

УДК 532.685

РЕШЕНИЯ С БЕГУЩИМИ ВОЛНАМИ УРАВНЕНИЙ ДВУХСКОРОСТНОЙ ОБЪЕМНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СУСПЕНЗИИ

Н. Е. Леонтьев¹, К. Таурбаева²

Строятся решения с бегущими волнами для системы уравнений объемной фильтрации суспензии в пористой среде в рамках модели с различными скоростями несущей жидкости и взвешенных подвижных частиц. В случае, когда скорости частиц и несущей жидкости различаются на множитель, произвольным образом зависящий от концентрации, решение получено в квадратурах. В ряде частных случаев в пространстве определяющих параметров найдены области, соответствующие физически реализуемым решениям. Приведены примеры решений, описывающих структуру волны засорения.

Ключевые слова: течение в пористых средах, суспензия, объемная фильтрация, точное решение, засорение.

Travelling wave solutions to the deep bed filtration system are constructed for a model with different velocities of a carrier fluid and suspended particles. The solution in quadratures is obtained when the velocity of the carrier fluid and that of the particles differ by a concentration-dependent factor. For some special cases, the physically realizable domains are found in the space of governing parameters. Solutions that may be interpreted as a clogging wave structure are presented.

Key words: flow through porous media, suspension, deep bed filtration, exact solution, clogging.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-6-10

1. В настоящей работе изучаются решения с бегущими волнами системы уравнений, описывающей течения суспензии внутри пористой среды при учете оседания взвешенных частиц на внутреннюю поверхность пор. В большинстве исследований (см., например, [1, 2]) предполагается, что скорость взвешенных частиц совпадает со средней скоростью несущей жидкости, так что суспензию можно рассматривать как односкоростной континуум. Для различных вариантов таких односкоростных моделей решения с бегущими волнами изучались в [3–8]. В отличие от этих работ мы находим решения с бегущими волнами для двухскоростной модели [9], в которой принимается во внимание отставание взвешенных частиц от несущей жидкости.

Рассматриваются одномерные (с плоскими волнами) течения, для которых средняя скорость несущей жидкости v отличается от средней скорости взвешенных частиц w на множитель \varkappa , известным образом зависящий от концентрации α взвешенных частиц:

$$v = \varkappa(\alpha) \cdot w. \quad (1)$$

Такое отставание (при $\varkappa < 1$) частиц от несущей жидкости было обнаружено в ряде экспериментов (в монографии [2] приводятся значения $\varkappa = 0.80\text{--}0.85$) и с физической точки зрения может объясняться взаимодействием частиц со стенками поровых каналов. Еще одним механизмом может быть смещение взвешенных частиц поперек порового канала под действием каких-либо физико-химических или гидродинамических факторов. В частности, аналогичное явление, когда средняя скорость эритроцитов из-за их миграции поперек кровеносного сосуда отличается от средней скорости плазмы, известно в механике кровообращения [10].

¹Леонтьев Николай Евгеньевич — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. гидромеханики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: leontiev_n@mail.ru.

Leontiev Nikolay Evgenievich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Hydromechanics.

²Таурбаева Карина — асп. каф. гидромеханики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: carina_cleo@mail.ru.

Taurbayeva Karina — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Hydromechanics.

Пористый скелет, несущая жидкость и твердые взвешенные частицы предполагаются несжимаемыми, удержания несущей жидкости при отложении частиц на пористый скелет не происходит, так что законы сохранения массы для частиц и несущей жидкости принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\alpha) + \frac{\partial}{\partial x}(m\alpha v) = \frac{\partial m}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(m(1-\alpha)) + \frac{\partial}{\partial x}(m(1-\alpha)w) = 0. \quad (2)$$

Здесь x и t — координата вдоль направления течения и время; m — пористость, изменение которой из-за отложения частиц описывается кинетическим уравнением

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\gamma H(m)|m\alpha v|, \quad (3)$$

где $H(m)$ — известная функция; γ — константа, обратная величина к которой имеет порядок характерного пространственного масштаба задачи. В (3) величина под знаком модуля выражает объемный поток взвешенных частиц, а множитель $H(m)$ задает особенности осаждения частиц в каждом конкретном случае.

Для обычно применяемых односкоростных моделей уравнение (3) переходит в часто используемое кинетическое уравнение вида

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\gamma H(m)|\alpha u|,$$

где u — скорость фильтрации суспензии. Обзор зависимостей $H(m)$, встречающихся в литературе, можно найти в [11, 12].

