Механика

УДК 539.3

КРИВЫЕ ПОЛЗУЧЕСТИ, ПОРОЖДАЕМЫЕ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛЬЮ ТЕЧЕНИЯ ТИКСОТРОПНЫХ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД, УЧИТЫВАЮЩЕЙ ЭВОЛЮЦИЮ СТРУКТУРЫ

А. В. Хохлов[1]

Продолжено системное аналитическое исследование математических свойств предложенной ранее автором нелинейной модели сдвигового течения тиксотропных вязкоупругопластических сред, учитывающей взаимное влияние процесса деформирования и эволюции структуры. Получены система двух дифференциальных уравнений для описания ползучести и точное представление ее общего решения (кривых ползучести и эволюции структурированности) в явном виде. Для произвольных шести материальных параметров и (возрастающей) материальной функции, управляющих моделью, аналитически изучены базовые свойства семейства кривых ползучести, порождаемых моделью, найдены индикаторы ее применимости. Исследован характер зависимости кривых ползучести, скорости ползучести и структурированности не только от времени (монотонность, выпуклость, асимптоты), но и от уровня напряжения и начальной структурированности материала, а также от материальных параметров и функции модели. Тем самым начат анализ способности модели описывать поведение не только жидкообразных, но и твердообразных (густеющих, твердеющих, затвердевших) тиксотропных вязкоупругопластических сред.

Ключевые слова: тиксотропия, вязкоупругопластичность, полимерные системы, структурированность, структурно-реологическая модель, индикаторы применимости, кривые ползучести, скорость ползучести, сверхпластичность.

We proceed the systematic analytical study of the nonlinear Maxwell-type constitutive equation for shear flow of tixotropic viscoelastic media formulated in the previous article. It accounts for interaction of deformation process and structure evolution, namely, the influence of the kinetics formation and breakage of chain cross-links, agglomerations of molecules and crystallites on viscosity and shear modulus and deformation influence on the kinetics. The constitutive equation is governed by an increasing material function and six positive parameters. Assuming stress is constant (in order to simulate creep conditions), we formulate the set of two nonlinear differential equations for two unknown functions (namely, strain and cross-links density) and obtain its exact general solution in explicit form. We examine the properties of creep curves generated by the model for arbitrary material function and material parameters and analyze dependence of creep curves and cross-links density on time, stress level, initial cross-links density and material parameters governing the model. Thus, we prove that the model not only describes basic phenomena observed for simple shear flow of shear thinning fluids but it is capable to simulate creep, relaxation and other phenomena observed for solid bodies.

Key words: thixotropy, viscoelasticity, polymeric systems, structure parameter, rheological model, applicability indicators, creep curves family, creep rate, superplasticity.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-4-6

1. Введение. Адекватное описание нелинейных реологических эффектов и построение определяющих соотношений (ОС) течения неньютоновских вязких жидкостей и вязкоупругопластических сред (например, суспензий, гелей, полимеров в вязкотекучем состоянии или в виде расплавов и растворов, битумов и их модификаций минеральными и эластомерными наполнителями, металлов и сплавов в сверхпластичном состоянии и т.п.) важны для понимания закономерностей и моделирования огромного количества природных и технологических процессов [1–7]: движение магмы, поведение грунтов, сход селей и лавин, разработка разнообразных технологий переработки полимеров

[1] *Хохлов Андрей Владимирович* — канд. техн. наук, вед. науч. сотр. НИИ механики МГУ; вед. науч. сотр. СВФУ им. М.К. Аммосова; e-mail: andrey-khokhlov@ya.ru.

Khokhlov Andrew Vladimirovich — Candidate of Technical Sciences, Lead Research Scientist, Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics; Lead Research Scientist, North-Eastern Federal University.

© Хохлов А. В., 2024
© Khokhlov A. V., 2024
CC BY-NC

и других материалов (экструзия волокон, прессование, штамповка, 3D-печать заготовок полимерами, металлами, C-SiC пастами и т.п.), нефтедобыча и перекачка нефти, дорожное строительство, производство лаков, красок, масел, пищевых продуктов и т.п.

Настоящая работа — прямое продолжение статей [8–10], посвященных формулировке одноосного прототипа нелинейного ОС для изотермического сдвигового течения тиксотропных вязкоупругопластических сред, учитывающего взаимное влияние процессов деформирования и изменения структуры (кинетики образования и разрушения межмолекулярных связей, ассоциатов макромолекул, кристаллитов, зерен), его сведению к задаче Коши для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{s} = ae^{\beta w} - se^{(\beta-\alpha)w}, \tag{1}$$

$$\dot{w} = c[1 - w(1 + bg(s))] \tag{2}$$

для безразмерных касательного напряжения $s(t) = \tau(t)/\tau_c$ и степени структурированности $w(t) \in [0;1]$ (t — безразмерное время) и аналитическому исследованию положения равновесия этой системы, ее интегральных кривых, фазового портрета и кривых течения в зависимости от всех пяти безразмерных материальных параметров (МП) $a, b, c, \alpha, \beta \geqslant 0$ (см. ниже), скорости сдвига ν и материальной функции (МФ) $g(s)$. Задающая зависимость скорости разрушения структуры от напряжения МФ $g(s)$, $s \geqslant 0$ (см. (5)) предполагается произвольной непрерывной, неубывающей, кусочно-гладкой функцией. Скорость простого сдвига $\dot{\gamma} = \nu$ в работах [8–10] считалась постоянной и включалась в безразмерный параметр $a = \nu\eta_0/\tau_c$. При таком нагружении $\gamma = \nu t$ и можно исследовать не только реологическую кривую и кривую вязкости [8–10], но и диаграммы деформирования с постоянной скоростью, и кривые релаксации, порождаемые моделью. В настоящей работе рассматривается иной режим нагружения (постоянство напряжения $s(t)$ при $t > 0$, а не ν) и поэтому система (1), (2) будет системой уравнений для угла сдвига $\gamma(t)$ и структурированности $w(t)$.

Для произвольных МП и МФ в [8–10] установлена единственность положения равновесия системы (1), (2), в общем виде исследованы его зависимости от всех МП и скорости сдвига, доказано, что все они монотонны. Доказано также, что положение равновесия всегда устойчиво и возможны ровно три случая: положение равновесия — узел, или вырожденный узел, или фокус, а случаи седла или центра невозможны. Найдены критерии реализации каждого случая в виде явных ограничений на МФ, МП и скорость сдвига, проиллюстрированы поведение интегральных и фазовых кривых модели, их эволюция с ростом скорости сдвига [10] и влияние на них немонотонности $w(t)$. Выведены и исследованы уравнения кривой течения и кривой вязкости; доказано, что модель приводит к возрастающей зависимости равновесного напряжения от скорости сдвига и к убывающей кривой кажущейся вязкости, отражающим важнейшие типичные свойства экспериментальных кривых течения псевдопластических сред [1–7]; намечены способы идентификации модели.

