УДК 519.21

О ВЕРОЯТНОСТИ ПРЕВЫШЕНИЯ ВЫСОКОГО УРОВНЯ ГАУССОВСКИМ ПРОЦЕССОМ С ПОСТОЯННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ И ПЕРЕМЕННОЙ ГЛАДКОСТЬЮ

Ф. Э. Колузанов[1], **В. И. Питербарг**[2]

Найдена точная асимптотика вероятности превышения высокого уровня гауссовским процессом с постоянной дисперсией, корреляционная функция которого удовлетворяет в каждой точке условию Пикандса, при этом константы в условии меняются, являясь непрерывными функциями.

Ключевые слова: гауссовский процесс, большие выбросы, условие Пикандса, метод двойных сумм.

Exact asymptotic behavior is evaluated for high level exceeding probability of Gaussian process with constant variance, the correlation function of which satisfies the Pickands' condition at each point, while the constants in the condition change, being continuous functions.

Key words: Gaussian process, large excursions, Pickands' condition, double sum method.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-4-3

Введение. Пусть $X(t), t \in \mathbb{R}$, — гауссовский случайный процесс с почти непрерывными траекториями, постоянными средним и дисперсией; без ограничения общности считаем, что $EX(t) \equiv 0$, $EX^2(t) \equiv 1$. Предположим, что на некотором временном интервале $[0, T)$, $T \leqslant \infty$, существуют непрерывные функции $C_t > 0$, $\alpha_t \in (0, 2]$, такие, что для ковариационной функции $r(s, t) = EX(s)X(t)$ выполнено соотношение

$$r(s_1, s_2) = 1 - C_t |s_1 - s_2|^{\alpha_t} + o\left(|s_1 - s_2|^{\alpha_t}\right), \quad s_1, s_2 \to t. \tag{1}$$

Пусть, кроме того,

$$r(s, t) < 1 \text{ для всех } s \neq t, s, t \in [0, T). \tag{2}$$

Условие (1) для постоянных C_t и α_t ввел в 1969 г. Д. Пикандс (D. Pickands III [1]) для исследования вероятности высокого выброса гауссовского стационарного процесса с негладкими траекториями; оригинальные доказательства вскоре были исправлены в [2]. Оказалось, что метод Пикандса стал одним из основных методов исследования асимптотического поведения вероятностей больших выбросов траекторий гауссовских векторных стационарных процессов, гауссовских однородных полей, процессов и полей, порожденных ими. Метод был существенно развит также для нестационарных процессов и полей с непостоянной дисперсией. В 1990 г. Ю. Хюслер [3] обобщил метод Пикандса на введенные им локально стационарные процессы, т.е. на процессы с постоянной дисперсией, но с разным масштабированием времени в разных точках: функция C_t не является константой. Отметим, что степень гладкости траекторий оставалась неизменной: в условии (1) показатель α — константа. Впоследствии направление исследования больших выбросов локально стационарных гауссовских процессов, векторных процессов, полей, включая поля на гладких многообразиях, получило существенное развитие [4–7]. В недавней работе [8] имеется подробный обзор литературы.

Введем важную для нас константу — константу Пикандса. Определим гауссовский процесс с непрерывными траекториями

$$\chi(t) := \sqrt{2} B_{\alpha/2}(t) - |t|^\alpha,$$

[1] *Колузанов Филипп Эдуардович* — студ. каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: fkoluzanov@mail.ru.

Koluzanov Philipp Eduardovitch — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Probability Theory.

[2] *Питербарг Владимир Ильич* — доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ; НИУ "Высшая школа экономики", e-mail: piter@mech.math.msu.su.

Piterbarg Vladimir Ilich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Research Scientist, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Probability Theory; National Research University Higher School of Economics.

© Колузанов Ф. Э., Питербарг В. И., 2024
© Koluzanov P. E., Piterbarg V. I., 2024
CC BY-NC

где $B_{\alpha/2}(t)$ — дробное броуновское движение с показателем Хёрста $\alpha/2 \in (0,1]$. В [1] показано, что для любого $\Lambda > 0$

$$H_\alpha(\Lambda) := E \exp\left(\max_{t\in[0,\Lambda]} \chi(t)\right) < \infty$$

и

$$H_\alpha = \lim_{\Lambda\to\infty} \frac{H_\alpha(\Lambda)}{\Lambda} \in (0,\infty)$$

— константа Пикандса. Напомним стандартное обозначение: $\Psi(u) = \phi(u)/u$, где $\phi(u)$ — стандартная нормальная плотность, функция $\Psi(u)$ эквивалентна при $u \to \infty$ хвосту стандартного нормального распределения (см., например, [6]).

