13. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: ИЛ, 1949.
14. ГОСТ 56353-2015. Национальный стандарт Российской Федерации. Методы лабораторного определения динамических свойств дисперсных грунтов. 2015-07-01.

Поступила в редакцию
23.12.2022

УДК 517.9+532.5

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НАД ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ И НАКЛОННЫМ ДНОМ

А. В. Аксенов[1]

Получено точечное преобразование, определяющее эквивалентность систем уравнений двумерной мелкой воды над горизонтальным и наклонным дном. Найдены симметрии этих систем уравнений.

Ключевые слова: двумерная мелкая вода, эквивалентность систем уравнений, точечное преобразование, оператор симметрии, линеаризация.

A point transformation determining the equivalence of systems of equations of two-dimensional shallow water over horizontal and sloping bottoms is obtained. The symmetries of these systems of equations are found.

Key words: two-dimensional shallow water, equivalence of systems of equations, point transformation, symmetry operator, linearization.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-6-9

В безразмерных переменных система уравнений двумерной мелкой воды над горизонтальным дном имеет следующий вид [1]:

$$u_t + uu_x + vu_y + \eta_x = 0, \quad v_t + uv_x + vv_y + \eta_y = 0, \quad \eta_t + \big(u(\eta+h)\big)_x + \big(v(\eta+h)\big)_y = 0\,. \tag{1}$$

Здесь $u = u(x,y,t)$, $v = v(x,y,t)$ — компоненты средней по глубине горизонтальной скорости; $\eta = \eta(x,y,t)$ — отклонение свободной поверхности; $\eta + h$, $\eta + h \geqslant 0$, $h = \mathrm{const}$, — глубина жидкости. Систему уравнений двумерной мелкой воды над наклонным дном запишем в виде

$$\begin{gathered} u'_{t'} + u'u'_{x'} + v'u'_{y'} + \eta'_{x'} = 0, \quad v'_{t'} + u'v'_{x'} + v'v'_{y'} + \eta'_{y'} = 0, \\ \eta'_{t'} + \big(u'(\eta' + ax' + by')\big)_{x'} + \big(v'(\eta' + ax' + by')\big)_{y'} = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $u' = u'(x',y',t')$, $v' = v'(x',y',t')$ — компоненты средней по глубине горизонтальной скорости; $\eta' = \eta'(x',y',t')$ — отклонение свободной поверхности; $\eta' + ax' + by'$, $\eta' + ax' + by' \geqslant 0$, $a, b = \mathrm{const}$, — глубина жидкости.

Справедливо следующее

Утверждение. *Точечное преобразование*

$$\begin{gathered} x' = x + \frac{at^2}{2}\,, \quad y' = y + \frac{bt^2}{2}\,, \quad t' = t\,, \\ u' = u + at\,, \quad v' = v + bt\,, \quad \eta' = \eta - a\Big(x + \frac{at^2}{2}\Big) - b\Big(y + \frac{bt^2}{2}\Big) + h \end{gathered} \tag{3}$$

определяет эквивалентность систем уравнений (1) *и* (2).

[1] *Аксенов Александр Васильевич* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. гидромеханики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: aksenov@mech.math.msu.su.

Aksenov Alexander Vasilievich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Hydromechanics.

Доказательство. Найдем симметрии систем уравнений (1) и (2). Операторы симметрии ищем в виде

$$X = \xi^1(x,y,t,u,v,\eta)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(x,y,t,u,v,\eta)\frac{\partial}{\partial y} + \xi^3(x,y,t,u,v,\eta)\frac{\partial}{\partial t} + \\ + \eta^1(x,y,t,u,v,\eta)\frac{\partial}{\partial u} + \eta^2(x,y,t,u,v,\eta)\frac{\partial}{\partial v} + \eta^3(x,y,t,u,v,\eta)\frac{\partial}{\partial \eta}\,. \tag{4}$$

Применяя критерий инвариантности [2] к системам уравнений (1) и (2), получим переопределенные линейные однородные системы определяющих уравнений относительно коэффициентов оператора симметрии (4). Системы определяющих уравнений здесь не приводятся ввиду их громоздкости. Исследуя их на совместность, находим алгебры Ли операторов симметрии систем уравнений (1) и (2).