Обоснование актуальности темы исследования и подробный литературный обзор даны во введении статей [8–10], поэтому в настоящей работе опущена библиография (около 60 ссылок) по теме моделирования тиксотропных сред. Отметим лишь, что только в немногих из сотни известных ОС жидких сред учитываются не только их вязкость и пластичность, но и вязкоупругость и процессы формирования и разрушения структуры, а последняя в большинстве случаев описывается всего одним структурным параметром. Приложению сформулированного ОС к описанию конкретных экспериментальных данных и решению краевых задач практически никогда не предшествует системное аналитическое изучение математических следствий из ОС для произвольных МП и МФ, управляющих им, а также анализ, позволяющий очертить круг реологических эффектов, которые ОС может или не может описывать, найти область и индикаторы применимости ОС, которые удобно проверять по данным испытаний (как это сделано в серии статей автора, посвященных качественному анализу ряда линейных и нелинейных ОС вязкоупругопластичности [11–18]).

Основная задача настоящей работы — исследовать свойства кривых ползучести (КП), порождаемых моделью (1),(2), и особенности эволюции структуры в зависимости от МП и МФ и тем самым начать анализ способности модели описывать деформирование не только жидкообразных, но и твердообразных (густеющих, твердеющих, затвердевших) тиксотропных вязкоупругопластических сред, моделировать эффекты, свойственные твердым вязкоупругопластическим материалам: ползучесть, восстановление, релаксацию, типичное поведение диаграмм деформирования, скоростное и деформационное упрочнение и др. (в частности, изучены и диаграммы деформирования с постоянной скоростью сдвига, порождаемые моделью). Семейство КП $\gamma(t, \bar{s}, w_0)$ зависит от заданного уровня напряжения $\bar{s}$ и начальной структурированности w_0, и мы исследуем характер зависимости КП не только от времени (монотонность, выпуклость, асимптоты), но и от параметров $\bar{s}$ и w_0: выясним, монотонно ли зависит $\gamma(t, \bar{s}, w_0)$ от параметров и как они влияют на скорость ползучести и асимптоту КП. Кроме того, исследуем, как меняется структурированность $w(t)$ при разных МФ, МП и уровнях напряжения и какие новые эффекты (непривычные свойства КП) порождает непостоянство $w(t)$ в сравнении с типичными КП структурно-стабильных материалов.

2. Сведение модели течения тиксотропных сред к системе двух дифференциальных уравнений. В основу описания изотермического сдвигового деформирования тиксотропных материалов (паст, гелей, суспензий, полимеров в высокоэластичном и вязкотекучем состояниях, в виде расплавов и концентрированных растворов, твердеющих смол, пластичных металлов и сплавов и др.) положим нелинейную модель Максвелла

$$\dot{\gamma} = \dot{\tau}/G + \tau/\eta, \tag{3}$$

в которой τ — касательное напряжение, $\dot{\gamma} = \nu$ — скорость сдвига (скорость простого сдвига ν в работах [8–10] считалась постоянной — заданным кинематическим параметром), а МП зависят от изменения структуры материала под влиянием деформирования [8]: будем считать, что модуль сдвига G и динамическая вязкость η зависят от одного безразмерного структурного параметра $w(t)$: $G = G(w)$, $\eta = \eta(w)$, $w(t) \in [0, 1]$, $w(0) = w_0$, $w_0 \in [0, 1)$. Под $w(t)$ будем понимать степень структурированности (характеризующую степень сшитости или степень кристалличности полимера, пористость, средний размер зерен поликристаллических материалов, их форму и ориентированность, состояние границ зерен и т.п.), например отношение концентрации надмолекулярных или межмолекулярных связей (зацеплений, водородных связей, химических сшивок и т.п.) в текущий момент времени к некоторому максимально возможному значению концентрации связей для данной температуры. На данном этапе будем характеризовать текущую структуру материала только одним структурным параметром $w(t)$, не различая механизмы влияния разных элементов надмолекулярной структуры на вязкость (или пренебрегая ими); пока будет важно лишь то, что материал имеет структуру, которая разрушается под действием сдвиговых напряжений и может восстанавливаться. Даже такой простой подход позволяет описать большое количество наблюдаемых эффектов [8–10]. В дальнейшем модель будет обобщена введением второго структурного параметра, учитывающего, например, ориентирование и распрямление макромолекул (гибкоцепных) полимеров при одноосном деформировании или форму и ориентированность зерен поликристаллических материалов, уровень неравновесности их границ, плотность дисперсоидов в сплавах и другие конкретные характеристики структуры и механизмы ее влияния на деформирование [19–29].

Вообще говоря, модуль сдвига G и динамическая вязкость η зависят не только от w (и других структурных параметров), но и от температуры, давления и скорости сдвига ν (градиента скорости или напряжения τ), но в настоящей работе температуру и давление мы считаем постоянными. Величины $G = G(w)$ и $\eta = \eta(w)$ должны быть возрастающими функциями от степени сшитости, поэтому примем, что

$$\eta(w) = \eta_0 e^{\alpha w}, \quad G(w) = G_0 e^{\beta w}, \quad \eta_0, G_0 > 0, \quad 0 \leqslant \beta < \alpha \tag{4}$$

(следуя традициям кинетики, выберем эти функции экспоненциальными, а в последующих работах рассмотрим и степенные функции с вещественными показателями). Вязкость обычно сильнее зависит от степени сшитости (и от температуры), чем модуль сдвига, поэтому предполагаем, что $\beta < \alpha$ (и можно положить $\beta = 0$, пренебрегая зависимостью модуля сдвига от w). Время релаксации $T = \eta/G$ модели Максвелла (3) выражается формулой $T(w) = T_0 e^{(\alpha-\beta)w}$, $T_0 = \eta_0/G_0$, и увеличивается с ростом w. В (4) МП G_0 и η_0 характеризуют минимальные модуль сдвига и динамическую вязкость при $w = 0$, а также в начальный момент, когда $w(0) = w_0$. Начальное значение структурированности $w_0 \in [0, 1)$ можно рассматривать как дополнительный МП модели.

В уравнение (3) входят две неизвестные функции времени $\tau(t)$ и $w(t)$, и следует добавить некоторое кинетическое уравнение, описывающее эволюцию структурированности материала во времени с учетом влияния напряжения (процесса деформирования).

Изменение структурированности в процессе деформирования происходит в результате наложения двух конкурирующих процессов — разрушения имеющихся сшивок и образования новых. С ростом напряжения разрушение (т.е. убывание $w(t)$) ускоряется (и вязкость падает), а скорость образования новых сшивок можем в первом приближении (при фиксированной температуре) считать постоянной и пропорциональной плотности вакансий $(1-w)$. Поэтому кинетическое уравнение для структурированности можно принять в виде

$$\dot{w} = k_1(1-w) - k_2 g(s) w, \tag{5}$$

где $k_1, k_2 > 0$ — МП (вообще говоря, зависящие от температуры), задающие скорости образования и разрушения сшивок (их размерность $с^{-1}$); $g(s)$, $s \geqslant 0$, — неотрицательная возрастающая (нестрого) функция (с начальным значением $g(0) = 1$), задающая зависимость скорости разрушения сшивок от безразмерного напряжения $s = \tau/\tau_c$ (τ_c — некоторое характерное касательное напряжение: пороговое, предельное или просто $\tau_c = G_0$). Например, можно использовать [10] МФ вида

$$g(s) = e^{hs}, \quad g(s) = 1 + (hs)^2, \quad g(s) = 1 + hs, \quad g(s) = 1 + \ln(1 + hs), \quad h > 0. \tag{6}$$

Модель (3)–(5) учитывает кинетику взаимосвязанного протекания двух сопряженных процессов — сдвигового течения и структурных изменений в материале. В уравнении (3) вязкость и модуль упругости зависят от $w(t)$ (характеристика второго процесса), а скорость изменения структуры (5) зависит от напряжения (характеристики первого процесса). Построенная модель управляется одной МФ $g(s)$ и шестью МП: $k_1, k_2, \eta_0, G_0, \alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$.

