Математика

УДК 511

АСИМПТОТИКА ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ДВУХ ВЗВЕШЕННЫХ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

М. А. Ходякова[1]

В работе рассматривается пара взвешенных сумм, состоящих из независимых одинаково распределенных нерешетчатых величин. В крамеровских предположениях на слагаемые доказана предельная теорема для асимптотики вероятностей того, что первая сумма превосходит вторую, если среднее первой суммы меньше среднего второй. В качестве приложения рассматривается асимптотика вероятности победы команды в сражении двух больших команд гладиаторов в модели сражения гладиаторов, введенной К. Каминским, Е. Люксом, П. Нельсоном.

Ключевые слова: большие уклонения, взвешенные суммы, предельные теоремы, интегро-локальные теоремы, модель игры гладиаторов.

We consider two weighted sums of independent identically distributed non-lattice variables. We assume that the mean of the first sum is less than the mean of the second sum and consider the probability of the rare event that the first sum is greater than the second one. We assume the Cramer's condition for the summands. Under some additional assumptions we study the asymptotical behaviour of the probability above. The results are applied to the gladiator model introduced by K. Kaminsky, E. Luks and P. Nelson.

Key words: large deviations, weighted sums, limit theorems, integro-local theorems, gladiator game.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-4-1

1. Введение. Пусть $\xi_{1,n},\dots,\xi_{n,n}$ — случайные величины с нерешетчатым распределением, образующие схему серий. В работе [1] А. А. Боровковым получены интегро-локальные теоремы для случайных величин

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_{i,n}$$

в случае нормальных, умеренных и больших уклонений.

В настоящей работе рассматривается более частный случай $\xi_{i,n}=a_{i,n}X_{i,n}$, где $a_{i,n}$ — некоторые константы, $X_{i,n}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Одним из первых исследований вероятностей больших уклонений для данной модели стала работа С.А. Бука [2]. Продолжением исследований в этой области послужила работа И. В. Соболева, А. В. Шкляева [3], в которой рассмотрен случай функционально заданных весов, т.е. $a_{i,n}=f(i/n)$, $i\leqslant n$, для некоторой дважды гладкой функции f.

Рассматриваются две суммы

$$S_{n_1,1}=\sum_{i=1}^{n_1}a_{i,n_1}X_i,\quad S_{n_2,2}=\sum_{j=1}^{n_2}b_{j,n_2}Y_j,$$

где X_i, $i=1,\dots,n_1$, — независимые одинаково распределенные нерешетчатые величины, Y_j, $j=1,\dots,n_2$, — независимые одинаково распределенные нерешетчатые величины, для которых при некоторых параметрах $h_k^-\leqslant 0\leqslant h_k^+$, $k=1,2$, выполнены условия:

$$\mathbf{E}X_1^2e^{h_1^-X_1}<+\infty,\quad \mathbf{E}X_1^2e^{h_1^+X_1}<+\infty,$$
$$\mathbf{E}Y_1^2e^{h_2^-Y_1}<+\infty,\quad \mathbf{E}Y_1^2e^{h_2^+Y_1}<+\infty.$$

[1] *Ходякова Мария Александровна* — студ. каф. математической статистики и случайных процессов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: khodyakova.mari@mail.ru.

Khodyakova Mariya Alexandrovna — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Statistics and Stochastic Processes.

Мы будем предполагать, что числовые коэффициенты a_{i,n_1} и b_{j,n_2} являются значениями некоторых дважды гладких функций f и g в точках i/n_1 и j/n_2 соответственно.

Будем считать, что n_1, n_2 стремятся к бесконечности, причем $n_1/(n_1+n_2) \to p$, где $p \in (0,1)$, тогда вероятность $\mathbf{P}(S_{n_1,1} > S_{n_2,2})$ при условии

$$p\mathbf{E}X_1 \int_0^1 f(x)dx < (1-p)\mathbf{E}Y_1 \int_0^1 g(x)dx$$

стремится к нулю в силу закона больших чисел Чебышёва. В настоящей работе доказывается соотношение

$$\mathbf{P}(S_{n_1,1} > S_{n_2,2}) = \frac{C(h^*)\,(1+o(1))}{\sqrt{2\pi(n_1+n_2)}B(h^*)h^*} \exp\left(n_1 \int_0^1 \ln R_1(f(t)h^*)dt + n_2 \int_0^1 \ln R_2(-g(t)h^*)dt\right),$$
$$n_1, n_2 \to +\infty, \quad \frac{n_1}{n_1+n_2} \to p \in (0,1),$$

где h^* и функции C, B, R_i, $i = 1, 2$, определены в теореме 2.

Полученный результат можно применить для нахождения асимптотики вероятности победы первой команды в сражении двух больших команд из n_1 и n_2 гладиаторов с силами $a_{i,n_1} = f(i/n_1)$, $i \leqslant n_1$, и $b_{j,n_2} = g(j/n_2)$, $j \leqslant n_2$, соответственно, которое происходит по вероятностному механизму модели Каминского (см. [4]).

В пункте 2 приведены вспомогательные утверждения. В пункте 3 сформулирована и доказана теорема об асимптотике вероятностей больших уклонений для пары сумм $S_{n_1,1}$ и $S_{n_2,2}$. В пункте 4 представлен пример использования теоремы для нахождения асимптотики вероятности победы команды в сражении двух больших команд гладиаторов.

2. Предварительные сведения. Пусть X_i, $i = 1, \ldots, n$, — независимые одинаково распределенные нерешетчатые случайные величины. Пусть $a_{i,n}$ — числовые коэффициенты, являющиеся значениями некоторой заданной функции в узловых точках:

$$a_{i,n} = f(i/n), \quad f \in C^2[0,1], \quad i \leqslant n. \tag{1}$$

Пусть

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_{i,n} X_i.$$

Рассмотрим преобразование Крамера для случайной величины X с параметром h, где $h \in [h^-, h^+]$, $h^- \leqslant 0 \leqslant h^+$:

$$\mathbf{P}\left(X^{(h)} \in dx\right) = R(h)^{-1} e^{hx} \mathbf{P}(X \in dx), \quad R(h) = \int_{\mathbb{R}} e^{hx} \mathbf{P}(X \in dx) = \mathbf{E}e^{hX},$$

при этом функция $R(h)$ предполагается конечной. Распределение случайной величины $X^{(h)}$ будем называть сопряженным с параметром h по отношению к распределению X. Пусть $m(h) = (\ln R(h))'$.

