2. *Book S.* Large deviation probabilities for weighted sums // Ann. Math. Statist. 1972. **43**, N 4. 1221–1234.
3. *Соболев И.В., Шкляев А.В.* Большие уклонения для взвешенных сумм независимых одинаково распределенных величин с функционально заданными весами // Фунд. и прикл. матем. 2020. **23**, № 1. 191–206.
4. *Kaminsky K., Luks E., Nelson P.* Strategy, nontransitive dominance and the exponential distribution // Austral. J. Statist. 1984. **26**, N 2. 111–118.

Поступила в редакцию
10.05.2023

УДК 517

АЛГОРИТМ ПОИСКА ТОЧНОГО ЗНАЧЕНИЯ АРГУМЕНТА МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ В ОЦЕНКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ЧАСТИЧНОЙ СУММОЙ ЕЕ РЯДА ФУРЬЕ

Т. Ю. Семенова[1]

Приводится способ нахождения точного значения аргумента модуля непрерывности в оценках скорости сходимости ряда Фурье.

Ключевые слова: ряд Фурье, скорость сходимости, модуль непрерывности.

A method is given for finding the exact value of the argument of the modulus of continuity in estimates of the rate of convergence of Fourier series.

Key words: Fourier series, rate of convergence, modulus of continuity.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-4-2

1. Введение. Обозначим через $C_{2\pi}$ пространство непрерывных на $\mathbb{R}$ действительнозначных 2π-периодических функций с нормой $\|f\| = \max\limits_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi} |f(x)|$, а через $\omega(f,\gamma) = \max\limits_{\substack{x_1,\,x_2\in\mathbb{R},\\ |x_1-x_2|\leqslant\gamma}} |f(x_1)-f(x_2)|$ модуль непрерывности функции $f\in C_{2\pi}$. Пусть $S_n(f) = S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big)$, $n\in\mathbb{R}$, — частичные суммы ряда Фурье функции f, $D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos(kt)$ — ядра Дирихле, а $L_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt$ — константы Лебега.

Многие авторы (см., например, [1–4]) выводили оценки следующего вида:

$$\|f - S_n(f)\| \leqslant K_n\,\omega(f,\gamma), \quad \forall f\in C_{2\pi}. \tag{1}$$

Обозначим

$$K_n^*(\gamma) = \sup_{\substack{f\in C_{2\pi},\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{\|f-S_n(f)\|}{\omega(f,\gamma)}.$$

Известно [5, 6], что $K_n^*(\gamma) \geqslant (L_n+1)/2$ для любого $\gamma>0$. Возникает задача нахождения оптимального значения аргумента модуля непрерывности в неравенстве (1) с наилучшей константой $K_n = (L_n+1)/2$, а именно величины

$$\gamma_n^* = \inf\left\{\gamma>0,\ K_n^*(\gamma) = \frac{L_n+1}{2}\right\}.$$

---

[1] *Семенова Татьяна Юрьевна* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ; Моск. центр фунд. и прикл. матем., e-mail: station@list.ru.

Semenova Tatiana Yuryevna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

В работе [7] доказано, что

$$\|f - S_n(f)\| \leqslant \frac{L_n + 1}{2}\, \omega\Big(f,\, \frac{2\pi}{3(n+0.5)}\Big), \quad \forall f \in C_{2\pi}, \tag{2}$$

при этом выполнено двойное неравенство

$$\frac{2\pi}{3(n+0.5)} - \frac{\pi^2}{4(n+0.5)^3} \leqslant \gamma_n^* \leqslant \frac{2\pi}{3(n+0.5)},\ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Таким образом, значение аргумента модуля непрерывности в оценке (2) таково, что при больших значениях n его нельзя существенно уменьшить. Однако при небольших значениях n зазор в (3) не так уж мал:

$$\begin{aligned} 0.665181\ldots \leqslant \gamma_1^* \leqslant 1.396263\ldots, \\ 0.679844\ldots \leqslant \gamma_2^* \leqslant 0.837758\ldots, \\ 0.540849\ldots \leqslant \gamma_3^* \leqslant 0.598398\ldots. \end{aligned}$$

Поэтому при небольших конкретных значениях n для улучшения оценки приближения функции частичной суммой ее ряда Фурье есть смысл найти точное значение γ_n^* и заменить им аргумент модуля непрерывности в (2). В настоящей работе предлагается алгоритм для вычисления γ_n^*, а также получены значения $\gamma_1^*,\ \gamma_2^*,\ \gamma_3^*$.