В дополнение к безразмерному напряжению s введем безразмерное время $\bar{t} = t/T_0$, где $T_0 = \eta_0 G_0^{-1}$ — минимальное время релаксации модели Максвелла (3) (при $w = 0$), и заменим аргумент в искомых функциях $s(t)$ и $w(t)$ системы (3), (5) по формулам $Y(\bar{t}) = y(\bar{t}T_0)$ и $Y'(\bar{t}) = T_0\dot{y}(\bar{t}T_0)$. Тогда, упростив обозначения (заменив $\bar{t}$ на t, штрих на точку в обозначении дифференцирования, прописные буквы S, W в обозначении функций от $\bar{t}$ на строчные), получим уравнения модели (3)–(5) в безразмерном виде (1), (2). Это автономная система двух нелинейных дифференциальных уравнений для $s(t)$ и $w(t)$, $a = \nu\eta_0/\tau_c = \nu T_0 G_0/\tau_c$ — безразмерный параметр, зависящий от заданной скорости сдвига ν и начальной вязкости (или времени релаксации), $b = k_2/k_1$ и $c = k_1 T_0$ — безразмерные МП, характеризующие борьбу процессов образования и разрушения сшивок и отношение их скоростей к величине $1/T_0$. К системе (1), (2) следует добавить начальные условия $s(0) = s_0$, $w(0) = w_0$, тогда она будет удовлетворять условиям теоремы существования и единственности решений задачи Коши при условии, что МФ $g(s)$ непрерывно дифференцируема при $s > 0$.

3. Существование, единственность и устойчивость положения равновесия модели, его зависимость от скорости сдвига и материальных параметров. В работе [8] доказано, что при любых МП $a, b, \alpha, c, \eta_0, G_0 > 0, \beta \geqslant 0$ и любой неубывающей МФ $g(s)$ система дифференциальных уравнений (1), (2) (при постоянной скорости сдвига) имеет единственное положение равновесия (s_*, w_*) в области $w \in (0; 1)$, $s > 0$. Его координаты — решение системы уравнений

$$\ln s_*/a = \alpha(1 + bg(s_*))^{-1}, \tag{7}$$

$$w_* = (1 + bg(s_*))^{-1}. \tag{8}$$

Они зависят лишь от трех параметров α, $a = \nu\eta_0/\tau_c$ и $b = k_2/k_1$ (и не зависят от G_0, β, c). Функции $s_* = s_*(a, b, \alpha)$ и $w_* = w_*(a, b, \alpha)$ монотонны по каждому из трех аргументов в области $a, b, \alpha > 0$, в частности равновесное напряжение $s_* = s_*(a)$ — возрастающая функция параметра a (и скорости сдвига ν) на интервале $a > 0$ и $s_*(a)/a \to 1$ при $a \to \infty$, а равновесная степень сшитости $w_* = w_*(a)$ убывает по a (и по ν) и $w_*(+\infty) = 0$ [8].

Из (7) следует зависимость установившейся кажущейся вязкости $\mu = \tau_*/\nu = \eta_0 s_*/a$ от равновесного напряжения $s_* = \tau_*/\tau_c$ (и от скорости сдвига ν или степени сшитости w_*):

$$\mu = \eta_0 e^{\alpha/[1+bg(s_*)]}, \quad \text{или} \quad \mu = \eta(w_*) = \eta_0 e^{\alpha w_*}. \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть $a, b, \alpha, c, \eta_0, G_0 > 0, \beta \geqslant 0$ и МФ $g(s)$ кусочно-дифференцируема и непрерывна при $s \geqslant 0$, не убывает, $g(0) = 1$ и $g(+\infty) = +\infty$. Тогда равновесная кажущаяся вязкость $\mu(a, b, \alpha)$ (9) монотонно возрастает по α, убывает по b и по a и существуют пределы вязкости (9) и производных напряжения и степени сшитости при $a \to +0$ и $a \to \infty$* (т.е. при $\nu \to +0$ и $\nu \to \infty$):

$$\begin{gathered} \mu_0 = \eta_0 Q, \quad \mu_\infty = \eta_0 > 0, \quad \mu_0/\mu_\infty = Q; \\ s_*'(0+) = Q, \quad w_*'(0+) = -Qb(1+b)^{-2}g'(0), \quad \mu'(0+)/w_*'(0+) = \alpha\eta_0 Q, \end{gathered} \tag{10}$$

где $Q = e^{\alpha/[1+bg(0)]} = e^{\alpha/(1+b)} \in (1, e^\alpha)$.

Все утверждения теоремы 1 доказаны в [8]. Таким образом, модель описывает возрастание реологической кривой $s_*(a)$, убывание кривой вязкости $\mu(\nu)$ и существование конечных пределов вязкости при $\nu \to +0$ и $\nu \to \infty$ (максимальной и минимальной вязкостей), т.е. важнейшие качественные свойства типичных кривых вязкости, наблюдаемых для разных псевдопластических жидкостей [1–7]. Очевидно, из (10) при любых значениях МП и любой МФ следует, что $0 < \mu_\infty < \mu_0$ и

$\mu_\infty > e^{-\alpha}\mu_0$, отношение μ_0/μ_∞ совпадает с начальным углом наклона $s'_*(0+)$ реологической кривой $s_*(a)$, зависит лишь от параметров α, b (и не зависит от МФ $g(s)$, от η_0 и других МП модели (3)–(5)). Таким образом, модель описывает общее свойство $\mu_\infty < \mu_0$ типичных кривых вязкости, наблюдаемых для разных псевдопластических жидкостей (часть эффекта тиксотропии). В теоретическое равенство $\mu_0/\mu_\infty = s'_*(0+)$ входят измеряемые величины, и проверка его выполнения по данным испытаний может служить удобным индикатором применимости модели (3)–(5) к конкретному полимеру (твердообразному материалу, раствору, расплаву, суспензии и т.п.). Равенства (10) удобны и для идентификации параметров α, b, η_0.

В работе [9] вычислены собственные значения линеаризованной в окрестности точки равновесия (s_*, w_*) системы (1), (2) и исследован ее фазовый портрет.

Теорема 2. *В предположениях теоремы* 1 *единственная точка равновесия* (s_*, w_*) *системы дифференциальных уравнений* (1), (2) *устойчива при произвольных МП и МФ и может быть только узлом, вырожденным узлом или фокусом* (*седлом или центром она быть не может*). *Критерии реализации каждого из этих трех случаев имеют вид*:

$$[cw_*^{-1} - e^{(\alpha-\beta)w_*}]^2 > 4abc\alpha w_* g'(s_*)e^{\beta w_*}, \tag{11}$$

$$[cw_*^{-1} - e^{-(\alpha-\beta)w_*}]^2 = 4abc\alpha w_* g'(s_*)e^{\beta w_*}, \tag{12}$$

$$[cw_*^{-1} - e^{-(\alpha-\beta)w_*}]^2 < 4abc\alpha w_* g'(s_*)e^{\beta w_*}, \tag{13}$$

где $s_* = ae^{\alpha w_*}$, $w_* = (1 + bg(s_*))^{-1}$, $abc = k_2T_0\nu\eta_0/\tau$.