В статье [3] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $R(h) = \mathbf{E}e^{hX_1}$, $h \in [h^-, h^+]$, $\mathbf{E}X_1^2 e^{h^- X_1}$ и $\mathbf{E}X_1^2 e^{h^+ X_1}$ конечны, последовательность $\{a_{i,n}\}$ задана соотношением (1), тогда при $n \to +\infty$ для всех положительных последовательностей Δ_n, стремящихся к нулю достаточно медленно, верно соотношение*

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n)) = \frac{\Delta_n C\left(h_{x/n}\right)}{\sqrt{2\pi n} B\left(h_{x/n}\right)} \exp\left(-h_{x/n}x + n\int_0^1 \ln R\left(f(t)h_{x/n}\right)dt\right)(1+o(1)),$$

где

$$C(h) = \sqrt{\frac{R(f(1)h)}{R(f(0)h)}}, \quad B^2(h) = \int_0^1 f^2(t) m'(f(t)h)dt,$$

$h_{x/n} = h_{x/n}(x/n)$ — решение интегрального уравнения

$$\int_0^1 m\left(f(t)h_{x/n}\right) f(t)dt = \frac{x}{n}, \quad \int_0^1 m\left(\frac{f(t)h^-}{\max_{s\in[0,1]} f(s)}\right) f(t)dt \leqslant \frac{x}{n} \leqslant \int_0^1 m\left(\frac{f(t)h^+}{\max_{s\in[0,1]} f(s)}\right) f(t)dt.$$

При этом $o(1)$ равномерно мало по x.

Здесь и далее, говоря, что утверждение выполнено при всех последовательностях $\Delta_n > 0$, стремящихся к нулю достаточно медленно, мы подразумеваем, что найдется такая положительная последовательность $\widehat{\Delta}_n \to 0$, что для любой последовательности $\Delta_n > \widehat{\Delta}_n$, $\Delta_n \to 0$, выполнено требуемое утверждение.

3. Основная теорема. Пусть выполнены следующие условия:

(A) X_i, $i = 1, \ldots, n_1$, — независимые одинаково распределенные нерешетчатые величины, для которых выполнено условие $R_1(h) = \mathbf{E}e^{hX_1}$ при $h \in [h_1^-, h_1^+]$ для некоторых $h_1^- \leqslant 0 \leqslant h_1^+$, $\mathbf{E}X_1^2 e^{h_1^- X_1}$ и $\mathbf{E}X_1^2 e^{h_1^+ X_1}$ конечны;

(B) Y_j, $j = 1, \ldots, n_2$, — независимые одинаково распределенные нерешетчатые величины, для которых выполнено условие $R_2(h) = \mathbf{E}e^{hY_1}$ при $h \in [h_2^-, h_2^+]$ для некоторых $h_2^- \leqslant 0 \leqslant h_2^+$, $\mathbf{E}Y_1^2 e^{h_2^- Y_1}$ и $\mathbf{E}Y_1^2 e^{h_2^+ Y_1}$ конечны.

Пусть $m_i(h) = (\ln R_i(h))'$ при $i = 1, 2$.

Пусть f и g — некоторые положительные дважды гладкие функции на отрезке $[0, 1]$,

$$\begin{aligned} a_{i,n_1} &= f(i/n_1), \quad i \leqslant n_1, \\ b_{j,n_2} &= g(j/n_2), \quad j \leqslant n_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Положим

$$S_{n_1,1} = \sum_{i=1}^{n_1} a_{i,n_1} X_i, \quad S_{n_2,2} = \sum_{j=1}^{n_2} b_{j,n_2} Y_j.$$

Будем считать, что n_1, n_2 стремятся к бесконечности, $n_1/(n_1 + n_2) \to p$, где $p \in (0, 1)$. Вероятность $\mathbf{P}(S_{n_1,1} > S_{n_2,2})$ при условии

$$(C) \qquad p\,\mathbf{E}X_1 \int_0^1 f(x)dx < (1-p)\,\mathbf{E}Y_1 \int_0^1 g(x)dx$$

стремится к нулю в силу закона больших чисел Чебышёва. Зададимся вопросом об асимптотическом поведении рассматриваемой вероятности.

Будем также считать, что выполнено условие

$$(D) \;\; p\int_0^1 m_1(f(t)u)\, f(t)dt > (1-p)\int_0^1 m_2(-g(t)u)\, g(t)dt, \;\; u = \min\left(\frac{h_1^+}{\max_{s\in[0,1]} f(s)}, -\frac{h_2^-}{\max_{s\in[0,1]} g(s)}\right).$$

Сформулируем вспомогательную лемму.

Лемма. *Пусть случайные величины X_i и Y_j независимы и удовлетворяют условиям (A), (B), последовательности $\{a_{i,n_1}\}$ и $\{b_{j,n_2}\}$ заданы соотношением (2). Тогда при достаточно больших n_1, n_2 экстремум функции*

$$F(x) = -(h_1 + h_2)x + n_1 \int_0^1 \ln R_1(f(t)h_1)dt + n_2 \int_0^1 \ln R_2(g(t)h_2)dt$$

по таким x, что

$$\int_0^1 m_1\left(\frac{f(t)h_1^-}{\max_{s\in[0,1]} f(s)}\right) f(t)dt \leqslant \frac{x}{n_1} \leqslant \int_0^1 m_1\left(\frac{f(t)h_1^+}{\max_{s\in[0,1]} f(s)}\right) f(t)dt,$$

$$\int_0^1 m_2\left(\frac{g(t)h_2^-}{\max_{s\in[0,1]} g(s)}\right) g(t)dt \leqslant \frac{x}{n_2} \leqslant \int_0^1 m_2\left(\frac{g(t)h_2^+}{\max_{s\in[0,1]} g(s)}\right) g(t)dt,$$