Заметим также, что заменить аргумент $\frac{2\pi}{3(n+0.5)}$ в модуле непрерывности на величину γ_n^* можно и в оценке нормы остатка ряда Фурье:

$$\|f - S_n(f)\| < \Big(\frac{2}{\pi^2}\ln\frac{V(f)}{\omega\big(f,\,\frac{2\pi}{3(n+0.5)}\big)} + 1.303\Big)\omega\Big(f,\,\frac{2\pi}{3(n+0.5)}\Big),$$

доказанной в работе [8] для произвольной непостоянной функции f из $C_{2\pi}$, имеющей ограниченную на отрезке $[-\pi,\,\pi]$ вариацию $V(f)$. Это даст более точный результат в силу монотонного возрастания функции $\big(\frac{2}{\pi^2}\ln\frac{V}{\omega} + 1.303\big)\,\omega$ при допустимых значениях ω.

2. Вспомогательные результаты. Обозначим через $C(\gamma)$ класс непрерывных функций, определенных на отрезке $[a,\,b]$ и удовлетворяющих условию $\omega(f,\gamma) \leqslant 1$. Сформулируем доказанную в работе С. Б. Стечкина и В. Т. Гаврилюк [7] лемму, которая нам понадобится в дальнейшем.

Лемма 1 [7]. *Пусть* $a < c < b$, $\psi \in L[a,\,b]$, $\psi(t) \geqslant 0$ *на* $[a,\,c]$, $\psi(t) \leqslant 0$ *на* $[c,\,b]$, $\Psi(x) = \int\limits_a^x \psi(t)dt$, $\Psi(b) = 0$,

$$M(\psi,\gamma) = \sup_{f\in C(\gamma)} \Big|\int\limits_a^b f(t)\psi(t)dt\Big|.$$

Тогда для любого значения γ, $\frac{1}{2}(b-a) \leqslant \gamma \leqslant b-a$, *справедливо равенство*

$$M(\psi,\gamma) = \max(\Psi(c), \eta(\gamma)),$$

где

$$\eta(\gamma) = \max_{a\leqslant t\leqslant b-\gamma}(\Psi(t) + \Psi(t+\gamma)).$$

Заметим, что из условий на функцию $\psi(t)$ следует монотонное возрастание $\Psi(t)$ на $(a,\,c)$ и монотонное убывание $\Psi(t)$ на $(c,\,b)$. Докажем небольшое уточнение леммы 1.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1, *функция* $\Psi(t)$ *не имеет промежутков постоянства, и пусть*

$$\gamma^* = \inf\{0 < \gamma \leqslant b-a,\ M(\psi,\gamma) = \Psi(c)\}.$$

Тогда для любого значения γ, $0 < \gamma < \gamma^*$, *справедливо неравенство* $M(\psi,\gamma) > \Psi(c)$. *Если же* $\gamma^* \leqslant \gamma \leqslant b-a$, *то* $M(\psi,\gamma) = \Psi(c)$.

Доказательство. Зафиксируем $\gamma \in (0,\,b-a]$. Пусть величина $t_\gamma \in [a,\,b-\gamma]$ такова, что $\eta(\gamma) = \Psi(t_\gamma) + \Psi(t_\gamma+\gamma)$. Понятно, что $t_\gamma \in [a,\,c]$ и $t_\gamma + \gamma \in [c,\,b]$. Возьмем произвольное значение $\gamma' \in [0,\,\gamma)$. Для любых значений $t' \in [t_\gamma,\,c]$ и $t'' \in [c,\,t_\gamma+\gamma]$ с условием $t'' - t' = \gamma'$ выполнено неравенство

$\eta(\gamma') \geqslant \Psi(t') + \Psi(t'') > \Psi(t_\gamma) + \Psi(t_\gamma + \gamma) = \eta(\gamma)$. Таким образом, мы получили, что функция $\eta(\gamma)$ строго убывающая на $[0,\, b-a]$ и непрерывная в силу непрерывности $\Psi(t)$. Поскольку $\eta(0) = 2\Psi(c)$, $\eta(b-a) = 0$, существует такое $\widetilde{\gamma}$, что $\eta(\widetilde{\gamma}) = \Psi(c)$. Поскольку $\eta(b-c) \geqslant \Psi(c) + \Psi(b) = \Psi(c)$, то $\widetilde{\gamma} \geqslant b-c$. Аналогично $\widetilde{\gamma} \geqslant c-a$. Значит, $\widetilde{\gamma} \geqslant \frac{1}{2}(b-a)$. Из леммы 1 следует равенство $M(\psi,\, \widetilde{\gamma}) = \max(\Psi(c), \eta(\widetilde{\gamma})) = \Psi(c)$.