Существование устойчивого фокуса у системы (1), (2) при ограничениях (13) на МП и скорость сдвига означает немонотонность ее решений $s(t)$, $w(t)$ и *существование режима деформирования с* (*затухающими*) *колебаниями напряжения и степени сшитости при выходе на стационарные значения* s_*, w_* при $t \to \infty$.

Отметим, что *положение равновесия* (7), (8) *не зависит от параметров* G_0, β *и* c *в формулах* (4) *и* (2), *но тип точки равновесия* (фазовый портрет системы (1), (2)) *зависит от них*, поскольку β и c входят в критерии (11)–(13). Поэтому управлять поведением интегральных кривых, не сдвигая точку равновесия, проще всего с помощью параметров β и c. Зависимость характеристических корней и типа точки равновесия от МФ, всех МП и скорости сдвига детально изучена в статье [10]. Установленные свойства позволяют проследить, как эволюционируют интегральные кривые и фазовые портреты модели, и выбрать наборы МП и МФ, обеспечивающие наглядные иллюстрации эволюции кривых [10].

4. О диаграммах деформирования и кривых релаксации, порождаемых моделью. Безразмерные диаграммы деформирования с постоянной скоростью, порождаемые моделью (3)–(5), задаются в параметрической форме уравнениями $s(t)$, $\gamma(t) = \Upsilon at$, где t — безразмерное время, $s(t)$ — решение системы (1), (2) с начальным условием $s(0) = 0$ и произвольной начальной структурированностью $w(0) = w_0$, $w_0 \in [0; 1)$. Здесь $\Upsilon = T_0\tau_c/\eta_0 = \tau_c/G_0$ — безразмерный нормировочный множитель (он может быть равен единице, если обезразмерить напряжения делением на G_0, т.е. зафиксировать $\tau_c = G_0$, но тогда в случае твердообразных тел рабочий диапазон безразмерных напряжений попадет в диапазон до 0.05 и менее). Производная деформации по безразмерному времени в уравнениях (1), (2) (обозначенная точкой) выражается формулами $\dot\gamma = \nu T_0 = \Upsilon a$ через размерную скорость сдвига ν и безразмерный параметр a. Поэтому, зная решение $s(t)$ для фиксированных a и w_0, легко получить диаграмму деформирования $s(\gamma, a, w_0)$ или $\tau(\gamma, \nu, w_0)$ (в размерном виде), исключив параметр $t = \gamma/(\Upsilon a)$. В пределе при $a \to 0$ (положив $a = 0$ в (1), (2)) можем получить и исследовать кривые релаксации напряжения $s(t; \gamma_0, w_0)$. В последнем случае оказывается, что $s_* = 0$, и можно доказать, что при любых МП и МФ все кривые релаксации $s(t; \gamma_0, w_0)$ убывают и имеют при $t \to \infty$ общую асимптоту $s = 0$ (как и кривые релаксации, порождаемые линейной моделью Максвелла и нелинейной моделью вязкоупругопластичности типа Максвелла [12]). Доказанные ранее в [8, 9] существование единственного положения равновесия (s_*, w_*) системы (1), (2) и его устойчивость при любых МФ и МП означают, что $s(t) \to s_*$ при $t \to \infty$ и любая диаграмма деформирования $s(\gamma, a, w_0)$ обладает при $\gamma \to \infty$ горизонтальной асимптотой $s = s_*$, где напряжение установившегося течения $s_* = s_*(a, b, \alpha)$ (можно трактовать его как предел текучести) зависит от скорости сдвига согласно (7), (8), но не зависит от начальной структурированности материала w_0. Свойства зависимости $s_*(a, b, \alpha)$ детально исследованы в [8]. В частности, с ростом параметра a (с ростом скорости сдвига) $s_*(a)$ возрастает, а $w_*(a)$ убывает, а от начальной структурированности $s_*(a)$ и $w_*(a)$ не зависят. Но детальное исследование свойств диаграмм деформирования и кривых релаксации модели (3)–(5) — тема других работ. Отметим только, что все диаграммы деформирования, порождаемые нелинейной моделью типа Максвелла (см. ОС (21)), тоже имеют горизонтальные асимптоты, зависящие от скорости деформирования [15].

5. Свойства кривых ползучести, порождаемых моделью (3)–(5). Система дифференциальных уравнений для неизвестных функций $\gamma(t)$ и $w(t)$ как функций безразмерного времени t, описывающая ползучесть при постоянном напряжении, получается при задании в (1), (2) $s(t) = \bar{s} = \text{const}$ при $t > 0$, т.е. при задании $\dot{s} = 0$ и $g(s) = g(\bar{s})$. В режиме ползучести напряжение известно, ищется другая пара неизвестных процессов, величина $a = \nu\eta_0/\tau_c$ не постоянна, а безразмерная функция $a(t)$ пропорциональна размерной скорости сдвига $\nu(t)$, т.е. скорости ползучести $\nu = \dot{\gamma}/T_0$. Обезразмеривающий время множитель $1/T_0$ появился здесь из-за того, что в переобозначениях, введенных в процессе получения системы в безразмерной форме (1), (2), время t уже безразмерное, полученное делением на T_0, а точка обозначает производную по нему, а не по физическому времени (как в исходном определении величин ν и a). Тогда система уравнений (1), (2) превращается в систему двух уравнений для $\gamma(t)$ и $w(t)$ с параметрами $\bar{s} > 0$, $w_0 \in [0; 1)$, $b, c, \alpha > 0$:

$$a = \bar{s}e^{-\alpha w}, \quad a = \dot{\gamma}/\Upsilon, \tag{14}$$

$$\dot{w} = -cB(\bar{s})w + c, \tag{15}$$

где $t > 0$, $B(s) = 1 + bg(s)$, $\bar{s} > 0$. Функция $B(\bar{s})$ зависит от МФ g, а точнее, от величины отношения $bg(\bar{s})$ скорости разрушения сшивок к скорости их образования в уравнении (5), которое при постоянном напряжении не зависит от времени. Функция $B(\bar{s})$ возрастает (так как МФ $g(s)$ возрастает) и всегда $B(\bar{s}) \geqslant 1 + b > 1$ (так как $g(s) \geqslant 1$). Очевидно, искомые решения $\gamma(t)$ и $w(t)$ будут зависеть от уровня напряжения $\bar{s}$ и заданных начальных значений $w(0) = w_0$ и $\gamma(0) = \gamma_0$ (мгновенной упругой деформации).