где $h_i = h_i(x/n_i)$, $i = 1, 2$, — решения соответствующих интегральных уравнений

$$\int_0^1 m_1(f(t)h_1)\, f(t)dt = \frac{x}{n_1}, \quad \int_0^1 m_2(g(t)h_2)\, g(t)dt = \frac{x}{n_2},$$

достигается в такой точке x^*, что

$$n_1 \int_0^1 m_1(f(t)h^*)\, f(t)dt = n_2 \int_0^1 m_2(-g(t)h^*)\, g(t)dt = x^*. \tag{3}$$

При этом при $n_1, n_2 \to +\infty$, $n_1/(n_1+n_2) \to p \in (0,1)$ и выполнении условий (C), (D) величины $h^* = h^*(n_1,n_2)$ ограничены сверху величиной

$$\min\left(\frac{h_1^+}{\max_{s\in[0,1]} f(s)}, -\frac{h_2^-}{\max_{s\in[0,1]} g(s)}\right)$$

и при достаточно больших n_1, n_2 последовательность $\{h^*(n_1,n_2)\}$ отделена от нуля.

Доказательство. Рассмотрим производную функции $F(x)$:

$$F'(x) = -\left(\frac{dh_1}{dx}+\frac{dh_2}{dx}\right)x - (h_1+h_2) + n_1\int_0^1 \frac{R_1'(f(t)h_1)}{R_1(f(t)h_1)} f(t)\frac{dh_1}{dx}dt + n_2\int_0^1 \frac{R_2'(g(t)h_2)}{R_1(g(t)h_2)} g(t)\frac{dh_2}{dx}dt =$$
$$= -\left(\frac{dh_1}{dx}+\frac{dh_2}{dx}\right)x - (h_1+h_2) + n_1\frac{x}{n_1}\frac{dh_1}{dx} + n_2\frac{x}{n_2}\frac{dh_2}{dx} = -(h_1+h_2),$$

где дифференцирование интеграла обеспечивается теоремой Лебега о мажорируемой сходимости.

Приравнивая производную функции F к нулю, получаем критическую точку $h^* \equiv h_1 = -h_2$,

$$F(x^*) = n_1\int_0^1 \ln R_1(f(t)h^*)dt + n_2\int_0^1 \ln R_2(-g(t)h^*)dt,$$

где h^* и x^* определяются соотношением (3) и величина h^* ограничена:

$$\max\left(\frac{h_1^-}{\max_{s\in[0,1]} f(s)}, -\frac{h_2^+}{\max_{s\in[0,1]} g(s)}\right) \leqslant h^* \leqslant \min\left(\frac{h_1^+}{\max_{s\in[0,1]} f(s)}, -\frac{h_2^-}{\max_{s\in[0,1]} g(s)}\right).$$

Заметим, что h^* и x^* существуют в силу условия (D).

Покажем, что при достаточно больших n_1, n_2 последовательность $\{h^*(n_1,n_2)\}$ отделена от нуля. В силу выпуклости функций $\ln R_1(h)$ и $\ln R_2(h)$ функции $m_1(h)$ и $m_2(h)$ возрастают по h. Следовательно, первая из функций

$$\int_0^1 m_1(f(t)h)\, f(t)dt, \quad \int_0^1 m_2(-g(t)h)\, g(t)dt \tag{4}$$

возрастает по h, а вторая убывает.

Введем следующие обозначения:

$$\mu_1 := \mathbf{E}X_1\int_0^1 f(t)dt, \quad \mu_2 := \mathbf{E}Y_1\int_0^1 g(t)dt.$$

При достаточно больших n_1 и n_2 $x^*/(n_1+n_2)$ принадлежит интервалу между $p\mu_1$ и $(1-p)\mu_2$, поскольку

$$\frac{x^*}{n_1+n_2} = \frac{n_1}{n_1+n_2}\int_0^1 m_1(f(t)h^*)\, f(t)dt = \frac{n_2}{n_1+n_2}\int_0^1 m_2(-g(t)h^*)\, g(t)dt, \ \frac{n_1}{n_1+n_2} \to p, \ n_1, n_2 \to +\infty,$$

и в силу возрастания первой и убывания второй из функций в (4) верны неравенства

$$\int_0^1 m_1(f(t)h^*)\, f(t)dt > \mu_1, \quad \int_0^1 m_2(-g(t)h^*)\, g(t)dt < \mu_2.$$

Заметим, что

$$\frac{x^*}{n_1+n_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{n_1+n_2}\int_0^1 m_1(f(t)h^*)\, f(t)dt + \frac{n_2}{n_1+n_2}\int_0^1 m_2(-g(t)h^*)\, g(t)dt\right).$$

Допустим, что $x^*/(n_1+n_2) < (p\mu_1+(1-p)\mu_2)/2$ при достаточно больших n_1 и n_2. Тогда $h^* > \widehat{h}$, где $\widehat{h}$ определяется соотношением

$$(1-p)\int_0^1 m_2\left(-g(t)\widehat{h}\right) g(t)dt = \frac{p\mu_1+(1-p)\mu_2}{2}.$$

Если $\widehat{h} = 0$, то справедливо равенство $p\,\mu_1 = (1-p)\,\mu_2$, что противоречит условию (C). Таким образом, величина $\widehat{h}$ положительна.

Аналогично если для любого положительного ε при достаточно больших n_1 и n_2 имеем $x^*/(n_1+n_2) > (1-\varepsilon)(p\mu_1+(1-p)\mu_2)/2$, то $h^* > \widetilde{h}$, где величина $\widetilde{h}$ положительна и определяется соотношением

$$p\int_0^1 m_1\left(f(t)\widetilde{h}\right) f(t)dt = (1-\varepsilon)\frac{p\mu_1+(1-p)\mu_2}{2}.$$

Таким образом, последовательность $\{h^*(n_1,n_2)\}$ отделена от нуля.