Возьмем произвольное значение $\gamma \in (0,\, \widetilde{\gamma})$. Тогда $\eta(\gamma) > \eta(\widetilde{\gamma})$ и для некоторого t_γ выполнено $\eta(\gamma) = \Psi(t_\gamma) + \Psi(t_\gamma + \gamma)$. Найдем такое $\varepsilon > 0$, что $\Psi(t_\gamma - \varepsilon) + \Psi(t_\gamma + \gamma + \varepsilon) > \eta(\widetilde{\gamma})$. Определим функцию $f_\varepsilon(t)$ следующим образом: $f_\varepsilon(t) = 1$ при $t \in [a,\, t_\gamma - \varepsilon]$, $f_\varepsilon(t) = 0$ при $t \in [t_\gamma,\, t_\gamma + \gamma]$, $f_\varepsilon(t) = -1$ при $t \in [t_\gamma + \gamma + \varepsilon,\, b]$, $f_\varepsilon(t)$ линейна на отрезках $[t_\gamma - \varepsilon,\, t_\gamma]$ и $[t_\gamma + \gamma,\, t_\gamma + \gamma + \varepsilon]$. Тогда $f_\varepsilon \in C(\gamma)$ и

$$M(\psi,\gamma) \geqslant \int\limits_a^b f_\varepsilon(t)\psi(t)dt > \int\limits_a^{t_\gamma-\varepsilon} \psi(t)dt + \int\limits_{t_\gamma+\gamma+\varepsilon}^b \psi(t)dt = \Psi(t_\gamma - \varepsilon) + \Psi(t_\gamma + \gamma + \varepsilon) > \eta(\widetilde{\gamma}) = \Psi(c).$$

Теперь пусть $\gamma \in (\widetilde{\gamma}, b-a]$. Тогда $\gamma > \frac{1}{2}(b-a)$ и из леммы 1 и монотонного убывания функции η следует, что $M(\psi,\gamma) = \max(\Psi(c), \eta(\gamma)) = \Psi(c)$.

В итоге при $\gamma \in (0, \widetilde{\gamma})$ выполнено неравенство $M(\psi,\gamma) > \Psi(c)$, а при $\gamma \in (\widetilde{\gamma}, b-a]$ — равенство $M(\psi,\gamma) = \Psi(c)$. Отсюда следует равенство $\widetilde{\gamma} = \gamma^*$ и утверждение леммы.

Обозначим $\Phi_n(x) = \int\limits_x^\pi D_n(t)dt$. В [7] доказано, что на $(0,\, \pi)$ функция $\Phi_n(x)$ имеет n простых нулей $0 < x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} < \pi$, для которых верны неравенства $\frac{\pi(m-0.5)}{n+0.5} < x_m^{(n)} < \frac{\pi m}{n+0.5}$. Обозначим $x_{n+1}^{(n)} = \pi$, $I_{m,n} = [x_m^{(n)},\, x_{m+1}^{(n)}]$. Легко показать, что

$$\int\limits_{I_{m,n}} D_n(t)dt = 0, \quad \int\limits_0^{x_m^{(n)}} D_n(t)dt = \int\limits_0^\pi D_n(t)dt = \frac{\pi}{2}$$

при всех $m = 1, \ldots, n$.

Применим лемму 2 к отрезку $[a,\, b] = I_{m,n}$ и функции $\psi_{m,n}(t) = (-1)^{m+1} D_n(t)$. На промежутке $[x_m^{(n)},\, \frac{\pi m}{n+0.5})$ функция $\psi_{m,n}(t)$ положительна, а на $(\frac{\pi m}{n+0.5}, x_{m+1}^{(n)}]$ отрицательна. Обозначим

$$\Psi_{m,n}(t) = \int\limits_{x_m^{(n)}}^t (-1)^{m+1} D_n(\tau)d\tau, \quad a_{m,n} = \frac{1}{2}\int\limits_{I_{m,n}} |D_n(t)|dt = \Psi_{m,n}\Big(\frac{\pi m}{n+0.5}\Big).$$

Мы получим следующее утверждение.

Следствие 1. *Существует единственное значение $\gamma = \gamma_{m,n}$, удовлетворяющее системе*

$$\begin{cases} \Psi_{m,n}(t) + \Psi_{m,n}(t+\gamma) = a_{m,n}, \\ D_n(t) + D_n(t+\gamma) = 0, \\ t \in \Big[x_m^{(n)},\, \frac{\pi m}{n+0.5}\Big),\ \gamma \in \big(0, x_{m+1}^{(n)} - x_m^{(n)}\big]. \end{cases}$$

Если $\gamma \in \big[\gamma_{m,n},\, x_{m+1}^{(n)} - x_m^{(n)}\big]$, то для любой функции $f \in C_{2\pi}$ выполнено неравенство

$$\Big|\int\limits_{I_{m,n}} f(t)D_n(t)dt\Big| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{I_{m,n}} |D_n(t)|dt \cdot \omega(f,\, \gamma). \tag{4}$$

3. Основной результат. Пусть $\widetilde{\gamma}_n = \max\{x_1^{(n)}, \gamma_{m,n},\, m = 1, \ldots, n\}$.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in C_{2\pi}$ верно неравенство*

$$\|f(x) - S_n(f,\, x)\| \leqslant \frac{L_n + 1}{2}\, \omega\big(f,\, \widetilde{\gamma}_n\big), \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

при этом $\widetilde{\gamma}_n = \gamma_n^*$.