В настоящей работе доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть для гауссовского процесса $X(t)$ выполнены соотношения* (1) *и* (2). *Предположим также, что для некоторого $\kappa > 0$ модуль непрерывности функции α_t удовлетворяет условию*

$$\gamma(s) := \max_{s_1,s_2\in[0,p],|s_1-s_2|\leqslant s} \leqslant \ln^{-1-\kappa} s^{-1}.$$

Тогда для любого $p \in (0,T]$ имеет место следующее соотношение:

$$P\left(\max_{t\in[0,p]} X(t) > u\right) = \Psi(u)(1+o(1)) \int_0^p H_{\alpha_t} C_t^{1/\alpha_t} u^{2/\alpha_t} dt$$

при $u \to \infty$.

В случае стационарного процесса $X(t)$ эта теорема, как отмечено выше, получена Д. Пикандсом, ее доказательство можно найти в [6, 7]. В случае постоянного α_t эта теорема доказана Ю. Хюслером в упомянутой выше статье. В [6, 7] также доказано важное для нас дополнение к теореме Пикандса.

Утверждение 1. *Пусть процесс $X(t)$ стационарен. Тогда утверждение теоремы также имеет место, если $p = p(u) \to 0$, но $pu^{2/\alpha} \to \infty$, $u \to \infty$.*

Там же показано, что $p(u)$ может стремиться и к бесконечности ($T = \infty$), лишь бы правая часть предельного соотношения в теореме стремилась к нулю.

Доказательство теоремы. Необходимо прежде всего показать корректность интеграла в формулировке, обозначим его через $I_p(u)$. Действительно, в [9] доказана непрерывность H_{α_t}, кроме того, в силу непрерывности и положительности функция α_t достигает своего положительного минимума на $[0,p]$. То есть для каждого $u > 0$ функция $C_t^{2/\alpha_t} H_{\alpha_t} u^{2/\alpha_t}$ интегрируема по Риману.

Разобьем отрезок $[0,p]$ на отрезки длиной Δ: $\Delta_k = [(k-1)\Delta, k\Delta], k = 1,1,\ldots,N$, считаем, что $p = N\Delta$. Обозначим

$$\alpha_{k,+} = \max_{t\in\Delta_k} \alpha_t,\ \alpha_{k,-} = \min_{t\in\Delta_t} \alpha_t,\ C_{k,+} = \max_{t\in\Delta_k} C_t,\ C_{k,-} = \min_{t\in\Delta_t} C_t,\ k = 1,2,\ldots,$$

и рассмотрим два гауссовских стационарных процесса $\xi_\pm(t), t \in \Delta_k$, с нулевыми средними, единичными дисперсиями и ковариационными функциями, удовлетворяющими соотношениям

$$\rho_{\pm,k}(t) = 1 - C_{\mp,k}|t|^{\alpha_{\pm,k}} + o\big(|t|^{\alpha_{\pm,k}}\big),\ t \to 0.$$

Для всех достаточно малых Δ имеем

$$\rho_{+,k}(s_1 - s_2) \geqslant r(s_1,s_2) \geqslant \rho_{-,k}(s_1 - s_2),\ s_1,s_2 \in \Delta_k.$$

В силу неравенства Слепяна (см., например, [6, 7]) выполнены неравенства

$$P\big(\max_{t\in\Delta_k} \xi_+(t) > u\big) \leqslant P\big(\max_{t\in\Delta_k} X(t) > u\big) \leqslant P\big(\max_{t\in\Delta_k} \xi_-(t) > u\big).$$

Далее, в силу утверждения 1 (теоремы Пикандса для фиксированного Δ) имеем

$$P\big(\max_{t\in\Delta_t} \xi_\pm(t) > u\big) = \Delta C^{1/\alpha_{\mp,k}} u^{2/\alpha_{\pm,k}} H_{\alpha_{\pm,k}} \Psi(u)(1+o(1)), u \to \infty.$$