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть случайные последовательности $\{X_1,\ldots,X_{n_1}\}$ и $\{Y_1,\ldots,Y_{n_2}\}$ независимы и удовлетворяют условиям (A), (B), числовые последовательности $\{a_{i,n_1}\}$ и $\{b_{j,n_2}\}$ заданы соотношением* (2). *Тогда при стремлении n_1, n_2 к бесконечности, $n_1/(n_1+n_2)\to p\in(0,1)$ и выполнении условий (C), (D) справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(S_{n_1,1} > S_{n_2,2}) = \frac{C(h^*)\,(1+o(1))}{\sqrt{2\pi(n_1+n_2)}B(h^*)h^*}\exp\left(n_1\int_0^1 \ln R_1(f(t)h^*)dt + n_2\int_0^1 \ln R_2(-g(t)h^*)dt\right),$$

где h^* введена в лемме,

$$C(h) = \sqrt{\frac{R_1(f(1)h)}{R_1(f(0)h)}}\sqrt{\frac{R_2(-g(1)h)}{R_2(-g(0)h)}},$$

$$B^2(h) = p\int_0^1 f^2(t)m_1'(f(t)h)dt + (1-p)\int_0^1 g^2(t)m_2'(-g(t)h)dt.$$

Доказательство. Заметим, что для любого положительного δ

$$\mathbf{P}(S_{n_1,1} > S_{n_2,2}) = \mathbf{P}\left(x^* - n_1^{1/2+\delta} \leqslant S_{n_2,2} < S_{n_1,1} \leqslant x^* + n_1^{1/2+\delta}\right) +$$
$$+\mathbf{P}\left(S_{n_1,1} \geqslant x^* + n_1^{1/2+\delta}, S_{n_1,1} > S_{n_2,2}\right) +$$
$$+\mathbf{P}\left(S_{n_2,2} \leqslant x^* - n_1^{1/2+\delta}, S_{n_1,1} \leqslant x^* + n_1^{1/2+\delta}, S_{n_1,1} > S_{n_2,2}\right), \tag{5}$$

где точка x^* та же, что и в лемме. Рассмотрим каждое из слагаемых суммы (5) отдельно.

1. Введем обозначение

$$P := \mathbf{P}\left(x^* - n_1^{1/2+\delta} \leqslant S_{n_2,2} < S_{n_1,1} \leqslant x^* + n_1^{1/2+\delta}\right).$$

Заметим, что для любого положительного Δ вероятность P оценивается снизу величиной

$$I_1 := \sum_{k=-M}^{M}\sum_{l=-M}^{k-1} \mathbf{P}(S_{n_1,1} \in [x^*+k\Delta, x^*+(k+1)\Delta))\mathbf{P}(S_{n_2,2} \in [x^*+l\Delta, x^*+(l+1)\Delta)), \tag{6}$$

а сверху — величиной

$$I_2 := \sum_{k=-M-1}^{M+1}\sum_{l=-M-1}^{k} \mathbf{P}(S_{n_1,1} \in [x^*+k\Delta, x^*+(k+1)\Delta))\mathbf{P}(S_{n_2,2} \in [x^*+l\Delta, x^*+(l+1)\Delta)),$$

где $M := [n_1^{1/2+\delta}/\Delta]$. Рассмотрим более детально выражение (6).

Пусть

$$h_1 = h_1\left(\frac{x}{n_1}\right):\quad \int_0^1 m_1\left(f(t)h_1\right)f(t)dt = \frac{x}{n_1},\quad \sigma_1^2(h_1) = \int_0^1 f^2(t)m_1'(f(t)h_1)dt,$$
$$\frac{h_1^-}{\max_{s\in[0,1]} f(s)} \leqslant h_1 \leqslant \frac{h_1^+}{\max_{s\in[0,1]} f(s)};$$
$$h_2 = h_2\left(\frac{y}{n_2}\right):\quad \int_0^1 m_2\left(g(t)h_2\right)g(t)dt = \frac{y}{n_2},\quad \sigma_2^2(h_2) = \int_0^1 g^2(t)m_2'(g(t)h_2)dt,$$
$$\frac{h_2^-}{\max_{s\in[0,1]} g(s)} \leqslant h_2 \leqslant \frac{h_2^+}{\max_{s\in[0,1]} g(s)}.$$

Пусть также $\delta < 1/6$. Поскольку $x, y \in \left(x^* - n_1^{1/2+\delta}, x^* + n_1^{1/2+\delta}\right)$, то $m_1(h_1) - m_1(h^*) \to 0$ при $n_1 \to +\infty$, $m_2(h_2) - m_2(-h^*) \to 0$ при $n_2 \to +\infty$. Тогда $h_1 - h^* \to 0$ равномерно по рассматриваемым x при $n_1 \to +\infty$, $h_2 + h^* \to 0$ равномерно по рассматриваемым y при $n_2 \to +\infty$. Следовательно, в силу теоремы 1 для всех положительных Δ_{n_1}, стремящихся к нулю достаточно медленно, верно следующее соотношение:

$$I_1 = (1+o(1))\frac{1}{\sqrt{2\pi n_1}\sigma_1(h^*)}\frac{1}{\sqrt{2\pi n_2}\sigma_2(-h^*)}\sqrt{\frac{R_1(f(1)h^*)}{R_1(f(0)h^*)}}\sqrt{\frac{R_2(-g(1)h^*)}{R_2(-g(0)h^*)}}\times$$
$$\times\sum_{k=-M}^{M}\sum_{l=-M}^{k-1}\Delta_{n_1}^2\exp\left(-n_1\Lambda_1\left(\frac{x^*+k\Delta_{n_1}}{n_1}\right)-n_2\Lambda_2\left(\frac{x^*+l\Delta_{n_1}}{n_2}\right)\right),\quad n_1,n_2\to+\infty,$$

где $M := [n_1^{1/2+\delta}/\Delta_{n_1}]$, $\Lambda_1(\theta) = h_1(\theta)\theta - \int_0^1 \ln R_1(f(t)h_1(\theta))dt$, $\Lambda_2(\theta) = h_2(\theta)\theta - \int_0^1 \ln R_2(g(t)h_2(\theta))dt$.

