8. *Меркулов Д.И., Пелевина Д.А., Турков В.А., Налетова В.А.* Движение в поле витка с током тела из анизотропного намагничивающегося эластомера с учетом взаимодействия с наклонной поверхностью // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. № 1. 39–44.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
10. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Пер. с англ. М.: Мир, 1976.
11. *Петров А.Г.* Аналитическая гидродинамика. М.: Физматлит, 2009.

Поступила в редакцию
27.12.2023

УДК 517.958:531.12; 534.11

ОБ ОДНОМ ОБРАТНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИЯХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ

В. Л. Литвинов[1], К. В. Литвинова[2]

Рассмотрен аналитический метод решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами. Путем замены переменных, останавливающей границы и оставляющей уравнение инвариантным, исходная краевая задача сведена к системе функционально-разностных уравнений, которая может быть решена с помощью прямого и обратного методов. Описан обратный метод, позволяющий аппроксимировать достаточно разнообразные законы движения границ законами, полученными из решения обратной задачи. Найдены новые частные решения для достаточно широкого круга законов движения границ. Рассмотрен прямой асимптотический метод приближенного решения функционального уравнения. Произведена оценка погрешностей приближенного метода в зависимости от скорости движения границы.

Ключевые слова: волновое уравнение, краевые задачи, колебания систем с движущимися границами, замена переменных, законы движения границ, функциональные уравнения.

An analytical method for solving the wave equation describing the oscillations of systems with moving boundaries is considered. By changing the variables that stop the boundaries and leave the equation invariant, the original boundary value problem is reduced to a system of functional-difference equations, which can be solved using direct and inverse methods. An inverse method is described that makes it possible to approximate quite diverse laws of boundary motion by laws obtained from solving the inverse problem. New particular solutions are obtained for a fairly wide range of laws of boundary motion. A direct asymptotic method for the approximate solution of a functional equation is considered. An estimate of the errors of the approximate method was made depending on the speed of the boundary movement.

Key words: wave equation, boundary value problems, oscillations of systems with moving boundaries, change of variables, laws of motion of boundaries, functional equations.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-3-8

Использование одномерных систем, границы которых движутся, широко распространено в технике: канаты грузоподъемных установок [1–9], гибкие звенья передач [1, 10–14], стержни твердого топлива [15], бурильные колонны [3] и т.д. Наличие движущихся границ вызывает значительные затруднения при описании таких систем, поэтому в основном используются приближенные методы решения [1–3, 10, 14–21]. Из аналитических методов наиболее эффективным является метод,

[1] *Литвинов Владислав Львович* — канд. техн. наук, доцент, зав. каф. общетеоретических дисциплин СамГТУ, e-mail: vladlitvinov@rambler.ru.

Litvinov Vladislav Lvovich — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of Department of General-Theoretical Disciplines, Samara State Technical University.

[2] *Литвинова Кристина Владиславовна* — студ. каф. теоретических основ разработки месторождений нефти и газа геол. ф-та МГУ, e-mail: kristinalitvinova900@rambler.ru.

Litvinova Kristina Vladislavovna — Student, Moscow State University, Faculty of Geology, Chair of Theoretical Fundamentals of Oil and Gas Field Development.

предложенный в [11], заключающийся в подборе новых переменных, останавливающих границы и оставляющих волновое уравнение инвариантным. В [22] решение ищется в виде суперпозиции двух волн, бегущих навстречу друг другу. Эффективен также метод, используемый в [23], состоящий в замене геометрической переменной на чисто мнимую переменную, что позволяет свести волновое уравнение к уравнению Лапласа и применить для решения методику теории функций комплексного переменного. В настоящей работе рассмотрен аналитический метод решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами. Путем замены переменных, останавливающей границы и оставляющей уравнение инвариантным, исходная краевая задача сведена к системе функционально-разностных уравнений, которая может быть решена с помощью прямого и обратного методов. Описан обратный метод, позволяющий аппроксимировать достаточно разнообразные законы движения границ законами, установленными из решения обратной задачи. Получены новые частные решения для достаточно широкого круга законов движения границ. Рассмотрен прямой асимптотический метод приближенного решения функционального уравнения. Произведена оценка погрешностей приближенного метода в зависимости от скорости движения границы. В данном подходе удачно сочетается методика, используемая в [11, 22, 24–27].