Используя неравенство Бонферрони и затем неравенство Слепяна, получаем

$$\sum_{k=1}^{N} P(\max_{t\in\Delta_k}\xi_-(t)>u) \geqslant P(\max_{t\in[0;p]} X(t)>u) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^{N} P(\max_{t\in\Delta_k}\xi_+(t)>u) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} P(\max_{t\in\Delta_i} X(t)>u, \max_{t\in\Delta_j} X(t)>u).$$

Далее, в силу утверждения 1 для некоторых функций $j_{\pm,k}(u)$, $j_{\pm,k}(u)\to 0$, $u\to\infty$, имеем

$$\Psi(u)\sum_{k=1}^{N}\Delta(1+j_{+,k}(u))C^{1/\alpha_{+,k}}H_{\alpha_{-,k}}u^{2/\alpha_{-,k}} \geqslant P(\max_{t\in[0;p)} P(t)>u) \geqslant$$
$$\geqslant \Psi(u)\sum_{k=1}^{N}\Delta C^{1/\alpha_{-,k}}(1+j_{-,k}(u))H_{\alpha_{+,k}}u^{2/\alpha_{+,k}} - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} P(\max_{t\in\Delta_i} X(t)>u, \max_{t\in\Delta_j} X(t)>u). \quad (3)$$

Рассмотрим одинарные суммы в (3), обозначим их $\Sigma_{+,1}$ и $\Sigma_{-,1}$ соответственно. Покажем, что при соответствующем выборе $\Delta=\Delta(u)\to 0$ при $u\to\infty$ оба отношения $\Sigma_{+,1}/I_p(u)$ и $\Sigma_{-,1}/I_p(u)$ стремятся к единице. При этом скорость стремления Δ к нулю должна быть такой, чтобы утверждение 1 выполнялось, т.е.

$$\Delta(u)u^{\frac{2}{\alpha_{\min}}}\to\infty, \quad u\to\infty, \quad (4)$$

где обозначено $\alpha_{\min} := \min_{t\in[0,p]}\alpha_t$. Имеем

$$\Sigma_{+,1}-I_p(u) = \sum_{k=1}^{N}\int_{\Delta_k}\big(C^{1/\alpha_{+,k}}H_{\alpha_{-,k}}u^{2/\alpha_{-,k}}(1+j_{+,k}(u)) - C_t^{1/\alpha_t}H_{\alpha_t}u^{2/\alpha_t}\big)dt =$$
$$= \sum_{k=1}^{N}\int_{\Delta_k} C_t^{1/\alpha_t}H_{\alpha_t}u^{2/\alpha_t}\left(\frac{C^{1/\alpha_{+,k}}H_{\alpha_{-,k}}(1+j_{+,k}(u))}{C_t^{1/\alpha_t}H_{\alpha_t}}u^{\frac{2}{\alpha_{-,k}}-\frac{2}{\alpha_t}}-1\right)dt.$$

Так как $\Delta\to 0$, то в силу равномерной непрерывности все дроби под интегралами равны $1+o(1)$ равномерно по k при $u\to\infty$. Далее, в силу условия теоремы на модуль непрерывности $\gamma(s)$ для логарифмов степеней u под интегралами выполнено соотношение

$$\left(\frac{2}{\alpha_{-,k}}-\frac{2}{\alpha_t}\right)\ln u \leqslant \frac{2\gamma(\Delta)\ln u}{\alpha_{\min}^2}\to 0,\ u\to\infty,$$

при любом степенном по u убывании $\Delta(u)$, удовлетворяющем, конечно, соотношению (4). Таким образом, степени u под интегралами в последней сумме также равномерно стремятся к единице, т.е.

$$\Sigma_{+,1}-I_p(u)=o(1)I_p(u) \text{ и } \Sigma_{+,1}/I_p(u)=1+o(1) \text{ при } u\to\infty. \quad (5)$$

Такое же соотношение имеет место в силу этих же рассуждений и для $\Sigma_{-,1}$.