Доказательство. Неравенство (5) доказывается аналогично неравенству (2) работы [7], поэтому приведем его без подробностей. В силу линейности оператора $S_n(f)$ и инвариантности модуля непрерывности относительно сдвига аргумента можно считать, что $f(0) = 0$, и оценивать сверху $|f(0) - S_n(f,0)|$. Используем интегральное представление разности функции и ее частичной суммы ряда Фурье [9, гл I, с. 103–104]:

$$|f(0) - S_n(f,0)| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t)dt\right| = \left|\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \widetilde{f}(t)\, D_n(t)dt\right|,$$

где $\widetilde{f}(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$. Разобьем интеграл на сумму интегралов по отрезкам $[0,\, x_1^{(n)}]$, $I_{1,n}, \ldots, I_{n,n}$. Имеем

$$|f(0) - S_n(f,0)| \leqslant \frac{2}{\pi}\left|\int_{0}^{x_1^{(n)}} \widetilde{f}(t)\, D_n(t)dt\right| + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\left|\int_{I_{m,n}} \widetilde{f}(t)\, D_n(t)dt\right|. \tag{6}$$

Учитывая, что на $[0,\, x_1^{(n)}]$ значения $D_n(t)$ положительны, и применяя к слагаемым суммы (6) неравенство (4), получаем

$$|f(0) - S_n(f,0)| \leqslant \frac{2}{\pi}\omega\big(\widetilde{f},\, x_1^{(n)}\big)\int_{0}^{x_1^{(n)}} D_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\omega\big(\widetilde{f},\, \gamma_{m,n}\big)\int_{I_{m,n}} |D_n(t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant \omega\big(f,\, \widetilde{\gamma}_n\big)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{x_1^{(n)}} D_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{I_{m,n}} |D_n(t)|dt\right) = \omega\big(f,\, \widetilde{\gamma}_n\big)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}L_n\right). \tag{7}$$

Теперь докажем, что значение $\widetilde{\gamma}_n$ в оценке (4) нельзя уменьшить. Для произвольного положительного $\gamma < \widetilde{\gamma}_n$ построим непрерывную 2π-периодическую функцию f, для которой верны соотношения

$$\omega(f,\gamma) = 1, \;\; |f(0) - S_n(f,0)| > \frac{L_n + 1}{2}.$$

Положим $\varepsilon_0 = \min\{\frac{\pi m}{n+0.5} - x_m^{(n)},\, x_{m+1}^{(n)} - \frac{\pi m}{n+0.5},\;\; m = 1,\ldots,n\}$.

Рассмотрим случай, когда $\widetilde{\gamma}_n = x_1^{(n)}$. Пусть $\lambda = D_n(x_1^{(n)})$. Зафиксируем значение ε так, что $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ и $\varepsilon < \frac{(x_1^{(n)}-\gamma)\lambda}{(n+1)^2+2\lambda} < \frac{x_1^{(n)}-\gamma}{2}$. Определим

$$f_{0,\varepsilon}(t) = \begin{cases} 0, & t = 0; \\ 1, & t \in [\varepsilon,\, \varepsilon+\gamma]; \\ 2, & t \in [2\varepsilon+\gamma,\, x_1^{(n)}]; \\ \text{линейна на } [0,\, \varepsilon] \text{ и } [\varepsilon+\gamma,\, 2\varepsilon+\gamma], \end{cases}$$

$$f_{m,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{(-1)^{m+1}}{2}, & t \in [x_m^{(n)},\, \frac{\pi m}{n+0.5} - \varepsilon]; \\ \frac{(-1)^m}{2}, & t \in [\frac{\pi m}{n+0.5} + \varepsilon,\, x_{m+1}^{(n)}]; \\ \text{линейна на } [\frac{\pi m}{n+0.5} - \varepsilon,\, \frac{\pi m}{n+0.5} + \varepsilon] \end{cases}$$

при $m = 1,\ldots,n$. Несложно показать, что $D_n(t)$ монотонно убывает на $[0,\, \frac{\pi}{n+0.5}]$, поэтому $D_n(t) \geqslant \lambda$ для $t \in [0,\, x_1^{(n)}]$. С учетом этого, а также неравенства $|D_n(t)| < n+1$, верного для любого t, имеем оценки:

$$\int_{0}^{x_1^{(n)}} f_{0,\varepsilon}(t)\, D_n(t)dt > \int_{0}^{x_1^{(n)}} D_n(t)dt - \varepsilon(n+1) + (x_1^{(n)} - \gamma - 2\varepsilon)\lambda, \tag{8}$$

$$\int\limits_{I_{m,n}} f_{m,\varepsilon}(t)\, D_n(t)dt = \int\limits_{I_{m,n}} |f_{m,\varepsilon}(t)\, D_n(t)|dt > \frac{1}{2}\int\limits_{I_{m,n}} |D_n(t)|dt - \varepsilon(n+1). \tag{9}$$