Разложим функцию $\Lambda_i(x/n_i)$ по формуле Тейлора в точке x^*/n_i до второго порядка:

$$\Lambda_i\left(\frac{x}{n_i}\right) = \Lambda_i\left(\frac{x^*}{n_i}\right) + \Lambda_i'\left(\frac{x^*}{n_i}\right)\frac{x-x^*}{n_i} + \Lambda_i''\left(\frac{x^*}{n_i}\right)\frac{(x-x^*)^2}{2n_i^2} + O\left(n_i^{-3/2+3\delta}\right),\quad n_i\to+\infty,\quad i=1,2.$$

В силу соотношений

$$\Lambda_1'\left(\frac{x}{n_1}\right) = h_1 + h_1'\frac{x}{n_1} - h_1'\int_0^1 m_1\left(f(t)h_1\right)f(t)dt = h_1,$$
$$\Lambda_1''\left(\frac{x}{n_1}\right) = h_1' = \frac{1}{\sigma_1^2(h_1)}$$

и аналогичных соотношений для функции Λ_2 справедливо следующее представление:

$$\exp\left(-n_1\Lambda_1\left(\frac{x}{n_1}\right)-n_2\Lambda_2\left(\frac{y}{n_2}\right)\right) = \exp\left(n_1\int_0^1\ln R_1(f(t)h^*)dt + n_2\int_0^1\ln R_2(-g(t)h^*)dt\right)\times$$
$$\times\exp\left(-h^*(y-x)-\frac{(x-x^*)^2}{2n_1\sigma_1^2(h^*)}-\frac{(y-x^*)^2}{2n_2\sigma_2^2(-h^*)}+O\left(n_1^{-1/2+3\delta}\right)\right),\quad n_1,n_2\to+\infty.$$

Следовательно, выполнено равенство

$$\sum_{k=-M}^{M}\sum_{l=-M}^{k-1}\Delta_{n_1}^2\exp\left(-n_1\Lambda_1\left(\frac{x^*+k\Delta_{n_1}}{n_1}\right)-n_2\Lambda_2\left(\frac{x^*+l\Delta_{n_1}}{n_2}\right)\right) =$$
$$= (1+o(1))\exp\left(n_1\int_0^1\ln R_1(f(t)h^*)dt + n_2\int_0^1\ln R_2(-g(t)h^*)dt\right)\times$$
$$\times\sum_{k=-M}^{M}\sum_{l=-M}^{k-1}\Delta_{n_1}^2\exp\left(-h^*(k-l)\Delta_{n_1}-\frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2n_1\sigma_1^2(h^*)}-\frac{l^2\Delta_{n_1}^2}{2n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right),\quad n_1,n_2\to+\infty.$$

Пусть $N := [n_1^{1/3}/\Delta_{n_1}]$. Заметим, что

$$\sum_{k=-M}^{M}\sum_{l=-M}^{k-1}\Delta_{n_1}^2\exp\left(-h^*(k-l)\Delta_{n_1}-\frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2n_1\sigma_1^2(h^*)}-\frac{l^2\Delta_{n_1}^2}{2n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right) = o(\sqrt{n_1})+$$
$$+\sum_{k=-M}^{M}\sum_{l=\max(-M,k-N)}^{k-1}\Delta_{n_1}^2\exp\left(-h^*(k-l)\Delta_{n_1}-\frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2n_1\sigma_1^2(h^*)}-\frac{l^2\Delta_{n_1}^2}{2n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right),\quad n_1,n_2\to+\infty, \tag{7}$$

поскольку в силу положительности и отделимости h^* от нуля выполнено следующее соотношение:

$$\sum_{k=-M}^{M}\sum_{l=-M}^{\max(-M,k-N)-1}\Delta_{n_1}^2\exp\left(-h^*(k-l)\Delta_{n_1}-\frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2n_1\sigma_1^2(h^*)}-\frac{l^2\Delta_{n_1}^2}{2n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right)\leqslant$$
$$\leqslant n_1^{1+2\delta}\exp\left(-h^*n_1^{1/3}\right) = o\left(\sqrt{n_1}\right),\quad n_1,n_2\to+\infty.$$

При этом при $|k| \leqslant M$ и $\max(-M, k-N) \leqslant l \leqslant k-1$ выполнены следующие неравенства:
если $k<0$, то
$$\frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2n_1} \leqslant \frac{l^2\Delta_{n_1}^2}{2n_1} \leqslant \frac{(k-N)^2\Delta_{n_1}^2}{2n_1} \leqslant \frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2n_1} + \frac{3}{2}n_1^{-1/6+\delta};$$
если $k>N$, то
$$\frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2n_1} - n_1^{-1/6+\delta} \leqslant \frac{(k-N)^2\Delta_{n_1}^2}{2n_1} \leqslant \frac{l^2\Delta_{n_1}^2}{2n_1} \leqslant \frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2n_1};$$
если $0 \leqslant k \leqslant N$, то
$$0 \leqslant \frac{l^2\Delta_{n_1}^2}{2n_1} \leqslant \max\left(\frac{(k-N)^2\Delta_{n_1}^2}{2n_1}, \frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2n_1}\right) \leqslant \frac{n_1^{-1/3}}{2}.$$
Аналогичные неравенства можно написать для $l^2\Delta_{n_1}^2/(2n_2)$ и $k^2\Delta_{n_1}^2/(2n_2)$.

Разобьем сумму (7) на две части, соответствующие следующим диапазонам изменения k, l:
$$\{(k,l) : -M+N \leqslant k \leqslant M, k-N \leqslant l \leqslant k-1\} \text{ и } \{(k,l) : -M \leqslant k \leqslant -M+N, -M \leqslant l \leqslant k-1\}. \quad (8)$$
Оценим часть суммы (7) по первому из множеств (8) при $n_1, n_2 \to +\infty$:
$$\sum_{k=-M+N}^{M} \sum_{l=k-N}^{k-1} \Delta_{n_1}^2 \exp\left(-h^*(k-l)\Delta_{n_1} - \frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2n_1\sigma_1^2(h^*)} - \frac{l^2\Delta_{n_1}^2}{2n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right) =$$
$$= (1+o(1)) \sum_{k=-M+N}^{M} \Delta_{n_1}^2 \exp\left(-\frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2}\left(\frac{1}{n_1\sigma_1^2(h^*)} + \frac{1}{n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right)\right)\frac{e^{-h^*N\Delta_{n_1}}-1}{1-e^{h^*\Delta_{n_1}}} =$$
$$= (1+o(1)) \sum_{k=-M+N}^{M} \frac{\Delta_{n_1}}{h^*} \exp\left(-\frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2}\left(\frac{1}{n_1\sigma_1^2(h^*)} + \frac{1}{n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right)\right). \quad (9)$$