Уравнение (15) не содержит неизвестной функции $\gamma(t)$, оно линейно и легко интегрируется: его общее решение $w(t) = Ae^{-cBt} + B^{-1}$, а решение задачи Коши с начальным условием $w(0) = w_0$ имеет вид

$$w(t; \bar{s}, w_0) = [w_0 - F(\bar{s})]e^{-cB(\bar{s})t} + F(\bar{s}), \quad B(\bar{s}) = 1 + bg(\bar{s}), \quad F(\bar{s}) = 1/B(\bar{s}). \tag{16}$$

Подстановка (16) в уравнение (14) позволяет найти зависимость логарифма безразмерной скорости ползучести от времени и от уровня напряжения $\bar{s} > 0$:

$$\ln a = \ln \bar{s} - \alpha w = \ln \bar{s} + \alpha[F(\bar{s}) - w_0]\, e^{-cB(\bar{s})t} - \alpha F(\bar{s}). \tag{17}$$

Структурированность (16) убывает по времени при $F(\bar{s}) < w_0$ (при достаточно больших $\bar{s}$ или при близких к единице w_0) и возрастает при $F(\bar{s}) > w_0$ (т.е. при достаточно малых напряжениях и начальной структурированности). При $t \to \infty$ функция (16) имеет предел $w_\infty = F(\bar{s})$ (горизонтальную асимптоту), который зависит от МП b, МФ g и напряжения $\bar{s}$, но не зависит от параметра w_0. Функция $F(\bar{s})$ — убывающая функция с множеством значений $(0; (1 + b)^{-1})$, $F(\bar{s}) \to 0$ при $\bar{s} \to \infty$ (поскольку $g(+\infty) = +\infty$), и поэтому установившееся значение w_∞ убывает с ростом $\bar{s}$ и стремится к нулю при $\bar{s} \to \infty$. С увеличением $\bar{s}$ кривые $w(t)$ опускаются вниз и меняют возрастание на убывание при уровне напряжения, удовлетворяющем уравнению $F(\bar{s}) = w_0$ (при этой величине $\bar{s}$ функция $w(t)$ — константа).

Функция (17) тоже монотонна по времени при $t > 0$ (убывает или возрастает в зависимости от знака множителя $F(\bar{s}) - w_0$), а при $t \to \infty$ имеет предел $\ln \bar{s} - \alpha F(\bar{s})$. Поэтому скорость ползучести $a(t)$ монотонна, а при $t \to 0+$ и $t \to \infty$ имеет конечные пределы:

$$a_0 = \bar{s} \exp(-\alpha w_0), \quad a_\infty = \bar{s} \exp(-\alpha F(\bar{s})). \tag{18}$$

Предел a_0 пропорционален $\bar{s}$, убывает по w_0, но не зависит от МФ g. А установившаяся скорость ползучести a_∞, как и w_∞, не зависит от w_0, но зависит от МФ g и $\bar{s}$ (нелинейно). Так как $\alpha > 0$, а функция $F(\bar{s})$ убывает, то оба множителя в a_∞ возрастают по $\bar{s}$ (второй — как композиция двух убывающих функций). Однако всегда верна оценка $\bar{s}e^{-\alpha F(\bar{s})} < a_\infty < \bar{s}$, ибо $F(\bar{s}) < 1$, и потому $e^{-\alpha F(\bar{s})} > e^{-\alpha}$. Поскольку $a_\infty > 0$ для любого $\bar{s} > 0$, то модель не может описывать ограниченную ползучесть ни при каких (хотя бы и малых) уровнях напряжения. Отметим, что в линейной вязкоупругости пределы a_0 и a_∞ могут быть бесконечными, а для линейной модели Максвелла скорость ползучести постоянна во времени и кривые ползучести (КП) имеют вид $\gamma(t; \bar{s}) = \bar{s}(C+rt)$ (для нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла, исследованной в статьях [11–16], КП тоже прямолинейны, но скорость ползучести нелинейно зависит от $\bar{s}$ [11]).

Уравнение семейства КП $\gamma(t;\bar{s},w_0)$, порождаемых моделью, может быть получено интегрированием по времени выражения для $a=\dot{\gamma}/\Upsilon$, вытекающего из (17):

$$\dot{\gamma}=\Upsilon a=\Upsilon\bar{s}e^{-\alpha F(\bar{s})}\exp\left(\alpha[F(\bar{s})-w_0]e^{-cB(\bar{s})t}\right),$$

$$\gamma(t;\bar{s},w_0)=\gamma_0+\Upsilon\bar{s}e^{-\alpha F(\bar{s})}\;Y(t;\bar{s},w_0),\quad Y(t;\bar{s},w_0)=\int\limits_0^t\exp\left(\alpha[F(\bar{s})-w_0]e^{-cB(\bar{s})\tau}\right)d\tau,\qquad(19)$$

где $\gamma_0=\gamma(0;\bar{s},w_0)=\tau/G(w_0)=\bar{s}\tau_c/(G_0e^{\beta w_0})=\Upsilon\bar{s}e^{-\beta w_0}$ — начальный угол сдвига.

Проанализировать общие качественные свойства семейства КП $\gamma(t;\bar{s},w_0)$ можно без вычисления квадратуры (19) непосредственно по уравнениям (14)–(16. Из (14) следует, что $a(t)>0$, т.е. $\dot{\gamma}(t)>0$, и, значит, что для любого уровня напряжения $\bar{s}>0$ КП $\gamma(t;\bar{s},w_0)$ *всегда возрастает по времени* (как и для всех структурно-стабильных материалов). Дифференцирование (14) по времени дает $\dot{a}=-\bar{s}\alpha\dot{w}e^{-\alpha w}$ и позволяет определить знак $\ddot{\gamma}(t)$ (он совпадает со знаком $\dot{a}$): условие $\ddot{\gamma}(t)>0$ равносильно условию $\dot{w}<0$, условие $\ddot{\gamma}(t)<0$ равносильно $\dot{w}>0$. Но в силу (16) $\dot{w}=[1-B(\bar{s})w_0]e^{-cB(\bar{s})t}$ и знак $\dot{w}$ (и поэтому знак $\ddot{\gamma}(t)$ тоже) сохраняется на всем интервале $t>0$ и этот знак зависит только от знака $1-B(\bar{s})w_0$, т.е. знака величины $F(\bar{s})-w_0$: $\dot{w}>0$ и $\ddot{\gamma}(t)<0$ при $F(\bar{s})>w_0$, а если $F(\bar{s})<w_0$, то $\dot{w}<0$ и $\ddot{\gamma}(t)>0$.

Таким образом, *для любых МФ и МП кривая ползучести* $\gamma(t;\bar{s},w_0)$ *всегда возрастает по времени, никогда не имеет точек перегиба и в зависимости от величин* $\bar{s}$, w_0 *и МП модели возможны ровно три случая*:

1) если $F(\bar{s})>w_0$ (при достаточно малых $\bar{s}$ и w_0), то структурированность $w(t)$ монотонно возрастает к предельному значению $w_\infty=F(\bar{s})$, а КП $\gamma(t;\bar{s},w_0)$ выпуклы вверх на всем интервале $t>0$, т.е. скорость ползучести уменьшается, но стремится не к нулю, а к $r=\dot{\gamma}(\infty)=\Upsilon\bar{s}e^{-\alpha F(\bar{s})}$ (пределы r и w_∞ не зависят от начальной структурированности w_0);

2) если $F(\bar{s})=w_0$, то структурированность $w(t)$ не меняется при $t>0$ ($w(t)\equiv w_0$), а КП $\gamma(t;\bar{s},w_0)$ является прямой линией с угловым коэффициентом r (подынтегральная функция в (19) равна единице), т.е. ползучесть с постоянной скоростью моделируется на всем интервале $t>0$ тогда и только тогда, когда $\bar{s}$ и w_0 связаны зависимостью $w_0B(\bar{s})=1$, обращающей правую часть уравнения (15) в нуль при $t=0$;

3) если $F(\bar{s})<w_0$ (при достаточно большом $\bar{s}$), то $w(t)$ монотонно убывает к пределу w_∞, а КП $\gamma(t;\bar{s},w_0)$ выпуклы вниз на всем интервале $t>0$, т.е. модель описывает стадию ускоряющейся ползучести, но скорость $\dot{\gamma}(t)$ ограничена: $\dot{\gamma}(\infty)=r=\Upsilon\bar{s}e^{-\alpha F(\bar{s})}$.