Соотношения (1)–(3) составляют замкнутую систему из четырех уравнений для определения четырех функций $v(x, t)$, $w(x, t)$, $\alpha(x, t)$ и $m(x, t)$. В изучаемом случае одномерных течений уравнение баланса импульса, которое является обобщением закона Дарси, служит только для определения распределения давления в суспензии и может не рассматриваться.

Из системы уравнений можно исключить скорости и получить гиперболическую систему двух уравнений для пористости $m(x, t)$ и концентрации $\alpha(x, t)$. Действительно, уравнения неразрывности (2) дают закон сохранения объемного расхода суспензии q :

$$m\alpha v + m(1-\alpha)w = q(t), \quad (4)$$

причем за счет подходящей замены времени можно свести задачу к случаю постоянного объемного расхода q , что и будет далее предполагаться. С помощью (4) объемный расход частиц записывается в виде

$$m\alpha v = F(\alpha) \cdot q, \quad F(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha + \frac{1-\alpha}{\kappa(\alpha)}},$$

в результате получается система

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\alpha) + \frac{\partial}{\partial x}(F(\alpha)q) = \frac{\partial m}{\partial t}, \quad \frac{\partial m}{\partial t} = -\gamma q H(m) F(\alpha). \quad (5)$$

Отметим, что функция $F(\alpha)$ имеет смысл отношения объемного расхода взвешенных частиц к полному объемному расходу суспензии.

Система (5) сводится к одному дифференциальному уравнению относительно пористости m

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(mG \left(-\frac{K(m)}{\gamma q} \frac{\partial m}{\partial t} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K(m)}{\gamma} \frac{\partial m}{\partial t} \right) = \frac{\partial m}{\partial t}, \quad K(m) = \frac{1}{H(m)}, \quad (6)$$

где G — функция, обратная к функции $F(\alpha)$, а концентрация α находится по известному распределению пористости m с помощью соотношения

$$\alpha = G \left(-\frac{K(m)}{\gamma q} \frac{\partial m}{\partial t} \right).$$

С использованием тождества

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K(m) \frac{\partial m}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(K(m) \frac{\partial m}{\partial x} \right)$$

уравнение (6) однократно интегрируется, в результате чего получается первый интеграл

$$m \left(1 - G \left(-\frac{K(m)}{\gamma q} \frac{\partial m}{\partial t} \right) \right) + \frac{K(m)}{\gamma} \frac{\partial m}{\partial x} = \Phi(x), \tag{7}$$

в котором произвольная функция $\Phi(x)$ определяется по известным пространственным распределениям пористости и концентрации в какой-либо фиксированный момент времени.

2. Будем рассматривать решения системы (5) с бегущими волнами $m(\xi)$, $\alpha(\xi)$, где $\xi = x - Vt$ и $V = \text{const}$. В дальнейшем в этой статье мы используем безразмерный вид соотношений, который формально получается, если положить равными единице значения q и γ (для упрощения записи обозначения не меняются). Для определенности рассматриваем волны, бегущие в положительном направлении оси x , $V > 0$.

Для существования решений с бегущими волнами необходимо, чтобы функция в правой части первого интеграла (7) была константой: $\Phi(x) = \Phi_0 = \text{const}$. Для распределения пористости $m(\xi)$ без труда получаем дифференциальное уравнение

$$m(\xi) = S \left(K(m(\xi)) \frac{dm(\xi)}{d\xi} \right) \equiv S(A), \quad A = K(m(\xi)) \frac{dm(\xi)}{d\xi}, \quad S(A) = \frac{\Phi_0 - A}{1 - G(VA)}, \tag{8}$$

решение которого имеет вид

$$\xi = \int \frac{K(m) dm}{R(m)} + \text{const}, \tag{9}$$

где R — функция, обратная функции S . После нахождения пористости $m(\xi)$ распределение концентрации определяется из соотношения $\alpha(\xi) = G(VR(m(\xi)))$.

