

Механика

УДК 539.3:534.1

КОЛЕБАНИЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ПОДЗЕМНОГО ТРУБОПРОВОДА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЕЙСМИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

С. Е. Носов¹

Получено точное аналитическое решение задачи о совместных нестационарных колебаниях упругого грунта и полубесконечного подземного трубопровода, вызванных распространением вдоль его оси продольной сейсмической волны при условии жесткой заделки его конца. Исследовано возникающее напряженно-деформируемое состояние для дозвукового и сверхзвукового режима распространения сейсмической волны. Результаты исследования могут быть использованы при расчете деформации нефтепроводов и газопроводов при сейсмических нагрузках.

Ключевые слова: сейсмические волны, полубесконечный подземный трубопровод, нестационарные колебания.

An exact analytical solution of the problem of joint non-stationary oscillations of a semi-infinite underground pipeline and elastic soil caused by the propagation of a longitudinal seismic wave along its axis under the condition of rigid sealing of its end is obtained. The emerging stress-strain state for subsonic and supersonic modes of seismic wave propagation is studied. The results of this study can be used to calculate the deformation of oil and gas pipelines under seismic loads.

Key words: seismic waves, semi-infinite underground pipeline, nonstationary vibrations.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-6-8

1. Вводные замечания. Настоящая работа является продолжением публикации [1], в которой обсуждается постановка задачи и получено представление решения в виде изображения по Лапласу; изучено асимптотическое поведение решения в окрестности волнового фронта. Также даны анализ работы [2] и критические замечания по поводу ее результатов. Основной целью нашей работы является получение точного аналитического решения задачи о нестационарном воздействии сейсмической волны на трубопровод, помещенный в упругий грунт. Обсуждения постановки конкретной задачи приведены в [3–7], но полная библиография данной темы значительно шире и выходит за рамки краткого сообщения.

2. Постановка задачи о сейсмических колебаниях полубесконечного трубопровода. Рассматривается задача о движении полубесконечного упругого трубопровода под действием сейсмической волны, распространяющейся вдоль его оси. Предполагается, что существует коаксиальная трубопроводу область грунта, за пределами которой влияние трубопровода на сейсмическое движение не распространяется. Если ввести цилиндрические координаты r , θ , z (z — координата, направленная вдоль оси трубопровода), то в [4] и [7] показано, что перемещение $u(z, t)$ точек трубопровода может быть описано одномерным уравнением Клейна–Гордона [1]:

$$u_{tt} = c_0^2 u_{zz} + k^2 (w_0 - u), \quad k^2 \equiv 2\pi\mu (S\rho' \ln(R/a))^{-1}, \quad z > 0. \quad (1)$$

Здесь c_0 — скорость продольных волн в трубопроводе; S — площадь его поперечного сечения; ρ' — плотность материала трубы; μ — модуль сдвига окружающего трубопровод грунта, считающегося упругим; a — радиус трубопровода; R — расстояние от оси трубопровода, на котором его возмущающим влиянием на движение грунта можно пренебречь; $w_0(z, t)$ — перемещения, вызванные сейсмической волной на расстоянии R (вводится дополнительное предположение, что они постоянны и не зависят от угловой координаты θ). Следует отметить, что коэффициент k требует экспериментального подтверждения, вопрос рассмотрен в [8].

¹ Носов Святослав Евгеньевич — канд. физ.-мат. наук, доцент Рос. гос. ун-та нефти и газа им. Губкина, e-mail: s-e-n@newmail.ru.

Nosov Svyatoslav Evgenyevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Gubkin Russian State University of Oil and Gas.

В начальный момент времени $t = 0$ трубопровод находится в состоянии покоя: заданы нулевые начальные условия

$$u(z, 0) = \dot{u}(z, 0) = 0, \quad \dot{u} \equiv \partial u / \partial t. \tag{2}$$

На конце $z = 0$ задано краевое условие

$$u(0, t) = u_0(t). \tag{3}$$

В дальнейшем будут рассмотрены два важных случая: (а) $u(0, t) = 0$, что означает, что конец трубопровода прикреплен к массивному сооружению, которое можно считать неподвижным, и (б) $u(0, t) = w_0(t)$ означает, что это сооружение, а тем самым и конец трубопровода следуют движению окружающего грунта под действием сейсмической волны.

Также для единственности решения задачи необходимо потребовать, чтобы

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} u(z, t) = 0.$$

3. Частное решение неоднородного уравнения. Решение задачи Коши для неоднородного уравнения (1) при помощи функции Грина на бесконечной прямой ($-\infty < z < +\infty$) хорошо известно [9]. Оно содержит двойную свертку функции $k^2 w_0(x, t)$ с функцией Грина $J_0\left(k\sqrt{t^2 - z^2/c_0^2}\right)$ ($J_0(x)$ — функция Бесселя). Но это, во-первых, делает решение трудноинтерпретируемым, а во-вторых, скрадывает качественное отличие дозвукового ($c_0 > c$ — скорость распространения продольного возмущения в грунте меньше скорости в трубопроводе) и сверхзвукового ($c_0 < c$ — скорость распространения возмущения в грунте больше скорости в трубопроводе) случаев распространения волны. В настоящей работе рассматривается частный, но практически важный случай $w_0 = w_0(t - x/c) \cdot H(t - x/c)$ ($H(t)$ — функция Хевисайда), т.е. когда вдоль трубопровода распространяется волна.