Определим функцию f_ε так, чтобы она совпадала с $f_{0,\varepsilon}$ на $[0,\, x_1^{(n)}]$ и была равна $f_{m,\varepsilon}+\frac{3}{2}$ на каждом отрезке $I_{m,n}$. На $[-\pi,0]$ продолжим f_ε четным образом. Функция f_ε непрерывна на $[-\pi,\,\pi]$, $f_\varepsilon(-\pi)=f_\varepsilon(\pi)$ и при этом $\omega(f,\gamma)=1$. Поскольку $\int\limits_{I_{m,n}} D_n(t)dt=0$, верно равенство

$$\int\limits_{I_{m,n}} f_{m,\varepsilon}(t)\, D_n(t)dt = \int\limits_{I_{m,n}} f_\varepsilon(t)\, D_n(t)dt.$$

С учетом этого факта, а также неравенств (8) и (9) получаем следующую оценку:

$$|f_\varepsilon(0)-S_n(f_\varepsilon,0)| = \frac{2}{\pi}\left|\int\limits_0^\pi f_\varepsilon(t)\, D_n(t)dt\right| = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{x_1^{(n)}} f_{0,\varepsilon}(t)\, D_n(t)dt + \sum_{m=1}^{n}\int\limits_{I_{m,n}} f_{m,\varepsilon}(t)\, D_n(t)dt\right) >$$

$$> \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{x_1^{(n)}} D_n(t)dt - \varepsilon(n+1) + (x_1^{(n)}-\gamma-2\varepsilon)\lambda + \frac{1}{2}\int\limits_{x_1^{(n)}}^{\pi} |D_n(t)|dt - \varepsilon(n+1)n\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1^{(n)}} D_n(t)dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} |D_n(t)|dt - \varepsilon\left((n+1)^2+2\lambda\right) + (x_1^{(n)}-\gamma)\lambda\right) >$$

$$> \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{x_1^{(n)}} D_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} |D_n(t)|dt = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}L_n.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\widetilde{\gamma}_n=\gamma_{\widetilde{m},n}$ при некотором $\widetilde{m}$. Если $\gamma<\gamma_{\widetilde{m},n}$, то для функции $\eta(\gamma)=\max(\Psi_{\widetilde{m},n}(t)+\Psi_{\widetilde{m},n}(t+\gamma))$, где максимум берется по $t\in[x_{\widetilde{m}}^{(n)},\, x_{\widetilde{m}+1}^{(n)}-\gamma]$, согласно доказанному в лемме 2 свойству монотонности выполнено неравенство $\eta(\gamma)>\eta(\gamma_{\widetilde{m},n})$. Найдем $t^*\in I_{\widetilde{m},n}$ такое, что

$$\Psi_{\widetilde{m},n}(t^*)+\Psi_{\widetilde{m},n}(t^*+\gamma) > \eta(\gamma_{\widetilde{m},n}) = \frac{1}{2}\int\limits_{I_{\widetilde{m},n}} |D_n(t)|dt.$$

В силу непрерывности функции $\Psi_{\widetilde{m},n}$ существует такое положительное $\varepsilon<\varepsilon_0$, что

$$\Psi_{\widetilde{m},n}(t^*-\varepsilon)+\Psi_{\widetilde{m},n}(t^*+\gamma+\varepsilon) > \frac{1}{2}\int\limits_{I_{\widetilde{m},n}} |D_n(t)|dt + \varepsilon(n+1)^2, \tag{10}$$

при этом

$$t^*-\varepsilon > x_{\widetilde{m}}^{(n)}, \quad t^*+\gamma+\varepsilon < x_{\widetilde{m}+1}^{(n)}.$$

Определим

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} (-1)^{\widetilde{m}+1}, & t\in[x_{\widetilde{m}}^{(n)},\, t^*-\varepsilon];\\ 0, & t\in[t^*,\, t^*+\gamma];\\ (-1)^{\widetilde{m}}, & t\in[t^*+\gamma+\varepsilon,\, x_{\widetilde{m}+1}^{(n)}];\\ \text{линейна на } [t^*-\varepsilon,\, t^*] \text{ и } [t^*+\gamma,\, t^*+\gamma+\varepsilon]. \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_{I_{\widetilde{m},n}} g_\varepsilon(t)\, D_n(t)dt > \left|\int\limits_{x_{\widetilde{m}}^{(n)}}^{t^*-\varepsilon} D_n(t)dt - \int\limits_{t^*+\gamma+\varepsilon}^{x_{\widetilde{m}+1}^{(n)}} D_n(t)dt\right| = \Psi_{\widetilde{m},n}(t^*-\varepsilon)+\Psi_{\widetilde{m},n}(t^*+\gamma+\varepsilon). \tag{11}$$