Уравнение (9) дает формальное общее решение задачи, однако для отбора физически реализуемых решений необходимо учесть дополнительные естественные ограничения на пористость и концентрацию:

$$0 \leq m \leq 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{10}$$

Заметим, что часто в литературе используются модели, упрощенные для случая малых концентраций ($\alpha \ll 1$) и малого отклонения пористости m от ее первоначального значения в незагрязненном состоянии. В отличие от этих подходов мы используем неупрощенную модель (1)–(3), которая потенциально применима для конечных концентраций и больших изменений пористости, поэтому проверка выполнения дополнительных ограничений (10) имеет смысл. Кроме этого отметим, что, например, для суспензии с частицами одинакового размера максимально достижимая объемная концентрация теоретически соответствует объемной концентрации при плотной упаковке частиц и может быть меньше единицы (для полидисперсных суспензий эти ограничения, по-видимому, не очень существенны). Также отметим, что при сильном засорении пористой среды ($m \ll 1$) скорость несущей жидкости становится большой и могут проявляться другие физические механизмы взаимодействия суспензии с пористой средой, в частности унос частиц со скелета, поэтому, строго говоря, область изменения пористости следует ограничивать снизу ненулевой, но малой по сравнению с единицей константой. В настоящей работе для простоты отличие верхней границы концентрации от единицы и нижней границы пористости от нуля не учитывается.

Далее мы рассмотрим поведение решений с учетом (10) в ряде частных случаев, интересных с точки зрения практических приложений.

3. Для случая, когда скорости частиц и жидкости отличаются на фиксированную постоянную $\varkappa = \text{const}$, имеем

$$F(\alpha) = \frac{\alpha \varkappa}{1 - (1 - \varkappa)\alpha}, \quad G(\zeta) = \frac{\zeta}{\varkappa + (1 - \varkappa)\zeta}, \quad S(A) = \frac{(\Phi_0 - A)(\varkappa + (1 - \varkappa)VA)}{\varkappa(1 - VA)}.$$

Уравнение (8) задает в рассматриваемом случае график дробно-рациональной функции на плоскости (A, m) , дополнительные условия (10) выделяют часть графика, попадающую в прямоугольник $0 \leq m \leq 1$, $0 \leq A \leq 1/V$. При фиксированном значении \varkappa качественное поведение графика определяется только двумя параметрами — Φ_0 и V — и не зависит от вида функции $H(m)$ в кинетическом уравнении (3). Обратим внимание на то, что условия (10) являются лишь необходимыми условиями

физической применимости решения и, вообще говоря, фактически реализуемое решение может соответствовать не всему графику, попадающему в прямоугольник, а лишь некоторой его части.

Элементарный анализ, который здесь не приводится, показывает, что на параметрической плоскости $(V, 1/\Phi_0)$ (рис. 1, *з*) физически допустимым решениям соответствуют области *I*, *II*, *III*, в области *IV* физически допустимых решений нет. При этом области *I* соответствует решение, в котором пористость может меняться самое большое от 0 до 1, области *II* — решение с изменением m от 0 до Φ_0 ($\Phi_0 < 1$), области *III* — от Φ_0 до 1. В качестве иллюстрации на рис. 1, *а-в* приведены графики решений, соответствующие областям *I-III* параметрической плоскости. Для физической реализации решений в пористом образце конечной длины следует специальным образом задавать распределения пористости и концентрации в некоторый начальный момент времени и специальным образом задавать концентрацию во входном сечении образца (через которое жидкость втекает в образец) в дальнейшие моменты времени. Отметим, что скорость движения волны может быть как меньше, так и больше среднерасходной скорости всей суспензии.