Базис алгебры Ли операторов симметрии системы уравнений (1) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial x}\,, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}\,, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial t}\,, \quad X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\,, \quad X_5 = t\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\,,\\
&X_6 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + v\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial v}\,, \qquad X_7 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + t\frac{\partial}{\partial t}\,,\\
&X_8 = t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} - 2(\eta + h)\frac{\partial}{\partial \eta}\,,\\
&X_9 = xt\frac{\partial}{\partial x} + yt\frac{\partial}{\partial y} + t^2\frac{\partial}{\partial t} - (tu - x)\frac{\partial}{\partial u} - (tv - y)\frac{\partial}{\partial v} - 2t(\eta + h)\frac{\partial}{\partial \eta}\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

Базис алгебры Ли операторов симметрии системы уравнений (2) запишем следующим образом:

$$\begin{gathered}
X_1' = \frac{\partial}{\partial x'} - a\frac{\partial}{\partial \eta'}\,, \quad X_2' = \frac{\partial}{\partial y'} - b\frac{\partial}{\partial \eta'}\,, \quad X_3' = \frac{\partial}{\partial t'}\,,\\
X_4' = t'\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial u'} - at'\frac{\partial}{\partial \eta'}\,, \quad X_5' = t'\frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial v'} - bt'\frac{\partial}{\partial \eta'}\,,\\
X_6' = \Big(y' - \frac{bt'^2}{2}\Big)\frac{\partial}{\partial x'} - \Big(x' - \frac{at'^2}{2}\Big)\frac{\partial}{\partial y'} + (v' - bt')\frac{\partial}{\partial u'} -\\
-(u' - at')\frac{\partial}{\partial v'} + (bx' - ay')\frac{\partial}{\partial \eta'}\,,\\
X_7' = \Big(x' + \frac{at^2}{2}\Big)\frac{\partial}{\partial x'} + \Big(y' + \frac{bt^2}{2}\Big)\frac{\partial}{\partial y'} + t'\frac{\partial}{\partial t'} + at'\frac{\partial}{\partial u'} + bt'\frac{\partial}{\partial v'} -\\
-\Big(ax' + by' + \frac{(a^2 + b^2)t'^2}{2}\Big)\frac{\partial}{\partial \eta'}\,,\\
X_8' = at'^2\frac{\partial}{\partial x'} + bt'^2\frac{\partial}{\partial y'} + t'\frac{\partial}{\partial t'} - (u' - 2at')\frac{\partial}{\partial u'} - (v' - 2bt')\frac{\partial}{\partial v'} -\\
-2\Big(\eta' + ax' + by' + \frac{(a^2 + b^2)t'^2}{2}\Big)\frac{\partial}{\partial \eta'}\,,\\
X_9' = \Big(x't' + \frac{at'^3}{2}\Big)\frac{\partial}{\partial x'} + \Big(y't' + \frac{bt'^3}{2}\Big)\frac{\partial}{\partial y'} + t'^2\frac{\partial}{\partial t'} - \Big(t'u' - x' - \frac{3at'^2}{2}\Big)\frac{\partial}{\partial u'} -\\
-\Big(t'v' - y' - \frac{3bt'^2}{2}\Big)\frac{\partial}{\partial v'} - t'\Big(2\eta' + 3ax' + 3by' + \frac{(a^2 + b^2)t'^2}{2}\Big)\frac{\partial}{\partial \eta'}\,.
\end{gathered} \tag{6}$$

Анализ коэффициентов операторов симметрии (5) и (6) показывает, что преобразование переменных, переводящее систему уравнений (1) в систему уравнений (2), можно искать в виде

$$\begin{aligned}
&x' = x + f\,, \quad y' = y + g\,, \quad t' = t\,,\\
&u' = u + \dot f\,, \quad v' = v + \dot g\,, \quad \eta' = \eta + h - a(x + f) - b(y + g)\,,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $f = f(t)$, $g = g(t)$. Преобразование (7) можно интерпретировать как переход в неинерциальную систему отсчета в предположении равенства глубин: $\eta + h = \eta' + ax' + by'$.