Рассмотрим свободные колебания в системе с движущимися границами

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0. \tag{1}$$

Граничные условия на закрепленных концах имеют вид

$$u\left(l_1(t), t\right) = 0; \quad u\left(l_2(t), t\right) = 0 \quad \left(l_1(0) \leqslant x \leqslant l_2(0)\right). \tag{2}$$

Здесь $u(x,t)$ — смещение точки объекта с координатой x в момент времени t; a — скорость распространения волн в системе; $l_1(x)$, $l_2(x)$ — законы движения границ.

В работах [11, 22] А. И. Весницким был предложен достаточно общий метод подбора новых переменных для волнового уравнения. Следуя этому методу, произведем замену переменных в следующем виде:

$$\xi = \varphi\left(t + \frac{x}{a}\right) - \psi\left(t - \frac{x}{a}\right), \quad \tau = a^{-1}\left[\varphi\left(t + \frac{x}{a}\right) + \psi\left(t - \frac{x}{a}\right)\right], \tag{3}$$

где φ и ψ — некоторые функции. В результате такой замены исходное уравнение остается инвариантным (волновым), а φ и ψ определяются из условия постоянства ξ на границах. В новых переменных ξ, τ, определяемых соотношением (3), исходная задача (1), (2) сводится к следующей:

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau) - U_{\xi\xi}(\xi,\tau) = 0 \tag{4}$$

при граничных условиях

$$U\left(l_1(\tau), \tau\right) = 0; \quad U_\xi\left(l_2(\tau), \tau\right) = 0 \quad \left(l_1(\tau) \leqslant \xi \leqslant l_2(\tau)\right). \tag{5}$$

Здесь τ, ξ — безразмерное время ($\tau \geqslant 0$) и безразмерная пространственная координата; $U(\xi,\tau) = u(x,t)$; $l_i(x)$ — законы движения границ.

Граничные условия (5) в переменных ξ, τ задаются на новых, вообще говоря, движущихся границах, положение которых зависит от двух функций φ и ψ. Так как φ и ψ произвольны, можно потребовать, чтобы граничные условия записывались на неподвижных границах, т.е. $l_1 = \text{const}$ и $l_2 = \text{const}$ ($l_2 > l_1$). Для этого необходимо, чтобы φ и ψ удовлетворяли системе функциональных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi\left(\tau + l_1(\tau)\right) - \psi\left(\tau - l_1(\tau)\right) = l_1, \\ \varphi\left(\tau + l_2(\tau)\right) - \psi\left(\tau - l_2(\tau)\right) = l_2, \end{cases} \tag{6}$$

которые однозначно определяют функции φ и ψ через известные законы движения границ. При движении границ со скоростью, большей скорости распространения волн, решение волнового уравнения становится некорректным, поэтому на скорость движения границ накладывается ограничение $|l_i'(\tau)| < 1$. Постоянные l_i могут быть произвольными, но не равными величинами (например, $l_1 = 0$, $l_2 = 1$). Тогда система (6) примет вид

$$\begin{cases} \varphi\left(\tau + l_1(\tau)\right) = \psi\left(\tau - l_1(\tau)\right), \\ \varphi\left(\tau + l_2(\tau)\right) = \psi\left(\tau - l_2(\tau)\right) + 1. \end{cases} \tag{7}$$

Существование решения данной системы было доказано в работе [11]. Решение (4), (5) находится методом Фурье [27]:

$$U(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\omega_{0n}\xi\right)\left(D_n\cos\left(\omega_{0n}\tau\right)+E_n\sin\left(\omega_{0n}\tau\right)\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}r_n\left\{\sin\left(\omega_{0n}(\tau+\xi)+\alpha_n\right)-\sin\left(\omega_{0n}(\tau-\xi)+\alpha_n\right)\right\}, \tag{8}$$

где $\omega_{0n}\left(\varepsilon_0\tau\right)=\dfrac{\pi n}{l_2-l_1}$; $r_n=\dfrac{1}{2}\sqrt{D_n^2+E_n^2}$; $\alpha_n=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{E_n}{D_n}\right)$.

Решение, полученное в работах [1–3, 10–13, 22–24], имеет вид, аналогичный (8).

Возвращаясь к переменным x и t, будем иметь

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}r_n\left\{\sin\left(\omega_{0n}\varphi(\tau+\xi)+\alpha_n\right)-\sin\left(\omega_{0n}\psi(\tau-\xi)+\alpha_n\right)\right\}.$$

Здесь φ и ψ находятся из решений системы функциональных уравнений (7) по известным законам движения границ, а постоянные D_n, E_n определяются из начальных условий.