Перейдем к оценке двойных сумм. Обозначим $A_k := \{\max_{t\in\Delta_k} X(t)>u\}$ и рассмотрим сначала сумму по соседним отрезкам разбиения:

$$\Sigma_{20} := \sum_{k=1}^{N-1} P\left(A_k A_{k+1}\right).$$

Без ограничения общности можно считать, что N четно, $N=2n$. Поскольку

$$P\left(A_k A_{k+1}\right) = P\left(A_k\right)+P\left(A_{k+1}\right)-P\left(A_k\cup A_{k+1}\right),$$

перепишем эту сумму следующим образом:

$$\Sigma_{20} = \sum_{k=1}^{2n-1}P\left(A_k\right) - \sum_{k=1}^{n}P\left(A_{2k-1}\cup A_{2k}\right) + \sum_{k=2}^{2n}P\left(A_k\right) - \sum_{k=1}^{n-1}P\left(A_{2k}\cup A_{2k+1}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2n-1} P\left(\max_{t\in\Delta_k} X(t) > u\right) - \sum_{k=1}^{n} P\left(\max_{t\in\Delta_{2k-1}\cup\Delta_{2k}} X(t) > u\right) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{2n} P\left(\max_{t\in\Delta_k} X(t) > u\right) - \sum_{k=1}^{n-1} P\left(\max_{t\in\Delta_{2k}\cup\Delta_{2k+1}} X(t) > u\right).$$

Применим утверждение 1 к слагаемым каждой из четырех сумм в правой части последнего соотношения, и хотя в вычитаемых суммах длины интервалов разбиения равны 2Δ, ко всем этим суммам, подобно одинарным суммам в (3), применимы все рассуждения (3)–(5) для одинарных сумм, т.е. для всех этих четырех сумм выполнены соотношения (5). Что касается оставшихся или добавленных четырех слагаемых, то, поскольку Δ стремится к нулю, они, деленные просто на $\Psi(u)$, также стремятся к нулю. Наконец, поскольку две суммы в правой части со знаком $-$ и две со знаком $+$, вся сумма Σ_{20}, деленная на $I_p(u)\Psi(u)$, стремится к нулю при $u \to \infty$.

Займемся теперь оцениванием двойной суммы по остальным (не соседним) интервалам, обозначим ее Σ_{21}. Очевидно, что

$$P\left(\max_{t\in\Delta_k} X(t) > u, \max_{t\in\Delta_l} X(t) > u\right) \leqslant P\left(\max_{(s,t)\in\Delta_k\times\Delta_l} X(s) + X(t) > 2u\right).$$

Оценим правую часть этого неравенства с использованием предложения 9.2.2 работы [6], приведем его для удобства.

Утверждение 2. *Пусть для гауссовского случайного поля $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in S \subset \mathbb{R}^d$, где S — компакт, с непрерывными траекториями и нулевым средним для некоторых C, $\beta > 0$ имеет место оценка*

$$E|X(\mathbf{t}) - X(\mathbf{s})|^2 \leqslant C\|\mathbf{t} - \mathbf{s}\|^{\beta}.$$

Тогда для всех положительных u и некоторой константы C выполняется неравенство

$$P\left(\max_{t\in S} X(t) > u\right) \leqslant C|S|(u/\sigma)^{d/\beta}\Psi(u/\sigma),$$

где $\sigma^2 = \max_{\mathbf{t}\in S} EX^2(\mathbf{t})$.

Обозначим

$$C_{\max(\min)} := \max(\min)_{t\in[0,p]} C_t, \ \alpha_{\max} := \max_{t\in[0,p]} \alpha_t,$$

величина $\alpha_{\min}$ введена в (4). В силу условий на $r(s,t)$ найдется достаточно малое $t_0 > 0$, такое, что выполнены неравенства

$$\max_{s_1,s_2\in[0,p],|s_1-s_2|\leqslant t_0} \frac{1 - r(s_1,s_2)}{|s_1 - s_2|^{\alpha_{\min}}} \leqslant 2C_{\max} < \infty \tag{6}$$

и

$$\min_{s_1,s_2\in[0,p],|s_1-s_2|\leqslant t_0} \frac{1 - r(s_1,s_2)}{|s_1 - s_2|^{\alpha_{\max}}} \geqslant 2C_{\min} > 0. \tag{7}$$

Из неравенства (6), применяя неравенство треугольника к псевдополунорме гауссовского поля $X(s) + X(t)$, получаем, что утверждение 2 имеет место для этого поля с $C = 16C_{\max}$ и $\beta = \alpha_{\min}$. Обозначая

$$\kappa(\Delta) := \min_{|s-t|\geqslant\Delta} (1 - r(s,t)),$$

имеем

$$\operatorname{var}(X(s) + X(t)) = 2 + 2r(s,t) \leqslant 4 - 2\kappa(\Delta).$$

Применяя утверждение 2, оценивая таким образом дисперсию сверху и заменяя $\Psi(u)$ на ее выражение через гауссовскую плотность (см. определение перед формулировкой теоремы), получаем для некоторых C и C_1

$$P\left(\max_{(s,t)\in\Delta_k\times\Delta_l} X(s) + X(t) > 2u\right) \leqslant Cu^{\frac{2}{\alpha_{\min}}-1} \exp\left(-\frac{4u^2}{8 - 4\kappa(\Delta)}\right) =$$

$$= C_1 u^{\frac{2}{\alpha_{\min}}} \Psi(u) \exp\left(-u^2 \frac{1-\kappa(\Delta)}{1+\kappa(\Delta)}\right). \qquad (8)$$