В переменных (7) система уравнений (1) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
&u'_{t'} + u'u'_{x'} + v'u'_{y'} + \eta'_{x'} - \ddot{f} + a = 0\,,\\
&v'_{t'} + u'v'_{x'} + v'v'_{y'} + \eta'_{y'} - \ddot{g} + b = 0\,,\\
&\eta'_{t'} + \big(u'(\eta' + ax' + by')\big)_{x'} + \big(v'(\eta' + ax' + by')\big)_{y'} = 0\,.
\end{aligned}$$

Откуда заключаем, что

$$f = \frac{at^2}{2} + c_1 t + c_2\,, \qquad g = \frac{bt^2}{2} + c_3 t + c_4\,,$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — произвольные постоянные. Тогда преобразование

$$\begin{aligned}
&x' = x + \frac{at^2}{2} + c_1 t + c_2\,, \quad y' = y + \frac{bt^2}{2} + c_3 t + c_4\,, \quad t' = t\,,\\
&u' = u + at + c_1\,, \quad v' = v + bt + c_3\,,\\
&\eta' = \eta + h - a\Big(x + \frac{at^2}{2} + c_1 t + c_2\Big) - b\Big(y + \frac{bt^2}{2} + c_3 t + c_4\Big)
\end{aligned} \tag{8}$$

переводит систему уравнений (1) в систему уравнений (2). Полагая $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$, получаем преобразование (3).

Утверждение доказано.

Замечание 1. Преобразование, обратное преобразованию (3), имеет вид

$$\begin{aligned}
&x = x' - \frac{at'^2}{2}\,, \qquad y = y' - \frac{bt'^2}{2}\,, \qquad t = t'\,,\\
&u = u' - at'\,, \qquad v = v' - bt'\,, \qquad \eta = \eta' + ax' + by' - h\,.
\end{aligned}$$

Оно преобразует систему уравнений (2) в систему уравнений (1).

Замечание 2. Алгебры Ли операторов симметрии систем уравнений (1) и (2) конечномерны, поэтому эти системы уравнений не могут быть линеаризованы точечным преобразованием. Одномерные системы уравнений мелкой воды линеаризуются точечным преобразованием: система уравнений мелкой воды над горизонтальным дном линеаризуется преобразованием годографа [1], а система уравнений мелкой воды над наклонным дном — преобразованием Карриера–Гринспэна [3, 4] (см. также [5, 6]).

Замечание 3. Преобразование, определяющее эквивалентность систем уравнений двумерной мелкой воды над горизонтальным и наклонным дном, не единственное. Преобразуя правые части соотношений (3) с помощью симметрий системы уравнений (1), получим девятипараметрическое семейство таких преобразований. Частным случаем этого семейства является преобразование (8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стокер Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: ГИИЛ, 1959.
2. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. *Carrier G.F., Greenspan H.P.* Water waves of finite amplitude on a sloping beach // J. Fluid Mech. 1958. **4**, N 1. 97–109.
4. *Tuck E., Hwang L.* Long wave generation on a sloping beach // J. Fluid Mech. 1972. **51**, N 3. 449–461.
5. *Pelinovsky E.N., Mazova R.Kh.* Exact analytical solutions of nonlinear problems of tsunami wave run-up on slopes with different profiles // Natural Hazards. 1992. **6**, N 3. 227–249.
6. *Доброхотов С.Ю., Тироцци Б.* Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью $c = \sqrt{x}$ // Успехи матем. наук. 2010. **65**, № 1. 185–186.

Поступила в редакцию
26.05.2023