Решить систему (7), вообще говоря, нелегко. Возможны два различных подхода:

решение обратной задачи [3, 11, 15, 22–26], т.е. по заданным “фазам” собственных колебаний φ и ψ нахождение законов движения границ $l_i(\tau)$;

решение прямой задачи [15, 28], т.е. нахождение “фаз” собственных колебаний по заданным законам движения границ $l_i(\tau)$.

Для решения системы (7) А. И. Весницким [11] был использован обратный метод, т.е. по заданным $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из получающейся системы уравнений находятся законы движения границ $l_1(\tau)$ и $l_2(\tau)$. При решении обратной задачи уравнения системы (7) сводятся к исследованию алгебраических или трансцендентных уравнений относительно $l_i(\tau)$, которые во многих случаях допускают точные решения. На основе обратной задачи в [11, 22] были получены решения для достаточно широкого круга законов движения границ.

Система (7) имеет бесконечно много решений, так как на интервале $[0,1]$ функция $\varphi(z)$ и на интервале $[-1,0]$ функция $\psi(z)$ могут задаваться произвольно и с помощью метода последовательных приближений [27] можно найти значения функций в других областях. Нам же достаточно отыскать одно частное решение, определяющее взаимно однозначное соответствие точек z и точек $y_1=\varphi(z)$, $y_2=\psi(z)$. Из всех решений нас интересуют только монотонные, а монотонные решения в случае движения границ со скоростью, меньшей скорости распространения волн ($|l_1'(\tau)|<1; |l_2'(\tau)|<1$), могут быть только монотонно возрастающими.

Лемма. *Если функция $\varphi(z)$ монотонно возрастающая (убывающая), то функция $\psi(z)$ также монотонно возрастающая (убывающая).*

Доказательство. Действительно, из первого уравнения системы (7) при $\tau=\tau_0$ следует

$$\varphi\left(\tau_0+l_1(\tau_0)\right)=\psi\left(\tau_0-l_1(\tau_0)\right).$$

Теперь предположим, что $\tau_1>\tau_0$ и функция $\varphi(z)$ возрастает (убывает), тогда в случае движения границ со скоростью, меньшей скорости распространения волн ($|l_1'(\tau)|<1$; $|l_2'(\tau)|<1$), будем иметь

$$\tau_1+l_1(\tau_1)>\tau_0+l_1(\tau_0),\quad \tau_1-l_1(\tau_1)>\tau_0-l_1(\tau_0).$$

Поскольку функция $\varphi(z)$ в данном случае возрастает (убывает), то для выполнения первого равенства системы (7) при $\tau=\tau_1$ необходимо, чтобы возрастала (убывала) функция $\psi(z)$, т.е. функция $\psi(z)$ тоже возрастающая (убывающая).

Покажем также, что монотонное решение системы (7) в случае движения границ со скоростью, меньшей скорости распространения волн, может быть только возрастающим. Действительно, учитывая неравенство $l_1(\tau)<l_2(\tau)$, получим

$$\tau+l_1<\tau+l_2(\tau),\quad \tau-l_1(\tau)>\tau-l_2(\tau).$$

Предположим, что $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ убывают, тогда можно записать:

$$\varphi\big(\tau + l_2(\tau)\big) < \varphi\big(\tau + l_1(\tau)\big) = \psi\big(\tau - l_1(\tau)\big) < \psi\big(\tau - l_2(\tau)\big).$$

Однако данное неравенство противоречит второму уравнению системы (7). Следовательно, функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ могут быть только монотонно возрастающими. Лемма доказана.

Заметим, что из системы (7) функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяются с точностью до константы в том смысле, что если $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — решение системы (7), то $\varphi(z)+C$ и $\psi(z)+C$ также являются решением (здесь C — произвольная постоянная). Поэтому для определенности можно выбрать такую функцию $\psi(z)$, что $\psi(-1) = -1$. При этом из второго уравнения системы (7) при $\tau = 0$ следует, что $\varphi(1) = 0$. Из первого уравнения системы (7) при $\tau = 0$ получим $\varphi(0) = \psi(0)$.

При задании функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в них вводится несколько произвольных постоянных. Зависимость найденных законов движения $l_1(\tau)$ и $l_2(\tau)$ от величин этих констант позволяет аппроксимировать достаточно разнообразные законы движения границ законами, полученными из решения обратной задачи.

Совокупность обратных решений достаточно широка. Приводимые ниже решения удовлетворяют соотношениям

$$l_1(0) = 0, \quad l_2(0) = 1, \quad \psi(-1) = -1.$$

Множество полученных законов движения границ разбито на следующие классы.