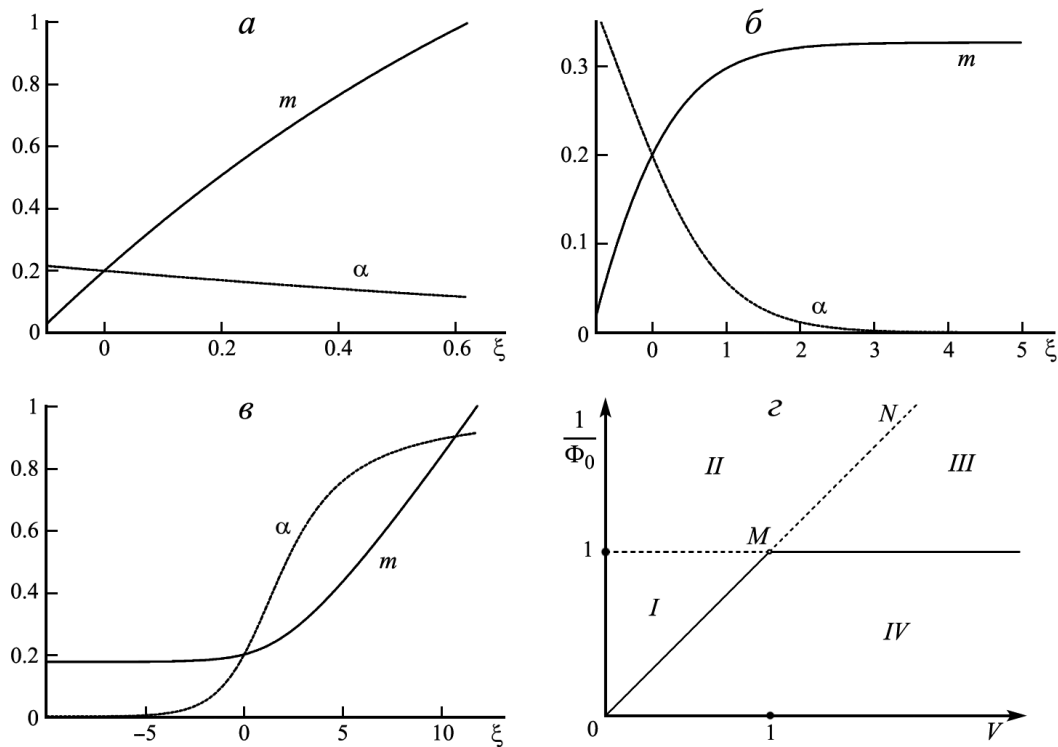


Рис. 1. Зависимости концентрации α и пористости m от безразмерной координаты ξ при $H(m) = 1$, $\varkappa = 0.8$: *а* — $\Phi_0 = 1.8267$, $V = 0.1$; *б* — $\Phi_0 = 0.3267$, $V = 1$; *в* — $\Phi_0 = 0.1767$, $V = 10$; *з* — параметрическая плоскость $(V, 1/\Phi_0)$

Линия MN на параметрической плоскости соответствует решениям

$$\xi = \frac{1 - \varkappa}{\varkappa} V \int \frac{dm}{(mV - 1)H(m)} + \text{const}$$

для частного случая $\Phi_0 V = 1$.

4. Другому частному случаю, интересному с практической точки зрения, соответствует линейная зависимость $\varkappa(\alpha) = 1 - \beta\alpha$, $\beta = \text{const}$, $0 < \beta < 1$. С физической точки зрения такой закон отражает тот факт, что для малоконцентрированных суспензий скорость взвешенных частиц близка к скорости несущей жидкости, а при росте концентрации взвешенные частицы начинают отставать от несущей жидкости. Особенностью этой зависимости $\varkappa(\alpha)$ является, в частности, то, что для такого закона задача о закачке суспензии в первоначально незагрязненный пористый пласт может иметь непрерывные решения [13], тогда как для двухскоростной модели с постоянным множителем \varkappa [9] и для многих односкоростных моделей [14] соответствующие решения содержат скачок концентрации.

Для этой модели

$$F(\alpha) = \frac{\alpha - \beta\alpha^2}{1 - \beta\alpha^2}, \quad G(\zeta) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta\zeta + 4\beta\zeta^2}}{2\beta(1 - \zeta)},$$

$$S(A) = \frac{2\beta(\Phi_0 V - B)(1 - B)}{V(2\beta(1 - B) - 1 + \sqrt{1 - 4\beta B + 4\beta B^2})}, \quad B \equiv AV.$$

Знаменатель аналитического выражения для функции $S(A)$ имеет корень $A = 1/V$, являющийся одновременно точкой локального минимума знаменателя. После элементарного анализа, который мы опускаем, для рассматриваемой модели с линейной функцией $\varkappa(\alpha)$ получается такая же качественная классификация, что и приведенная выше для случая $\varkappa = \text{const}$.

5. Для некоторых зависимостей $H(m)$ решения с бегущими волнами могут существовать на всей оси x (конечно, с практической точки зрения это означает, что решение существует в достаточно протяженной, но конечной пространственной области, так как для течения в пористом образце бесконечной длины потребовался бы бесконечный перепад давления), причем перед и за зоной существенного изменения параметров решение может асимптотически выходить на постоянные значения пористости и концентрации, так что решение можно интерпретировать как структуру волны засорения, распространяющейся по пористой среде.