Заметим, что
$$\sum_{k=1}^{M} \frac{\Delta_{n_1}}{h^*} \exp\left(-\frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2}\left(\frac{1}{n_1\sigma_1^2(h^*)} + \frac{1}{n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right)\right) <$$
$$< \frac{1}{h^*}\int_0^{M\Delta_{n_1}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{n_1\sigma_1^2(h^*)} + \frac{1}{n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right)\right)dt <$$
$$< \sum_{k=0}^{M} \frac{\Delta_{n_1}}{h^*} \exp\left(-\frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2}\left(\frac{1}{n_1\sigma_1^2(h^*)} + \frac{1}{n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right)\right).$$
Следовательно, в силу четности подынтегральной функции и представления
$$\sum_{k=-M+N}^{M} \frac{\Delta_{n_1}}{h^*} \exp\left(-\frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2}\left(\frac{1}{n_1\sigma_1^2(h^*)} + \frac{1}{n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right)\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{M} \frac{\Delta_{n_1}}{h^*} \exp\left(-\frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2}\left(\frac{1}{n_1\sigma_1^2(h^*)} + \frac{1}{n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right)\right) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{M-N} \frac{\Delta_{n_1}}{h^*} \exp\left(-\frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2}\left(\frac{1}{n_1\sigma_1^2(h^*)} + \frac{1}{n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right)\right) - \frac{\Delta_{n_1}}{h^*}$$
верны неравенства
$$\frac{1}{h^*}\int_{(-M+N)\Delta_{n_1}}^{M\Delta_{n_1}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{n_1\sigma_1^2(h^*)} + \frac{1}{n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right)\right)dt - \frac{\Delta_{n_1}}{h^*} <$$

$$< \sum_{k=-M+N}^{M} \frac{\Delta_{n_1}}{h^*} \exp\left(-\frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2}\left(\frac{1}{n_1\sigma_1^2(h^*)}+\frac{1}{n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right)\right) <$$

$$< \frac{1}{h^*}\int_{(-M+N)\Delta_{n_1}}^{M\Delta_{n_1}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{n_1\sigma_1^2(h^*)}+\frac{1}{n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right)\right)dt + \frac{\Delta_{n_1}}{h^*}.$$

Заметим, что при $n_1, n_2 \to +\infty$

$$\frac{1}{h^*}\int_{(-M+N)\Delta_{n_1}}^{M\Delta_{n_1}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{n_1\sigma_1^2(h^*)}+\frac{1}{n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right)\right)dt = \frac{1+o(1)}{h^*\sqrt{\frac{1}{n_1\sigma_1^2(h^*)}+\frac{1}{n_2\sigma_2^2(-h^*)}}}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}dt.$$

Таким образом, выражение, рассматриваемое в (9), допускает представление

$$\sum_{k=-M+N}^{M} \frac{\Delta_{n_1}}{h^*} \exp\left(-\frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2}\left(\frac{1}{n_1\sigma_1^2(h^*)}+\frac{1}{n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right)\right) = \frac{1+o(1)}{h^*}\sqrt{\frac{2\pi}{\frac{1}{n_1\sigma_1^2(h^*)}+\frac{1}{n_2\sigma_2^2(-h^*)}}},\ n_1, n_2 \to +\infty.$$

Оценим часть суммы (7) по второму из диапазонов (8):

$$\sum_{k=-M}^{-M+N}\sum_{l=-M}^{k-1} \Delta_{n_1}^2 \exp\left(-h^*(k-l)\Delta_{n_1} - \frac{k^2\Delta_{n_1}^2}{2}\left(\frac{1}{n_1\sigma_1^2(h^*)}+\frac{1}{n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right)\right) <$$

$$< 2\sum_{k=-M}^{-M+N} \Delta_{n_1}^2 \exp\left(-\frac{k^2}{2}\left(\frac{1}{n_1\sigma_1^2(h^*)}+\frac{1}{n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right)\right)\frac{1-e^{-h^*(k+M)\Delta_{n_1}}}{h^*\Delta_{n_1}} <$$

$$< 3\sum_{k=-M}^{-M+N} \frac{\Delta_{n_1}}{h^*} \exp\left(-\frac{k^2}{2}\left(\frac{1}{n_1\sigma_1^2(h^*)}+\frac{1}{n_2\sigma_2^2(-h^*)}\right)\right) < 4\frac{n_1^{1/3}}{h^*}, \quad n_1, n_2 \to +\infty,$$

где правая часть полученного выражения есть $o\left(\sqrt{n_1}\right)$ при $n_1, n_2 \to +\infty$.

Таким образом, для I_1 верно представление

$$I_1 = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi(n_1\sigma_1^2(h^*)+n_2\sigma_2^2(-h^*))}h^*}\sqrt{\frac{R_1(f(1)h^*)}{R_1(f(0)h^*)}}\sqrt{\frac{R_2(-g(1)h^*)}{R_2(-g(0)h^*)}}\times$$

$$\times \exp\left(n_1\int_0^1 \ln R_1(f(t)h^*)dt + n_2\int_0^1 \ln R_2(-g(t)h^*)dt\right), \quad n_1, n_2 \to +\infty.$$

Аналогичным образом оценивается I_2, следовательно, $P = (1+o(1))I_1$ при $n_1, n_2 \to +\infty$.