1. Решения, приведенные в табл. 1, относятся к классу A, когда левая граница неподвижна и $\varphi(z) = \psi(z)$. Здесь ν — относительная скорость движения границ; α, A, B — постоянные величины. Решения под номерами 1–6 получены А. И. Весницким [11, 22], решения 4–7 получены описанным в настоящей работе методом.

Таблица 1

№ п/п	$l_2(r)$	$\varphi(z) = \psi(z)$
1	$\nu\tau + 1$	$\dfrac{\mathrm{Ln}\,[(\nu z+1)/(1-\nu)]}{{}^{-}\,[(\nu+1)/(1-\nu)]} - 1$
2	$\dfrac{\sqrt{B\tau + B^2}}{\lvert B\rvert}$	$\sqrt{Bz + B + 0,25} - \sqrt{B^2 - B + 0,25} - 1$
3	$\dfrac{1}{4B\tau + 1}$	$Bz^2 + 0,5z - B - 0,5$
4	$\dfrac{1}{\alpha}\mathrm{arcsh}\left[\dfrac{0,5}{B_1 e^{\alpha\tau}} - B_2 e^{-\alpha\tau}\right]$	$B_1\big(e^{\alpha z} - e^{-\alpha}\big) + B_2\big(e^{-\alpha z} - e^{\alpha}\big) - 1,$ $B_1 = B_2 + \dfrac{1}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}},\ \alpha > 0$
5	$\sqrt{(\tau+B)^2\big(\alpha^2-1\big) + 1 + 2\alpha B + B^2} - \alpha(\tau + B)$	$\dfrac{\mathrm{Ln}\,\big[(z+B)^2 + 1 + 2\alpha B + B^2\big]}{\mathrm{Ln}\,[(1+\alpha)/(1-\alpha)]} - \dfrac{\mathrm{Ln}\,\big[(B-1)^2 + 1 + 2\alpha B + B^2\big]}{\mathrm{Ln}\,[(1+\alpha)/(1-\alpha)]} - 1$
6	$\dfrac{1}{\alpha}\Big[-d + \sqrt{1 + d^2 + (\alpha\tau + B)^2}\Big],$ $d = \dfrac{1 + B - \alpha^2}{2\alpha}$	$\dfrac{\mathrm{arctg}(az + B)}{\mathrm{arcctg}\,[(1 + B^2 - \alpha^2)/(2\alpha)]} - \dfrac{\mathrm{arctg}(B - \alpha)}{\mathrm{arcctg}\,\big[\big(1 + B^2 - \alpha^2\big)/(2\alpha)\big]} - 1$
7	$\dfrac{1}{\alpha}\left(\ln\dfrac{1 + \sqrt{1 + 4A^2 e^{2\alpha\tau}}}{2A}\right) - \tau$	$Ae^{\alpha z} + B,\ \alpha = \ln\dfrac{1 + \sqrt{1 + 4A^2}}{2A}$

2. Следующий класс B определяется тем, что границы движутся по одинаковому закону:

$$l_1(\tau) = l(\tau), \quad l_2(\tau) = 1 + l(\tau), \quad l(0) = 0.$$

Поскольку движение границ взаимосвязано, то между функциями $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ также существует взаимосвязь. Она выражается функциональным уравнением

$$\varphi\left(\bar{\varphi}(\psi(z)) + 1\right) - \psi(z - 1) = 1. \tag{9}$$

Система (7) в данном случае может удовлетворяться только функциями, которые являются решениями уравнения (9). Приведем два ранее неизвестных решения класса B:

1) $l = \nu z$; $\varphi(z) = (1-\nu)z/2 + (1+\nu)/2 - 1$; $\psi(z) = (1+\nu)z/2 + (1+\nu)/2 - 1$;

2) $l(z) = \dfrac{1}{\alpha}\ln\left[\left(Be^{-\alpha\tau} - Ce^{\alpha\tau}\right)/(B-C)\right]$; $\varphi(z) = B\left(e^{-\alpha z}-1\right) - C\left(e^{-\alpha}-1\right) - 1$; $B = C + 1/\left(e^{-\alpha}-1\right)$; $\psi(z) = C\left(e^{\alpha z}-1\right) - C\left(e^{-\alpha}-1\right) - 1$.