Пусть $\Delta = \Delta(u)$ убывает к нулю таким образом, что для всех достаточно больших u выполняется неравенство

$$u^2 \frac{1-\kappa(\Delta)}{1+\kappa(\Delta)} \geqslant \ln^2 u.$$

Тогда (7) также выполнено и экспонента в правой части (8) убывает к нулю быстрее любой степени u. Из соотношения (4) следует, что N растет не быстрее степени u, это же верно и для интеграла $I_p(u)$. То есть и сумма Σ_{21}, деленная на $I_p(u)\Psi(u)$, стремится к нулю при $u \to \infty$. Таким образом, сходимость искомой вероятности к интегралу при $u \to \infty$ доказана, что завершает доказательство теоремы.

Заключение. Интеграл в правой части соотношения теоремы 1 можно переписать в стандартном виде интеграла Лапласа:

$$I_p(u) = \int_0^p H_{\alpha_t} C_t^{1/\alpha_t} \exp\left(\frac{2}{\alpha_t} \ln u\right) dt.$$

Поэтому асимптотика этого интеграла определяется поведением амплитуды и фазы в точке (точках) максимума фазы. Мы знаем [9], что амплитуда непрерывна, но из доказательства в [9] непрерывности H_α по α видно, что исследование свойств ее гладкости по α является достаточно трудной задачей. Условия же на фазу $2/\alpha_t$ можно задавать. Например, имеет место следующее утверждение.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы. Пусть, кроме того, функция α_t достигает своего минимума на отрезке $[0, p]$ в единственной точке $t_m \in [0, p]$ и дважды непрерывно дифференцируема в этой точке. Тогда*

$$P\big(\max_{t\in[0,p]} X(t) > u\big) = \Psi(u)(1 + o(1)) H_{\alpha_{t_m}} C_{t_m}^{1/\alpha_{t_m}} u^{2/\alpha_{t_m}}$$

при $u \to \infty$.

Доказательство этого утверждения достаточно стандартно (см., например, [10]): переходим к произвольно малой окрестности точки t_m, затем, пользуясь разложением Тейлора, оцениваем сверху и снизу функцию $2/\alpha_t$ параболами или прямыми (если t_m равна 0 или p), также оцениваем сверху и снизу непрерывную функцию амплитуды, после интегрирования оценок получаем произвольно близкие оценки интеграла сверху и снизу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pickands III J.* Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. **145**. 51–73.
2. *Питербарг В.И.* О работе Пикандса “Вероятности пересечения для гауссовского стационарного процесса” // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1972. № 5. 5–30.
3. *Husler J.* Extreme values and high boundary crossings of locally stationary Gaussian processes // Ann. Probab. 1990. **18**, N 3. 1141–1158.
4. *Кобельков С.Г., Питербарг В.И., Родионов И. В., Хашорва Е.* Вероятность высокого максимума траектории гауссовского нестационарного процесса // Фунд. и прикл. матем. 2020. **23**, N 1. 161–174.
5. *Kobelkov S.G., Piterbarg V.I.* On maximum of Gaussian random field having unique maximum point of its variance // Extremes. 2019. **22**, N 4. 413–432.
6. *Питербарг В.И.* Двадцать лекций о гауссовских процессах. М.: МЦНМО, 2020.
7. *Piterbarg V.I.* Asymptotic Methods in Theory of Gaussian Random Processes and Fields. Providence, Amer. Math. Soc. Ser. Translations of Mathematical Monographes, 2012. Vol. 148.
8. *Qiao Wanli.* Extremes of locally stationary Gaussian and chi fields on manifolds // Stochast. Process and Appl. 2021. **133**(C). 166–192.
9. *Debicki K.* Some properties of generalized Pickands constant // Теор. вероятн. и ее примен. 2005. **50**, № 2. 396–404.
10. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию
14.06.2023