Развитие метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. М.: Изд-во Попечительского совета мех.-мат. ф-та МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014.
6. Nikabadze M., Ulukhanyan A. Some variational principles in the three-dimensional micropolar theories of solids and thin solids // Theoretical Analyses, Computations, and Experiments of Multiscale Materials. Vol. 175. Advanced Structured Materials. Switzerland, 2022. 193–251.
7. Nikabadze M., Ulukhanyan A. On some variational principles in micropolar theories of single-layer thin bodies // Continuum Mechanics and Thermodynamics. Germany, 2022.
8. Nikabadze M., Ulukhanyan A. Generalized Reissner-type variational principle in the micropolar theories of multilayer thin bodies with one small size // Continuum Mechanics and Thermodynamics. Germany. 2022. 34, N 2.

9. Романов А.В. О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости в случае трансверсально-изотропной среды // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2022. № 4. 35–39.
10. Романов А.В. О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости в случае ортотропной среды // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. № 1. 68–72.
11. Романов А.В. О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости при неизотермических процессах // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. № 2. 64–68.
12. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой: Нелокальная теория упругости. М.: Наука, 1975.
13. Эринген А.К. Теория микрополярной упругости. Разрушение / Под ред. Г. Либовица. Т. 2. Математические основы теории разрушения. М.: Мир, 1975. 646–751.
14. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013.
15. Романов А.В. Применение метода редуцированного и селективного интегрирования в задачах микрополярной теории упругости // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2024. № 1. 65–69.
16. Lakes R.S. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized continua // Continuum Models for Materials with Micro-structure / Ed. by H. Muhlhaus. N.Y.: J. Wiley, 1995. 1–22.
17. Lakes R.S. Experimental microelasticity of two porous solids // Int. J. Solids and Struct. 1986. 22, N 1. 55–63.
18. Lakes R.S. Cosserat micromechanics of structured media: Experimental methods // Proc. Amer. Soc. Composites. 3rd Technical Conf. Sept. 25–29. Seattle, 1988. 505–516.

Поступила в редакцию
14.06.2023

УДК 53.088.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛА ПОВОРОТА ГОЛОВЫ В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ ПРИ ПОМОЩИ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ ДАТЧИКОВ

А. А. Петров¹, В. В. Латонов², А. П. Кручинина³

Отслеживание движений человека и определение их особенностей часто необходимо при разработке устройств, которые человек носит на себе или использует в производстве. В связи с этим задача детектирования начала вращения представляется актуальной и имеет множество приложений в бионавигации и биомеханике. Одна из главных сложностей в этих задачах — минимизация задержки обнаружения детектируемого движения. В работе рассматривается задача детектирования момента начала поворота головы при помощи закрепленных на ней инерциальных датчиков — трехосных акселерометра и датчика угловых скоростей. Необходимость определения начала поворота головы возникает при попытке решения задачи дополнения вестибулярной информации в специальных условиях, например для решения проблемы вестибулосенсорного конфликта, возникающего в состоянии невесомости.

Ключевые слова: космический эксперимент, поворот головы, акселерометр, датчик угловых скоростей, инерциальные датчики, вестибулярный аппарат.

Human movements capture and determining their features is often necessary in the development of devices worn by a person or used by him in development. In this regard, the problem of detecting the beginning of rotation seems to be relevant and has many applications in bionavigation and biomechanics. One of the main difficulties in these tasks — minimizing the

¹ Петров Александр Андреевич — студ. ф-та космических исследований МГУ, e-mail: a.petrov1232@yandex.ru.
Petrov Alexandr Andreevich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Space Research.

² Латонов Василий Васильевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. Научного центра мирового уровня “Сверхзвук”, e-mail: WLatonov@gmail.com.

Latonov Vasilii Vasilevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Research Scientist of World-Class Scientific Center “Supersonic”.

³ Кручинина Анна Павловна — канд. физ.-мат. наук, ассист. каф. прикладной механики и управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: anna.kruchinina@mech.math.msu.ru.

Kruchinina Anna Pavlovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Applied Mechanics and Control.