2. Введем множество

$$B = \left\{x \geqslant x^* + n_1^{1/2+\delta}\right\} \cap \{x > y\}.$$

Заметим, что при любых h_1, h_2, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{h_1^-}{\max_{s\in[0,1]} f(s)} \leqslant h_1 \leqslant \frac{h_1^+}{\max_{s\in[0,1]} f(s)}, \quad \frac{h_2^-}{\max_{s\in[0,1]} g(s)} \leqslant h_2 \leqslant \frac{h_2^+}{\max_{s\in[0,1]} g(s)},$$

выполнено соотношение

$$\mathbf{P}(S_{n_1,1} \geqslant x^* + n_1^{1/2+\delta}, S_{n_1,1} > S_{n_2,2}) = \iint_B \mathbf{P}(S_{n_1,1}\in dx)\mathbf{P}(S_{n_2,2}\in dy) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\inf_B e^{h_1x+h_2y}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{h_1x+h_2y}\mathbf{P}(S_{n_1,1}\in dx)\mathbf{P}(S_{n_2,2}\in dy) = \frac{1}{\inf_B e^{h_1x+h_2y}}\mathbf{E}e^{h_1S_{n_1,1}+h_2S_{n_2,2}} =$$

$$= \frac{1+o(1)}{\inf_B e^{h_1x+h_2y}}\exp\left(n_1\int_0^1 \ln R_1(f(t)h_1)dt + n_2\int_0^1 \ln R_2(g(t)h_2)dt\right), \quad n_1, n_2 \to +\infty.$$

Покажем, что при некоторых h_1, h_2 и $n_1, n_2 \to +\infty$

$$I := \frac{1}{\inf_B e^{h_1 x + h_2 y}} \exp\left(n_1 \int_0^1 \ln R_1(f(t)h_1)dt + n_2 \int_0^1 \ln R_2(g(t)h_2)dt\right) \times$$
$$\times \exp\left(-n_1 \int_0^1 \ln R_1(f(t)h^*)dt - n_2 \int_0^1 \ln R_2(-g(t)h^*)dt\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n_1}}\right).$$

В силу выполнения условий (C), (D) при достаточно большом n_1 возьмем $h_2 = -h^*$, $h_1 = h^* + n_1^{-\alpha}$, где $\alpha > 0$. Заметим, что при $x, y \in B$ выполнены неравенства

$$e^{h_1 x + h_2 y} = e^{h^*(x-y) + n_1^{-\alpha} x} \geqslant e^{n_1^{-\alpha} x} \geqslant e^{n_1^{-\alpha}\left(x^* + n_1^{1/2+\delta}\right)}.$$

Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа найдется такой параметр $\widetilde{h} \in [h^*, h_1]$, что для любого $t \in [0,1]$ верно равенство

$$\ln R_1(f(t)h_1) = \ln R_1(f(t)h^*) + f(t) m_1\left(f(t)\widetilde{h}\right)(h_1 - h^*).$$

Полагая $\widetilde{x} := n_1 \int_0^1 f(t) m_1\left(f(t)\widetilde{h}\right) dt$, получаем соотношение

$$I \leqslant \exp\left(-n_1^{-\alpha}\left(x^* + n_1^{1/2+\delta}\right) + n_1 \int_0^1 \ln R_1(f(t)h_1)dt - n_1 \int_0^1 \ln R_1(f(t)h^*)dt\right) =$$
$$= \exp\left(-n_1^{-\alpha}\left(x^* + n_1^{1/2+\delta}\right) + n_1^{1-\alpha} \int_0^1 f(t) m_1\left(f(t)\widetilde{h}\right) dt\right) = \exp\left(n_1^{-\alpha}\left(\widetilde{x} - x^* - n_1^{1/2+\delta}\right)\right).$$

В силу непрерывности функции m_1 и равномерной ограниченности функции f верно

$$0 < \widetilde{x} - x^* = n_1\left(\int_0^1 f(t) m_1\left(f(t)\widetilde{h}\right) dt - \int_0^1 f(t) m_1\left(f(t)h^*\right) dt\right) \leqslant n_1 c\left(\widetilde{h} - h^*\right) \leqslant n_1^{1-\alpha} c,$$

где c — некоторая положительная константа.

Таким образом, при $\alpha = 1/2$ и некотором $0 < \delta < 1/6$

$$I \leqslant e^c e^{-n_1^\delta} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n_1}}\right), \quad n_1, n_2 \to +\infty.$$

3. Аналогичным образом положим

$$E = \left\{y \leqslant x^* - n_1^{1/2+\delta}\right\} \cap \{x > y\}.$$

Заметим, что при любых

$$\frac{h_1^-}{\max_{s\in[0,1]} f(s)} \leqslant h_1 \leqslant \frac{h_1^+}{\max_{s\in[0,1]} f(s)}, \quad \frac{h_2^-}{\max_{s\in[0,1]} g(s)} \leqslant h_2 \leqslant \frac{h_2^+}{\max_{s\in[0,1]} g(s)}$$

справедливы неравенства

$$\mathbf{P}(S_{n_2,2} \leqslant x^* - n_1^{1/2+\delta}, S_{n_1,1} \leqslant x^* + n_1^{1/2+\delta}, S_{n_1,1} > S_{n_2,2}) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}(S_{n_2,2} \leqslant x^* - n_1^{1/2+\delta}, S_{n_1,1} > S_{n_2,2}) \leqslant \frac{1}{\inf_E e^{h_1 x + h_2 y}} \mathbf{E} e^{h_1 S_{n_1,1} + h_2 S_{n_2,2}}.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям можно показать, что при $h_1 = h^*$, $h_2 = -h^* - n_1^{-1/2}$ и $n_1, n_2 \to +\infty$

$$\frac{1}{\inf_E e^{h_1 x + h_2 y}} \exp\left(n_1 \int_0^1 \ln R_1(f(t)h_1)dt + n_2 \int_0^1 \ln R_2(g(t)h_2)dt\right) \times$$
$$\times \exp\left(-n_1 \int_0^1 \ln R_1(f(t)h^*)dt - n_2 \int_0^1 \ln R_2(-g(t)h^*)dt\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n_1}}\right).$$

Теорема 2 доказана.

4. Модель сражения гладиаторов.