Теперь положим

$$f_\varepsilon(t)=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon}t, & t\in[0,\,\varepsilon];\\ 1, & t\in[\varepsilon,\,x_1^{(n)}];\\ f_{m,\varepsilon}(t)+\frac{1}{2}, & t\in I_{m,n} \text{ при } m<\widetilde{m};\\ g_\varepsilon(t)+\frac{1+(-1)^{\widetilde{m}}}{2}, & t\in I_{\widetilde{m},n};\\ f_{m,\varepsilon}(t)+\frac{1}{2}+(-1)^{\widetilde{m}}, & t\in I_{m,n} \text{ при } m>\widetilde{m}.\end{cases}$$

На отрезок $[-\pi,0]$ продолжим f_ε четным образом. Функция f_ε непрерывна на $[-\pi,\,\pi]$, $f_\varepsilon(-\pi)=f_\varepsilon(\pi)$ и при этом $\omega(f,\gamma)=1$. Учитывая оценки (9)–(11), получаем

$$|f_\varepsilon(0)-S_n(f_\varepsilon,0)|>\frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{x_1^{(n)}}D_n(t)dt-\varepsilon(n+1)+\sum_{m\neq\widetilde{m}}\int\limits_{I_{m,n}}f_{m,\varepsilon}(t)\,D_n(t)dt+\int\limits_{I_{\widetilde{m},n}}g_\varepsilon(t)\,D_n(t)dt\right)>$$

$$>\frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{x_1^{(n)}}D_n(t)dt-\varepsilon(n+1)+\frac{1}{2}\sum_{m\neq\widetilde{m}}\int\limits_{I_{m,n}}|D_n(t)|dt-\varepsilon(n+1)(n-1)+\frac{1}{2}\int\limits_{I_{\widetilde{m},n}}|D_n(t)|dt+\varepsilon(n+1)^2\right)>$$

$$>\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{x_1^{(n)}}D_n(t)dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}|D_n(t)|dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}L_n.$$

Теорема доказана.

4. Вычисление значений γ_n^* при $n=1,\,2,\,3$. Для применения результата теоремы заметим, что

$$\Psi_{m,n}(t)=(-1)^{m+1}\left(\frac{t}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin(kt)-\frac{\pi}{2}\right), \tag{12}$$

$$a_{m,n}=\Psi_{m,n}\left(\frac{\pi m}{n+0.5}\right)=\left|\frac{\pi m}{2n+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin\left(\frac{\pi mk}{n+0.5}\right)-\frac{\pi}{2}\right|. \tag{13}$$

Следствие 2. *Имеют место следующие утверждения:*

1) γ_1^* *есть решение системы*

$$\begin{cases}t+\frac{\gamma}{2}+\sin t+\sin(t+\gamma)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5\pi}{6},\\ 1+\cos t+\cos(t+\gamma)=0,\end{cases} \tag{14}$$

а именно $\gamma_1^*=1.310179\ldots,\ \frac{5\pi}{12}<\gamma_1^*<\frac{3\pi}{7}$;

2) γ_2^* *есть решение системы*

$$\begin{cases}t+\frac{\gamma}{2}+\sin t+\sin(t+\gamma)+\frac{1}{2}\sin(2t)+\frac{1}{2}\sin(2t+2\gamma)=\sin\frac{4\pi}{5}+\frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{5}+\frac{9\pi}{10},\\ 1+\cos t+\cos(t+\gamma)+\cos(2t)+\cos(2t+2\gamma)=0,\end{cases} \tag{15}$$

а именно $\gamma_2^*=0.8164..,\ \frac{\pi}{4}<\gamma_2^*<\frac{5\pi}{19}$;

3) γ_3^* *есть решение системы*

$$\begin{cases}t+\frac{\gamma}{2}+\sin t+\sin(t+\gamma)+\frac{1}{2}\sin(2t)+\frac{1}{2}\sin(2t+2\gamma)+\frac{1}{3}\sin(3t)+\frac{1}{3}\sin(3t+3\gamma)=\\ \qquad=\sin\frac{6\pi}{7}+\frac{1}{2}\sin\frac{12\pi}{7}+\frac{1}{3}\sin\frac{18\pi}{7}+\frac{13\pi}{14},\\ 1+\cos t+\cos(t+\gamma)+\cos(2t)+\cos(2t+2\gamma)+\cos(3t)+\cos(3t+3\gamma)=0,\end{cases}$$

а именно $\gamma_3^*=0.5903\ldots,\ \frac{3\pi}{16}<\gamma_3^*<\frac{7\pi}{37}$.

Доказательство. Рассмотрим случай $n=1$. Значение $x_1^{(1)}$ есть наименьший положительный корень уравнения $\int\limits_0^x D_n(t)dt=\frac{\pi}{2}$ или уравнения $\frac{1}{2}x+\sin x=\frac{\pi}{2}$. Численно получаем $x_1^{(1)}=1.2461\ldots$.