3. Для решений класса C границы движутся симметрично в разные стороны, т.е.

$$l_1(\tau) = -l(\tau), \quad l_2(\tau) = l(\tau).$$

Уравнение взаимосвязи функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ здесь имеет вид

$$\varphi(z) = \psi(z) + 0,5.$$

Решения класса C получаются из решений класса A по следующим формулам:

$$l(\tau) = l_A(\tau), \quad \psi(z) = \frac{1}{2}\psi_A(z), \quad \varphi(z) = \psi(z) + 0,5,$$

где индексом A обозначены соответствующие функции решений класса A.

4. Решение класса D получено для случая, когда обе границы движутся равномерно:

$$l_1(\tau) = \big(B_2 - B_1\big)\tau/\big(B_2 + B_1\big); \quad l_2(\tau) = \big(B_2 e^{1/c} - B_1\big)\tau/\big(B_2 + B_2 e^{1/c}\big) + 1,$$

$$\varphi(z) = C\mathrm{Ln}\big(B_1 z + D\big) - C\mathrm{Ln}\big(D - B_2\big) - 1,$$

$$\psi(z) = C\mathrm{Ln}\big(B_1 z + D\big) - C\mathrm{Ln}\big(D - B_2\big) - 1,$$

$$D = \big(B_1 + B_2 e^{1/c}\big)/\big(e^{1/c} - 1\big).$$

Решение под номером 1 в табл. 1 может быть использовано при изучении колебаний канатов грузоподъемных установок в случае равномерного подъема (спуска) [1, 2, 4–9]. Приведенные решения класса B могут применяться для изучения колебаний гибких звеньев передач [12–14]. Остальные решения являются модельными.

Класс обратных решений ограничен, например не получено решение для равноускоренного движения границы $l(\tau) = 1 + \nu\tau^2$. Отыскание указанного решения актуально для описания продольных и поперечных колебаний канатов грузоподъемных установок на стадии разгона [1].

Решение прямой задачи, как правило, сталкивается с большими трудностями, так как известные методы решения функциональных уравнений хотя и позволяют иногда находить φ и ψ по известным $l_i(\tau)$, но в ограниченном интервале значений аргумента и в виде, мало пригодном для аналитического исследования.

В связи с этим рассмотрим приближенное решение функционального уравнения

$$\varphi\big(\tau + l(\tau)\big) - \varphi\big(\tau - l(\tau)\big) = 1. \tag{10}$$

Для приближенного решения уравнения (10) предлагается использовать асимптотический метод работы [28]. При неподвижных границах $l(\tau) = l$ решением (10) является линейная функция

$$\varphi_s(z) = \frac{1}{2l}z + \mathrm{const}.$$

В случае медленного движения границы $l(\tau)$ “фаза” волны $\varphi(z)$ за время ее пробега через систему изменяется незначительно относительно $\varphi_s(z)$. Предполагается, что $\varphi(z)$ имеет производные любого порядка, и, записывая $\varphi\big(\tau + l(\tau)\big)$ в виде степенных рядов по $l(\tau)$, после их подстановки в (1) получим дифференциальное уравнение для медленно изменяющейся “фазы” $\varphi(\tau)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{l^{k+1}}{(k+1)!}\frac{d^{k+1}\varphi}{d\tau^{k+1}} = 1. \tag{11}$$

Так как $\varphi(\tau)$ мало отклоняется от линейного закона φ_s $(z = \tau)$ за время пробега волны, то каждый следующий член в левой части уравнения (11) много меньше предыдущего и его решение следует искать в виде ряда:

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\tau). \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11) и приравнивая члены одинакового порядка малости по отдельности к нулю, получим для нулевого приближения

$$\varphi_0(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau} \frac{\partial t}{l(t)}.$$

В случае линейного закона движения границы $l(t) = 1 + \nu\tau$ фаза динамических собственных колебаний равна

$$\varphi(z) = \frac{\ln\left[(\nu z + 1)/(1+\nu)\right]}{2\nu}. \tag{13}$$

Значения (13) сравнивались со значениями, полученными с помощью точного решения (табл. 1):

$$\varphi(z) = \frac{\mathrm{Ln}\big[(\nu z + 1)/(1-\nu)\big]}{\mathrm{Ln}\big[(1+\nu)/(1-\nu)\big]} - 1. \tag{14}$$

Значения максимальных абсолютных погрешностей Δ асимптотического метода в зависимости от скорости движения границы ν приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

ν	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Δ	0,002	0,006	0,013	0,023	0,036	0,053	0,073	0,100	0,139

В интервале $\nu \in [0.1; 0.6]$ погрешность приближенного метода мала. Увеличение погрешности при приближении ν к единице объясняется тем, что функция (14) при $\nu \longrightarrow 1$ становится бесконечно большой.