Случай 2 реализуется при $\bar{s}=\tilde{s}$, где $\tilde{s}=\tilde{s}(b,w_0)$ — (единственное) решение уравнения $F(\bar{s})=w_0$ (т.е. $w_\infty(\bar{s})=w_0$). Так как $F(\bar{s})$ — убывающая функция с множеством значений $(0;(1+b)^{-1})$ и $F(\bar{s})\to 0$ при $\bar{s}\to\infty$, то это уравнение имеет ровно одно решение $\tilde{s}>0$ для любого $w_0\in(0;(1+b)^{-1})$. Например, для функций вида (6) уравнение для критического напряжения $\tilde{s}$ легко решается: $1+be^{hs}=w_0^{-1}$, $\tilde{s}=h^{-1}\ln[(1-w_0)/(bw_0)]$ или $1+b(1+(hs)^n)=w_0^{-1}$, $\tilde{s}=h^{-1}(1-w_0-bw_0)^{1/n}(bw_0)^{-1/n}$. Если же $w_0\geqslant(1+b)^{-1}$, то уравнение не имеет решений в интервале $\bar{s}>0$, при любом $\bar{s}$ имеет место случай 3, а случаи 2 и 1 не реализуются.

Таким образом, модель (3)–5) может описывать как материалы с выпуклыми вниз КП (при $w_0\geqslant(1+b)^{-1}$), так и материалы, у которых с ростом $\bar{s}$ КП меняют выпуклость вверх на выпуклость вниз при некотором $\bar{s}=\tilde{s}$. Модель подходит для материалов, склонных к установившейся ползучести, и может описывать смену выпуклости КП с ростом $\bar{s}$, но не может описывать КП с точками перегиба (со всеми тремя стадиями ползучести) и ограниченную ползучесть при некоторых (хотя бы малых) уровнях напряжения.

Существование конечного предела $\dot{\gamma}(\infty)=r$ необходимо для существования наклонной асимптоты у КП, но не достаточно: еще требуется существование предела $\gamma(t)-rt$ при $t\to\infty$. В силу (19) и формулы $r=\Upsilon\bar{s}e^{-\alpha F(\bar{s})}$ его существование равносильно сходимости несобственного интеграла

$$\int_0^\infty\left[\mathtt{exp}(\alpha[F(\bar{s})-w_0]e^{-cB(\bar{s})\tau})-1\right]d\tau.$$

При $F(\bar{s})=w_0$ подынтегральная функция тождественно равна нулю. В остальных случаях интеграл тоже сходится по признаку сравнения: так как при $\tau\to\infty$ функция $x(\tau)=\alpha[F(\bar{s})-w_0]e^{-cB(\bar{s})\tau}$ стремится к нулю, то $\mathtt{exp}(\alpha[F(\bar{s})-w_0]e^{-cB(\bar{s})\tau})-1=\mathtt{exp}(x)-1\approx x(\tau)$, а интеграл от последней функции по промежутку $[0; +\infty)$ сходится (он положителен при $F(\bar{s}) > w_0$, равен нулю при $\bar{s} = \tilde{s}$ и отрицателен при $\bar{s} > \tilde{s}$). Поэтому любая КП модели обладает наклонной асимптотой

$$y(t; \bar{s}, w_0) = r(\bar{s})t + \gamma_0 + r(\bar{s})I(\bar{s}, w_0), \quad \gamma_0 = \Upsilon \bar{s} e^{-\beta w_0}, \quad r(\bar{s}) = \Upsilon \bar{s} e^{-\alpha F(\bar{s})}. \tag{20}$$

Докажем, что $r(\bar{s})$ монотонно возрастает: $r'(\bar{s}) = \Upsilon e^{-\alpha F(\bar{s})}(1 - \alpha \bar{s} F'(\bar{s}))$, $r'(\bar{s}) > e^{-\alpha F(\bar{s})} > 0$, поскольку $F'(\bar{s}) < 0$. Для любой МФ $r(0) = 0$, а при $\bar{s} \to \infty$ $r(\bar{s})/(\Upsilon \bar{s}) \to 1$, ибо $F(\infty) = 0$.

В вырожденном случае, когда $\alpha = 0$ (а МФ g произвольна), имеем $r(\bar{s}) = \Upsilon \bar{s}$ и из (19) получим $I(t; \bar{s}, w_0) = t$ и $\gamma(t; \bar{s}, w_0) = \gamma_0 + rt$, т.е. ползучесть происходит с постоянной скоростью, пропорциональной $\bar{s}$, как у линейной модели Максвелла. Конечно, этого следовало ожидать, ибо модель с $\alpha = 0$ распадается на классическое (линейное) уравнение Максвелла (3) и дополнительное уравнение для структурированности (5), зависящее от напряжения. Уменьшение α ослабляет влияние структурированности на процесс деформирования (ведь вязкость и модуль сдвига в (3), (4) не зависят от w_0), и при $\alpha \to 0$ оно постепенно отключается и семейство КП все меньше отличается от КП линейной модели Максвелла.

Основные доказанные утверждения подытоживает

Теорема 3. *Пусть $a, b, \alpha, c, \eta_0, G_0 > 0, \beta \geqslant 0$ и МФ $g(s)$ кусочно-дифференцируема и непрерывна при $s \geqslant 0$, не убывает, $g(0) = 1$ и $g(+\infty) = +\infty$. Если $s(t) = \bar{s} = \mathrm{const}$ при $t > 0$ (режим ползучести), $\bar{s} > 0$, то эволюция структурированности $w(t; \bar{s}, w_0)$ и кривые ползучести $\gamma(t; \bar{s}, w_0)$ описываются системой дифференциальных уравнений* (14), (15), *выражаются явными формулами* (16), (19), *в которых $B(\bar{s}) = 1 + bg(\bar{s})$, $F(\bar{s}) = 1/B(\bar{s})$, и обладают следующими свойствами*:

1) *структурированность $w(t; \bar{s}, w_0)$ монотонна по времени, убывает по $\bar{s}$ и возрастает по w_0; при $t \to \infty$ функция* (16) *имеет предел $w_\infty = F(\bar{s})$ (горизонтальную асимптоту), который зависит от МП b, МФ g и уровня напряжения $\bar{s}$ (но не зависит от начальной структурированности w_0) и стремится к нулю при $\bar{s} \to \infty$*;