В качестве примера на рис. 2 показано решение для кинетического уравнения (3) с функцией

$$H(m) = -(m - m_{\min})(m - m_{\max}), \quad (11)$$

где постоянные m_{\min} и m_{\max} имеют смысл пороговых значений пористости, при приближении к которым скорость осаждения частиц на скелет стремится к нулю. При выбранных значениях определяющих параметров решение соответствует области II на рис. 1, 2, при этом фактический диапазон изменения пористости — от m_{\min} до m_{\max} — является более узким, чем диапазон, получающийся только из необходимых условий (10).

6. В работе найден общий вид решений с бегущими волнами для системы уравнений, описывающей объемную фильтрацию суспензии при учете различия скоростей несущей жидкости и взвешенных частиц. Проведен качественный параметрический анализ для практически важных частных случаев. Показано, что полученные решения могут описывать структуру волн засорения в пористых средах.

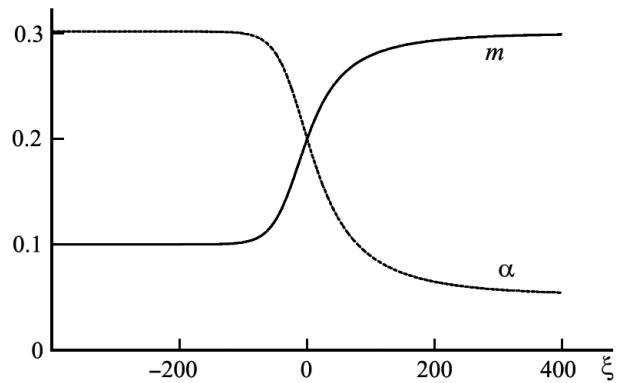


Рис. 2. Зависимость концентрации α и пористости m от безразмерной координаты ξ для уравнения (11) в случае $\varkappa = 0.8$, $m_{\min} = 0.1$, $m_{\max} = 0.3$, $V = 1$, $\Phi_0 = 0.3267$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Herzig J.P., Leclerc D.M., Le Goff P.* Flow of suspensions through porous media. Application to deep filtration // *Ind. and Eng. Chem.* 1970. **62**, N 5. 8–35.
2. *Шехтман Ю.М.* Фильтрация малоконцентрированных суспензий. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
3. *Хуржаев Б.* Модель фильтрации суспензии с учетом кольматации и суффозии // *Инж.-физ. журн.* 1992. **63**, № 1. 72–79.
4. *Капранов Ю.И.* О фильтрации взвеси твердых частиц // *Прикл. матем. и механ.* 1999. **63**, № 4. 620–628.
5. *Кон С., Леддер Г., Логан Д.* Анализ модели фильтрации в пористой среде // *Матем. моделир.* 2001. **13**, № 2. 110–116.
6. *Logan J.D.* Transport modeling in hydrogeochemical systems. N.Y.: Springer, 2001.
7. *Altoé J.E., Bedrikovetsky P., Siqueira A.G., et al.* Correction of basic equations for deep bed filtration with dispersion // *J. Petrol. Sci. and Eng.* 2006. **51**. 68–84.
8. *Леонтьев Н.Е.* О структуре фронта пористости при движении суспензии в пористой среде // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* 2006. № 5. 73–76.
9. *Леонтьев Н.Е.* Точные решения задачи о фильтрации суспензии с замедлением скачка концентрации в рамках нелинейной двухскоростной модели // *Изв. РАН. Механ. жидкости и газа.* 2017. № 1. 168–174.

10. *Лайтхилл Дж.* Математическая биогиродинамика. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014.
11. *Civan F.* Modified formulations of particle deposition and removal kinetics in saturated porous media // *Transp. Porous Med.* 2016. **111**. 381–410.
12. *Рыжиков Н.И.* Экспериментальное исследование динамики захвата частиц и изменения проницаемости при фильтрации суспензии через пористую среду: Канд. дис. М., 2014.
13. *Leontiev N.E.* The problem of suspension injection into a porous medium within a two-velocity model of deep bed filtration // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. **1392**. 012013.
14. *Civan F., Rasmussen M.L.* Analytical models for porous media impairment by particles in rectilinear and radial flows // *Handbook of Porous Media* / Ed. by K. Vafai. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2005. 485–542.

Поступила в редакцию
16.06.2023