Незначительные погрешности позволяют применять описанный метод для решения функционального уравнения (10) в случаях, когда его точное решение неизвестно.

Итак, в настоящей работе с помощью аналитического метода замены переменных исходная краевая задача сведена к системе функционально-разностных уравнений. Решение исходной задачи зависит от того, возможно ли решить данную систему (7). А. И. Весницкий предложил решать ее обратным методом, т.е. задавать функции φ и ψ и из получившейся системы уравнений находить законы движения границ. В работе приведено пять новых обратных решений системы.

Рассмотрен приближенный асимптотический метод решения функциональных уравнений системы (7). В условиях медленного движения границ незначительные погрешности позволяют применять указанный метод в случаях, когда точное решение системы функциональных уравнений неизвестно.

Приведенные решения могут быть использованы при изучении колебаний канатов грузоподъемных установок при равномерном подъеме (спуске), гибких звеньев передач (например, ременная передача) и т.д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Савин Г.Н., Горошко О.А.* Динамика нити переменной длины. Киев: Наукова думка, 1962.
2. *Горошко О.А., Савин Г.Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1971.
3. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами. Самара: СамГТУ, 2017.
4. *Колосов Л.В., Жигула Т.И.* Продольно-поперечные колебания струны каната подъемной установки // Изв. вузов. Горный журнал. 1981. № 3. 83–86.

5. *Zhu W.D., Chen Y.* Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control // J. Vibr. Acoust. 2006. **1**. 66–78.
6. *Shi Y., Wu L., Wang Y.* Нелинейный анализ собственных частот тросовой системы // J. Vibr. Eng. 2006. **2**. 173–178.
7. *Wang L., Zhao Y.* Multiple internal resonances and non-planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations // J. Sound Vibr. 2009. **1–2**. 1–14.
8. *Zhao Y., Wang L.* On the symmetric modal interaction of the suspended cable: three-to one internal resonance // J. Sound Vibr. 2006. **4–5**. 1073–1093.
9. *Литвинов В.Л.* Продольные колебания каната переменной длины с грузом на конце // Вестн. научно-техн. развития. 2016. № 1(101). 19–24.
10. *Самарин Ю.П.* Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // Прикл. матем. и механ. 1964. **26**, вып. 3. 77–80.
11. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001.
12. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении // Изв. Самар. науч. центра РАН. 2017. **19**, № 4. 161–165.
13. *Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е.* Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упругоинерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестн. научно-техн. развития. 2013. № 6(70). 18–29.
14. *Литвинов В.Л.* Поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды // Вестн. научно-техн. развития. 2015. № 4(92). 29–33.
15. *Литвинов В.Л.* Точное и приближенное решения задачи о колебаниях стержня переменной длины // Вестн. научно-техн. развития. 2017. № 9(121). 46–57.
16. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича–Галеркина // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физико-математические науки. 2009. **1**, № 18. 149–158.
17. *Лежнева А.А.* Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. 1970. № 1. 159–161.
18. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Применение метода Канторовича–Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2018. № 2. 70–77.
19. *Литвинов В.Л.* Решение краевых задач с подвижными границами с использованием приближенного метода построения решений интегро-дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики Урал. отд. РАН. 2020. **26**, № 2. 188–199.
20. *Литвинов В.Л., Литвинова К.В.* Приближенный метод решения краевых задач с подвижными границами путем сведения к интегро-дифференциальным уравнениям // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. **62**, № 6. 977–986.
21. *Литвинов В.Л.* Вариационная постановка задачи о колебаниях балки с подвижной подпружиненной опорой // Теор. и матем. физ. 2023. **215**, № 2. 709–715.
22. *Весницкий А.И.* Обратная задача для одномерного резонатора, изменяющего во времени свои размеры // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. **10**. 1538–1542.
23. *Барсуков К.А., Григорян Г.А.* К теории волновода с подвижными границами // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. **2**. 280–285.
24. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физико-математические науки. 2012. **3**, № 28. 145–151.
25. *Литвинов В.Л.* Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении // Журн. Средневолж. матем. о-ва. 2013. **15**, № 3. 112–119.
26. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Аналитический метод решения волнового уравнения с широким классом условий на движущихся границах // Вестн. научно-техн. развития. 2016. № 2(102). 28–35.
27. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.
28. *Литвинов В.Л.* Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода // Журн. Средневолж. матем. о-ва. 2014. **16**, № 1. 83–88.

Поступила в редакцию
10.02.2024