2) *кривая ползучести $\gamma(t; \bar{s}, w_0)$* (19) *всегда монотонно и неограниченно возрастает по времени и при $t \to \infty$ обладает асимптотой* (20)*; угловой коэффициент асимптоты $r(\bar{s}) = \Upsilon \bar{s} e^{-\alpha F(\bar{s})}$ не зависит от w_0, возрастает по $\bar{s}$ и $r(\bar{s})/(\Upsilon \bar{s}) \to 1$ при $\bar{s} \to \infty$* ;

3) *безразмерная скорость ползучести $a(t)$* (17) *монотонна по времени и при $t \to 0+$ и $t \to \infty$ имеет конечные пределы* (18)*; начальная скорость a_0 пропорциональна $\bar{s}$, убывает по w_0, но не зависит от МФ g, а равновесная скорость $a_\infty = r/\Upsilon$, как и w_∞, не зависит от w_0, но зависит от МФ и напряжения $\bar{s}$ (нелинейно)*;

4) *если $F(\bar{s}) < w_0$ (при достаточно большом $\bar{s}$), то структурированность $w(t; \bar{s}, w_0)$ монотонно убывает, а кривые ползучести $\gamma(t; \bar{s}, w_0)$ выпуклы вниз на всем интервале $t > 0$ (скорость ползучести возрастает), т.е. модель описывает стадию ускоряющейся ползучести, но скорость растет ограниченно и стремится к пределу $\dot{\gamma}(\infty) = r$*;

5) *если $0 < w_0 < (1 + b)^{-1}$ и $\bar{s} = \tilde{s}$, где $\tilde{s} = \tilde{s}(b, w_0)$ — (единственное) решение уравнения $F(\bar{s}) = w_0$, то $w(t) \equiv w_0$ при $t > 0$, а кривая ползучести* (19) *— прямая линия $\gamma(t) = \gamma_0 + r(\tilde{s})t$, где γ_0 и r вычисляются по формуле* (20);

6) *если $0 < w_0 < (1 + b)^{-1}$ и $F(\bar{s}) > w_0$ (т.е. $\bar{s} < \tilde{s}$), то структурированность монотонно возрастает, а кривые ползучести $\gamma(t; \bar{s}, w_0)$ выпуклы вверх на интервале $t > 0$*;

7) *если $w_0 \geqslant (1 + b)^{-1}$, то уравнение $F(\bar{s}) = w_0$ не имеет корней в интервале $\bar{s} > 0$, при любом $\bar{s}$ имеет место случай 4 и все кривые ползучести выпуклы вниз (а случаи 5 и 6 не реализуются)*;

8) *модель может описывать как материалы с выпуклыми вниз кривыми ползучести (при $w_0 \geqslant (1 + b)^{-1}$)), так и материалы, у которых с увеличением $\bar{s}$ кривые ползучести меняют выпуклость вверх на выпуклость вниз при некотором напряжении $\bar{s} = \tilde{s}$, но не может моделировать материалы, у которых наблюдаются кривые ползучести с точками перегиба (со всеми тремя стадиями ползучести) и материалы с ограниченной ползучестью при некоторых (хотя бы малых) уровнях напряжения.*

6. Направления развития базовой модели и ее приложения. Модель (3)–(5) (после дальнейшего исследования, сопоставления с данными испытаний и необходимых усовершенствований, в частности учета влияния тепловыделения и введения дополнительных структурных параметров и уравнений с целью более полного описания кинетики основных физико-химических процессов) может применяться для моделирования поведения расплавов термопластов, углеродно-кремниевых паст для 3D-печати, битумов и их модификаций разными наполнителями и для решения краевых задач, описывающих технологии переработки полимеров (твердофазной экструзии, формования нитей экструзией расплава и вытяжкой и т.п.) [19–22], и задач моделирования сверхпластического деформирования металлов и сплавов с учетом эволюции нескольких параметров структуры (среднего размера, формы и ориентации зерен, уровня неравновесности границ зерен, плотности дисперсоидов, степени сегрегации на границах зерен легирующих элементов, облегчающих зернограничное скольжение, и т.п.) [23–33]. Модель (3)–(5) родственна изученному в цикле статей [11–16] физически нелинейному ОС типа Максвелла

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2}\varepsilon(t)\sigma(t)^{-1}[\sigma_{ij}(t) - \sigma_0(t)\delta_{ij}] + \frac{1}{3}\theta(t)\delta_{ij}, \quad \varepsilon(t) = \mathbf{M}\sigma, \quad \theta(t) = \mathbf{M}_0\sigma_0, \tag{21}$$

$$\mathbf{M}\sigma = E^{-1}F(\sigma(t)) + \eta^{-1}\int_0^t V(\sigma(\tau))\,d\tau, \quad \mathbf{M}_0\sigma_0 = E_0^{-1}F_0(\sigma(t)) + \eta_0^{-1}\int_0^t V_0(\sigma_0(\tau))\,d\tau$$

с четырьмя произвольными (возрастающими) МФ $F(x), V(x), F_0(x), V_0(x)$ и параметрами E, η, E_0, $\eta_0 > 0$. Нелинейные интегральные операторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}_0$ управляют процессами формоизменения и развития объемной деформации (не влияющими друг на друга). Обнаруженные в [11–16] свойства и возможности ОС (21) служат ориентирами для дальнейшего исследования свойств модели (3)–(5) (в частности, семейств кривых деформирования, релаксации и ползучести, которые она порождает) и ее обобщений. С целью расширения класса описываемых эффектов и области применимости модель (3)–(5) удобно использовать как элемент более сложных гибридных моделей в сочетании с ОС (21).

7. Заключение. Продолжено системное аналитическое исследование свойств нелинейной структурно-реологической модели сдвигового течения тиксотропных вязкоупругопластических сред (3)–(5), учитывающей взаимное влияние процесса деформирования и эволюции структуры, предложенной и анализируемой в статьях [8–10]. При произвольных шести материальных параметрах и (возрастающей) материальной функции, управляющих моделью, получены система двух дифференциальных уравнений (14), (15) для описания ползучести и аналитические представления (16), (19) ее общего решения: эволюция структурированности $w(t;\bar{s},w_0)$ и кривые ползучести $\gamma(t;\bar{s},w_0)$. В общем виде изучены базовые свойства семейства кривых ползучести $\gamma(t;\bar{s},w_0)$, порождаемых моделью, найдены ее индикаторы применимости. Тем самым начат анализ способности модели описывать поведение как жидкообразных, так и твердообразных (густеющих, твердеющих, затвердевших) вязкоупругопластических сред: эффекты ползучести, релаксации, восстановления, типичные свойства диаграмм деформирования с постоянной скоростью, скоростное и деформационное упрочнения и др. Исследованы зависимости кривых ползучести $\gamma(t;\bar{s},w_0)$, скорости ползучести и структурированности $w(t;\bar{s},w_0)$ не только от времени (монотонность, выпуклость, асимптоты), но и от уровня напряжения $\bar{s}$ и начальной структурированности w_0, а также от материальных параметров и функции модели. Основные результаты собраны в теореме 3. Доказано, что кривые ползучести всегда возрастают по времени и имеют наклонные асимптоты, а структурированность монотонна, но может и убывать, и возрастать в зависимости от соотношения между $\bar{s}$ и w_0, причем те же условия управляют выпуклостью кривых ползучести вверх или вниз: при некотором критическом напряжении $\bar{s} = \tilde{s}$, $\tilde{s} = \tilde{s}(b, w_0)$, кривые ползучести меняют выпуклость вверх на выпуклость вниз, а структурированность сменяет убывание на возрастание. Тем самым, в частности, доказано, что модель не может описывать ограниченную ползучесть при некоторых (хотя бы малых) уровнях напряжения и ползучесть материалов, у которых наблюдаются кривые ползучести с точками перегиба (со всеми тремя стадиями ползучести).