По формулам (12), (13) имеем равенства $a_{1,1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$ и $\Psi_{1,1}(t) + \Psi_{1,1}(t+\gamma) = t + \frac{\gamma}{2} + \sin t + \sin(t+\gamma) - \pi$. Значит, $\gamma = \gamma_{1,1}$ есть решение системы (14). Численно получаем $\gamma_{1,1} = 1.310179\ldots$. Таким образом, $\gamma_1^* = \max\{x_1^{(1)},\, \gamma_{1,1}\} = 1.310179\ldots$.

Рассмотрим случай $n = 2$. Значение $x_1^{(2)}$ есть наименьший положительный корень уравнения $\frac{1}{2}x + \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{\pi}{2}$. Численно получаем $x_1^{(2)} = 0.7619\ldots$. Далее по формулам (12), (13) имеем равенства

$$
\begin{gathered}
a_{1,2} = \sin\tfrac{2\pi}{5} + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{4\pi}{5} - \tfrac{3\pi}{10}\,, \\
a_{2,2} = -\sin\tfrac{4\pi}{5} - \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{8\pi}{5} + \tfrac{\pi}{10}\,, \\
\Psi_{1,2}(t) + \Psi_{1,2}(t+\gamma) = t + \tfrac{\gamma}{2} + \sin t + \sin(t+\gamma) + \tfrac{1}{2}\sin(2t) + \tfrac{1}{2}\sin(2t+2\gamma) - \pi, \\
\Psi_{2,2}(t) + \Psi_{2,2}(t+\gamma) = -\big(\Psi_{1,2}(t) + \Psi_{1,2}(t+\gamma)\big).
\end{gathered}
$$

Значит, $\gamma = \gamma_{1,2}$ есть решение системы

$$
\begin{cases}
t + \frac{\gamma}{2} + \sin t + \sin(t+\gamma) + \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t+2\gamma) = \sin\frac{2\pi}{5} + \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{5} + \frac{7\pi}{10}, \\
1 + \cos t + \cos(t+\gamma) + \cos(2t) + \cos(2t+2\gamma) = 0,
\end{cases}
$$

а $\gamma = \gamma_{2,2}$ — решение системы (15). Численно получаем $\gamma_{1,2} = 0.8074\ldots$, $\gamma_{2,2} = 0.8164\ldots$. Имеем $\gamma_2^* = \max\{x_1^{(2)},\, \gamma_{1,2},\, \gamma_{2,2}\} = \gamma_{2,2} = 0.8164\ldots$.

Случай $n = 3$ рассматривается аналогично. Приведем лишь результаты окончательных расчетов: $x_1^{(3)} = 0.5472\ldots$, $\gamma_{1,3} = 0.5809\ldots$, $\gamma_{2,3} = 0.5883\ldots$, $\gamma_{3,3} = 0.5903\ldots$. Отсюда имеем $\gamma_3^* = 0.5903\ldots$. Следствие доказано.

5. Оценка уклонения функции от n-й частичной суммы ее ряда Фурье через модуль непрерывности, взятый с аргументом, меньшим γ_n^*. Продемонстрируем еще одну возможность применения лемм 1 и 2. Посмотрим, насколько увеличится постоянная $\frac{L_n+1}{2}$ в оценке (5), если в аргументе модуля непрерывности взять значения $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{16}$ для случаев $n = 1, 2, 3$ соответственно.

Согласно теореме 1

$$\|f(x) - S_1(f,\, x)\| \leqslant \frac{L_1+1}{2}\cdot\omega\big(f,\, \gamma_1^*\big), \text{ где } \frac{L_1+1}{2} = 1.21799\ldots;$$

$$\|f(x) - S_2(f,\, x)\| \leqslant \frac{L_2+1}{2}\cdot\omega\big(f,\, \gamma_2^*\big), \text{ где } \frac{L_2+1}{2} = 1.32109\ldots;$$

$$\|f(x) - S_3(f,\, x)\| \leqslant \frac{L_3+1}{2}\cdot\omega\big(f,\, \gamma_3^*\big), \text{ где } \frac{L_3+1}{2} = 1.38916\ldots.$$

Теорема 2. *Для любой функции $f \in C_{2\pi}$ верны неравенства*

$$\|f - S_1(f)\| < 1.219\cdot\omega\big(f,\, 5\pi/12\big),$$

$$\|f - S_2(f)\| < 1.339\cdot\omega\big(f,\, \pi/4\big),$$

$$\|f - S_3(f)\| < 1.3896\cdot\omega\big(f,\, 3\pi/16\big).$$

Доказательство. 1) Пусть $n = 1$. Так как $x_1^{(1)} = 1.2461\ldots < 5\pi/12$, то

$$\left|\int\limits_0^{x_1^{(1)}} f(t)\, D_1(t)dt\right| \leqslant \omega\big(f,\, 5\pi/12\big)\int\limits_0^{x_1^{(1)}} D_1(t)dt = \frac{\pi}{2}\cdot\omega\big(f,\, 5\pi/12\big).$$