Замечание 1. Пусть X — случайная величина со стандартным экспоненциальным распределением. Тогда сопряженная величина $X^{(h)}$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $1-h$, где $h<1$,

$$R(h) = m(h) = \frac{1}{1-h}.$$

Рассмотрим модель сражения двух команд гладиаторов, описанную К. Каминским, Е. Люксом и П. Нельсоном (см. [4]). Пусть есть две большие команды по n_1 и n_2 гладиаторов. Каждый гладиатор обладает некоторым положительным вещественным параметром, который мы будем называть силой. Будем считать, что силы гладиаторов первой и второй команд задаются соотношениями

$$a_{i,n_1} = f(i/n_1), \quad i \leqslant n_1;$$
$$b_{j,n_2} = g(j/n_2), \quad j \leqslant n_2,$$

соответственно, где f и g — некоторые положительные дважды гладкие функции на отрезке $[0,1]$. Сражение команд состоит из отдельных боев, для каждого из которых команды выбирают по одному гладиатору и выставляют сражаться друг с другом. При этом считается, что в каждом бою вероятность победы гладиатора пропорциональна его силе. Победивший гладиатор возвращается в состав команды, сохраняя силу неизменной, а проигравший выбывает из состава команды. Сражение продолжается, пока в обеих командах есть хотя бы один гладиатор.

По теореме Каминского (см. [4]) вероятность победы первой команды имеет вид

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n_1} a_{i,n_1} X_i > \sum_{j=1}^{n_2} b_{j,n_2} Y_j\right),$$

где X_i, $i=1,\ldots,n_1$, Y_j, $j=1,\ldots,n_2$, — независимые случайные величины со стандартным экспоненциальным распределением. В силу теоремы 2 и замечания 1 при стремлении n_1, n_2 к бесконечности, $n_1/(n_1+n_2) \to p \in (0,1)$ и выполнении условий (C), (D) асимптотика вероятности победы первой команды имеет вид

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n_1} a_{i,n_1} X_i > \sum_{j=1}^{n_2} b_{j,n_2} Y_j\right) = \frac{C(\widehat{h})\,(1+o(1))}{\sqrt{2\pi(n_1+n_2)}B(\widehat{h})\widehat{h}} \times$$
$$\times \exp\left(-n_1 \int_0^1 \ln(1-f(t)\widehat{h})dt - n_2 \int_0^1 \ln(1+g(t)\widehat{h})dt\right),$$

где

$$C(h) = \sqrt{\frac{1-f(0)h}{1-f(1)h}}\sqrt{\frac{1+g(0)h}{1+g(1)h}},$$
$$B^2(h) = p\int_0^1 \left(\frac{f(t)}{1-f(t)h}\right)^2 dt + (1-p)\int_0^1 \left(\frac{g(t)}{1+g(t)h}\right)^2 dt,$$

$\widehat{h}$ положительно, отделено от нуля, меньше $1/\max_{s\in[0,1]} f(s)$ и определяется соотношением

$$n_1 \int_0^1 \frac{f(t)}{1-f(t)\widehat{h}}dt = n_2 \int_0^1 \frac{g(t)}{1+g(t)\widehat{h}}dt.$$

Автор приносит благодарность А. В. Шкляеву за постоянное внимание к работе, а также рецензенту за кропотливую работу, позволившую существенно улучшить текст настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровков А.А.* Интегро-локальные и локальные теоремы о нормальных и больших уклонениях сумм разнораспределенных случайных величин в схеме серий // Теор. вероятн. и ее примен. 2009. **54**, № 4. 625–644.

2. *Book S.* Large deviation probabilities for weighted sums // Ann. Math. Statist. 1972. **43**, N 4. 1221–1234.
3. *Соболев И.В., Шкляев А.В.* Большие уклонения для взвешенных сумм независимых одинаково распределенных величин с функционально заданными весами // Фунд. и прикл. матем. 2020. **23**, № 1. 191–206.
4. *Kaminsky K., Luks E., Nelson P.* Strategy, nontransitive dominance and the exponential distribution // Austral. J. Statist. 1984. **26**, N 2. 111–118.

Поступила в редакцию
10.05.2023

УДК 517

АЛГОРИТМ ПОИСКА ТОЧНОГО ЗНАЧЕНИЯ АРГУМЕНТА МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ В ОЦЕНКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ЧАСТИЧНОЙ СУММОЙ ЕЕ РЯДА ФУРЬЕ

Т. Ю. Семенова[1]

Приводится способ нахождения точного значения аргумента модуля непрерывности в оценках скорости сходимости ряда Фурье.

Ключевые слова: ряд Фурье, скорость сходимости, модуль непрерывности.

A method is given for finding the exact value of the argument of the modulus of continuity in estimates of the rate of convergence of Fourier series.

Key words: Fourier series, rate of convergence, modulus of continuity.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-4-2

1. Введение. Обозначим через $C_{2\pi}$ пространство непрерывных на $\mathbb{R}$ действительнозначных 2π-периодических функций с нормой $\|f\| = \max\limits_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi} |f(x)|$, а через $\omega(f,\gamma) = \max\limits_{\substack{x_1,\,x_2\in\mathbb{R},\\ |x_1-x_2|\leqslant\gamma}} |f(x_1)-f(x_2)|$ модуль непрерывности функции $f \in C_{2\pi}$. Пусть $S_n(f) = S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big)$, $n \in \mathbb{R}$, — частичные суммы ряда Фурье функции f, $D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos(kt)$ — ядра Дирихле, а $L_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt$ — константы Лебега.

Многие авторы (см., например, [1–4]) выводили оценки следующего вида:

$$\|f - S_n(f)\| \leqslant K_n\,\omega(f,\gamma), \quad \forall f \in C_{2\pi}. \tag{1}$$

Обозначим

$$K_n^*(\gamma) = \sup_{\substack{f\in C_{2\pi},\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{\|f - S_n(f)\|}{\omega(f,\gamma)}.$$

Известно [5, 6], что $K_n^*(\gamma) \geqslant (L_n+1)/2$ для любого $\gamma > 0$. Возникает задача нахождения оптимального значения аргумента модуля непрерывности в неравенстве (1) с наилучшей константой $K_n = (L_n+1)/2$, а именно величины

$$\gamma_n^* = \inf\left\{\gamma > 0,\ K_n^*(\gamma) = \frac{L_n+1}{2}\right\}.$$

---

[1] *Семенова Татьяна Юрьевна* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ; Моск. центр фунд. и прикл. матем., e-mail: station@list.ru.

Semenova Tatiana Yuryevna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.