Исследование поддержано грантом РНФ № 22–13–20056.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виноградов Г.В., Малкин А.Я.* Реология полимеров. М.: Химия, 1977.
2. *Larson R.G.* Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions. Boston: Butterworth, 1988.
3. *Leonov A.I., Prokunin A.N.* Non-linear Phenomena in Flows of Viscoelastic Polymer Fluids. London: Chapman and Hall, 1994.
4. *Larson R.G.* Structure and Rheology of Complex Fluids. N.Y.: Oxford Press, 1999.
5. *Gupta R.K.* Polymer and Composite Rheology. N.Y.: Marcel Dekker, 2000.
6. *Graessley W.W.* Polymeric Liquids and Networks: Dynamics and Rheology. London: Garland Science, 2008.
7. *Malkin A.Y., Isayev A.I.* Rheology: Conceptions, Methods, Applications (2nd ed.). Toronto: ChemTec Publishing, 2012.
8. *Stolin A.M., Khokhlov A.V.* Nonlinear model of shear flow of thixotropic viscoelastoplastic continua taking into account the evolution of the structure and its analysis // Moscow Univ. Mech. Bull. 2022. **77**, N 5. 127–135 (DOI: 10.3103/S0027133022050065).

9. *Хохлов А.В.* Точка равновесия и фазовый портрет модели течения тиксотропных сред, учитывающей эволюцию структуры // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. **78**, № 4. 30–39 (DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-5).
10. *Хохлов А.В., Гулин В.В.* Анализ свойств нелинейной модели сдвигового течения тиксотропных вязкоупругопластичных сред, учитывающей взаимное влияние эволюции структуры и процесса деформирования // Физ. мезомехан. 2023. **26**, № 4. 41–63 (DOI: 10.55652/1683-805X_2023_26_4_41).
11. *Хохлов А.В.* Кривые длительной прочности нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла и правило суммирования поврежденности при ступенчатых нагружениях // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. **20**, № 3. 524–543 (DOI: 10.14498/vsgtu1512).
12. *Хохлов А.В.* Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: свойства семейства кривых релаксации и ограничения на материальные функции // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2017. № 6. 31–55 (DOI: 10.18698/1812-3368-2017-6-31-55).
13. *Хохлов А.В.* Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: моделирование влияния температуры на кривые деформирования, релаксации и ползучести // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. **21**, № 1. 160–179 (DOI: 10.14498/vsgtu1524).
14. *Khokhlov A.V.* A nonlinear Maxwell-type model for rheonomic materials: stability under symmetric cyclic loadings // Moscow Univ. Mech. Bull. 2018. **73**, N 2. 39–42 (DOI: 10.3103/S0027133018020036).
15. *Khokhlov A.V.* Applicability indicators and identification techniques for a nonlinear Maxwell-type elastoviscoplastic model using loading–unloading curves // Mech. Compos. Materials. 2019. **55**, N 2. 195–210 (DOI: 10.1007/s11029-019-09809-w).
16. *Khokhlov A.V.* Possibility to describe the alternating and non-monotonic time dependence of Poisson's ratio during creep using a nonlinear Maxwell-type viscoelastoplasticity model // Russ. Metallurgy (Metally). 2019. N 10. 956–963 (DOI: 10.1134/S0036029519100136).
17. *Khokhlov A.V.* Two-sided estimates for the relaxation function of the linear theory of heredity via the relaxation curves during the ramp-deformation and the methodology of identification // Mech. Solids. 2018. **53**, N 3. 307–328 (DOI: 10.3103/S0025654418070105).
18. *Khokhlov A.V.* Properties of the set of strain diagrams produced by Rabotnov nonlinear equation for rheonomous materials // Mech. Solids. 2019. **54**, N 3. 384–399 (DOI: 10.3103/S002565441902002X).
19. *Han C.D.* Rheology and Processing of Polymeric Material. Vol. 1, 2. Oxford: Oxford University Press, 2007.
20. *Denn M.M.* Polymer Melt Processing. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
21. *Kamal M., Isayev A., Liu S.* Injection Molding Fundamentals and Applications. Munich: Hanser, 2009.
22. *Leblanc J.L.* Filled Polymers. Boca Raton: CRC Press, 2010.
23. *Новиков И.И., Портной В.К.* Сверхпластичность сплавов с ультрамелким зерном. М.: Металлургия, 1981.
24. *Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D.* Superplasticity in metals and ceramics. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
25. *Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U.* Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
26. *Segal V.M., Beyerlein I.J., Tome C.N., Chuvil'deev V.N., Kopylov V.I.* Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation. N.Y.: Nova Science Pub. Inc., 2010.
27. *Zhilayev A.P., Pshenichnyuk A.I.* Superplasticity and grain boundaries in ultrafine-grained materials. Cambridge: Cambridge Int. Sci. Publ., 2010.
28. *Чувильдеев В.Н., Щавлева А.В., Нохрин А.В.* и др. Влияние размера зерна и структурного состояния границ зерен на параметры низкотемпературной и высокоскоростной сверхпластичности нано- и микрокристаллических сплавов // Физ. твердого тела. 2010. **52**, вып. 5. 1026–1033.
29. *Валиев Р.З., Жиляев А.П., Лэнгдон Т.Дж.* Объемные наноструктурные материалы: фундаментальные основы и применения. М.: Эко-Вектор, 2017.
30. *Ovid'ko I.A., Valiev R.Z., Zhu Y.T.* Обзор экспериментальных исследований структурной сверхпластичности: эволюция микроструктуры материалов и механизмы деформирования // Progr. Mater. Sci. 2018. **94**. 462–540.
31. *Шарифуллина Э.Р., Швейкин А.И., Трусов П.В.* Влияние размера зерна и структурного состояния границ зерен на параметры низкотемпературной и высокоскоростной сверхпластичности нано- и микрокристаллических сплавов // Вестн. ПНИПУ. Механика. 2018. № 3. 103–127.
32. *Mikhaylovskaya A.V., Kishchik A.A., Kotov A.D.* et al. Precipitation behavior and high strain rate superplasticity in a novel fine-grained aluminum based alloy // Mater. Sci. Eng. A. 2019. **760**. 37–46.
33. *Mochugovskiy A.G., Mosleh A.O., Kotov A.D., Khokhlov A.V.* Microstructure evolution, constitutive modelling, and superplastic forming of experimental 6XXX-type alloys processed with different thermomechanical treatments // Materials. 2023. **16**, N 1. 445. 1–18 (DOI: 10.3390/ma16010445).

Поступила в редакцию
10.05.2023