В силу того что $\frac{1}{2}(\pi - x_1^{(1)}) < \frac{5\pi}{12} < \pi - x_1^{(1)}$ и $\frac{5\pi}{12} < \gamma_1^* = \gamma_{1,1}$, применяя лемму 1 и лемму 2 и делая численные расчеты, для любой $f \in C_{2\pi}$ будем иметь

$$\left|\int\limits_{I_{1,1}} f(t)\, D_1(t)dt\right| \leqslant \omega\big(f,\, 5\pi/12\big)\max_{I_{1,1}}\big(\Psi_{1,1}(t) + \Psi_{1,1}(t+5\pi/12)\big) < 0.343\cdot\omega\big(f,\, 5\pi/12\big).$$

В итоге аналогично неравенству (7) получаем

$$\|f - S_1(f)\| \leqslant \frac{2}{\pi}\big(\pi/2 + 0.343\big) \cdot \omega\big(f,\, 5\pi/12\big) < 1.219 \cdot \omega\big(f,\, 5\pi/12\big).$$

2) Пусть $n = 2$. Имеем $x_1^{(2)} = 0.76198\ldots < \pi/4$, поэтому

$$\left|\int\limits_0^{x_1^{(2)}} f(t)\, D_2(t)dt\right| \leqslant \omega\big(f,\, \pi/4\big) \int\limits_0^{x_1^{(2)}} D_2(t)dt = \frac{\pi}{2} \cdot \omega\big(f,\, \pi/4\big).$$

Далее, так как $x_2^{(2)} = 1.93213\ldots$, то $\frac{1}{2}(x_2^{(2)} - x_1^{(2)}) < \frac{\pi}{4} < x_2^{(2)} - x_1^{(2)}$, при этом верно неравенство $\frac{\pi}{4} < \gamma_{1,2}$, поэтому по леммам 1 и 2 для любой $f \in C_{2\pi}$ получим

$$\left|\int\limits_{I_{1,2}} f(t)\, D_2(t)dt\right| \leqslant \omega\big(f,\, \pi/4\big) \max_{I_{1,2}} \big(\Psi_{1,2}(t) + \Psi_{1,2}(t + \pi/4)\big) < 0.31622 \cdot \omega\big(f,\, \pi/4\big).$$

Поскольку $\frac{1}{2}(\pi - x_2^{(2)}) < \frac{\pi}{4} < \pi - x_2^{(2)}$ и при этом $\frac{\pi}{4} < \gamma_{2,2}$, то для любой $f \in C_{2\pi}$ выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_{I_{2,2}} f(t)\, D_2(t)dt\right| \leqslant \omega\big(f,\, \pi/4\big) \max_{I_{2,2}} \big(\Psi_{2,2}(t) + \Psi_{2,2}(t + \pi/4)\big) < 0.21578 \cdot \omega\big(f,\, \pi/4\big).$$

Получаем

$$\|f(x) - S_2(f,\, x)\| \leqslant \frac{2}{\pi}\big(\pi/2 + 0.31622 + 0.21578\big) \cdot \omega\big(f,\, \pi/4\big) < 1.339 \cdot \omega\big(f,\, \pi/4\big).$$

Для $n = 3$ рассуждения аналогичны. Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность ведущему научному сотруднику А. Ю. Попову за внимание к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Киш О.* Оценка отклонения частных сумм ряда Фурье // Acta math. Acad. sci. hung. 1971. **22**, N 1–2. 173–176.
2. *Гаврилюк В.Т.* Приближение непрерывных периодических функций полиномами Рогозинского и суммами Фурье // Вопросы теории приближения функций и ее приложений. Киев, 1976. 46–59.
3. *Гаврилюк В.Т.* Приближение непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами // Теория приближения функций. М., 1977. 101–103.
4. *Miloradović S.* Aproksimacije funckcija Fourier-ovim sumama i gorns granica Fourierovih koeficijenta. Beograd: Magistarski rad, 1977.
5. *Даугавет И.К.* Об одном свойстве вполне непрерывных операторов в пространстве C // Успехи матем. наук. 1963. **18**, № 5. 157–158.
6. *Стечкин С.Б.* О приближении непрерывных периодических функций суммами Фавара // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1971. **109**. 26–34.
7. *Гаврилюк В.Т., Стечкин С.Б.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1985. **172**. 107–127.
8. *Попов А.Ю., Семенова Т.Ю.* Уточнение оценки скорости равномерной сходимости ряда Фурье непрерывной периодической функции ограниченной вариации // Матем. заметки. 2023. **113**, № 4. 544–559.
9. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

Поступила в редакцию
09.06.2023