Воспользуемся инвариантным преобразованием однопараметрической группы уравнения Клейна-Гордона [10]

$$\tau = \frac{z - ct}{\sqrt{1 - (c/c_0)^2}}, \quad \zeta = \frac{t - c \cdot c_0^{-2}z}{\sqrt{1 - (c/c_0)^2}},$$

которое приводит уравнение (1) к виду

$$u_{\tau\tau} = c_0^2 u_{\zeta\zeta} \pm k^2 \left(w_0 \left(\tau \cdot \sqrt{1 - (c/c_0)^2} \right) - u \right), \tag{4}$$

где знак “+” соответствует дозвуковому случаю, а “-” — сверхзвуковому. В сверхзвуковом режиме решение, соответствующее краевому значению (3) и уравнению (4), будет описываться различными фундаментальными функциями Грина [9]. Среди решений уравнения (4) имеются те, которые зависят только от переменной τ . Для определения этого частного решения получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u_{\tau\tau} = \pm k^2 \left(w_0 \left(\tau \cdot \sqrt{1 - (c/c_0)^2} \right) - u \right).$$

Решив его и вернувшись к исходным переменным, можно добиться удовлетворения начальным условиям (2), что приводит нас к решению, полученному в [11]. Для сверхзвукового случая

$$U(Z) = k \int_0^Z w_0(Z') \sin k(Z - Z') dZ', \tag{5}$$

где $Z \equiv t - z/c$. Для дозвукового случая

$$U(Z) = \frac{ke^{kZ}}{2} \int_Z^{+\infty} w_0(Z') H(Z') e^{-kZ'} dZ' + H(Z) \frac{ke^{-kZ}}{2} \int_0^Z w_0(Z') e^{kZ'} dZ'. \tag{6}$$

Таким образом, дозвуковой ($c_0 > c$) и сверхзвуковой ($c_0 < c$) случаи качественно различаются, о чем трудно заключить, опираясь на решение с помощью функции Грина.

4. Решение краевой задачи для однородного уравнения с неоднородным граничным условием. Представим решение задачи (1)–(3) в виде суммы $u = U + v$. Ввиду того что $w_0 \equiv 0$ при $t < 0$, $z > 0$, функция $v(z, t)$ удовлетворяет с учетом формул (4), (5) и в сверхзвуковом, и в дозвуковом случаях однородному уравнению (1) с $w_0 \equiv 0$ и однородным же начальным условиям (2). В итоге для функции $v(z, t)$ получим начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} v_{tt} = c_0^2 v_{zz} - k^2 v, & z > 0, \\ v(0, t) = u_0(t) - U(0, t) \equiv f(t), \\ v(z, 0) = v_t(z, 0) = 0, \\ \lim_{z \rightarrow +\infty} v(z, t) = 0, \end{cases}$$

где выбор функции U определяется формулами (5) в сверхзвуковом и (6) в дозвуковом случаях. Применим синус-преобразование Фурье по переменной z к полученной задаче:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} + (c_0^2 \lambda^2 + k^2) \bar{u} = \lambda c_0^2 f(t), \\ \bar{u}(\lambda, 0) = \frac{d\bar{u}}{dt}(\lambda, 0) = 0, \end{cases}$$

где

$$\bar{u}(\lambda, t) = \int_0^{+\infty} u(x, t) \sin \lambda z \, dz.$$

Решив эту задачу Коши и воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, найдем

$$v(z, t) = \frac{2c_0^2}{\pi} \int_0^t f(\tau) \int_0^{+\infty} \lambda \frac{\sin[\omega(\lambda)(t-\tau)]}{\omega(\lambda)} \sin \lambda z \, d\lambda \, d\tau, \quad (7)$$

где $\omega(\lambda) = \sqrt{c_0^2 \lambda^2 + k^2}$. Учитывая четность подынтегральной функции по переменной λ во внутреннем интеграле, можно переписать (7) в следующем виде:

$$v(z, t) = -\frac{c_0^2}{\pi} \int_0^t f(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda \frac{\sin[\omega(\lambda)(t-\tau)]}{\omega(\lambda)} e^{i\lambda z} \, d\lambda \, d\tau. \quad (8)$$

5. Приведение решения к свертке с функцией Грина. Прибегнем к методу, аналогичному [12, с. 268]. Мы будем использовать тождество из теории цилиндрических функций

$$\frac{\sin r}{r} = \frac{1}{2} \int_0^\pi J_0(r \sin \varphi \sin \theta) e^{ir \cos \varphi \cos \theta} \sin \theta \, d\theta. \quad (9)$$

Данное тождество не очевидно, автору не удалось его обнаружить в справочниках, а в [12] нет никаких ссылок на доказательство. Поэтому приведем его здесь (по требованию рецензентов), применив метод разложения в степенные ряды [13]. Используя разложения экспоненты и бесселевой функции нулевого порядка, будем иметь

$$\begin{aligned} J_0(r \sin \varphi \sin \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{2k} \sin^{2k} \varphi \sin^{2k} \theta}{2^{2k} (k!)^2}, \\ \exp(ir \cos \varphi \cos \theta) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{i^s r^s \cos^s \varphi \cos^s \theta}{s!}. \end{aligned}$$

Перемножив эти ряды и собрав коэффициенты при одинаковых степенях r в правой части (9), получим

$$I \equiv \frac{1}{2} \int_0^\pi \sum_{m=0}^\infty r^m \sum_{2k+s=m} \frac{(-1)^k i^s \sin^{2k} \varphi \sin^{2k} \theta \cos^s \varphi \cos^s \theta}{2^{2k} (k!)^2 s!} \sin \theta d\theta,$$

причем во внутренних суммах индексы суммирования удовлетворяют соотношению $s + 2k = m$. Так как ряды для экспоненты и для функции Бесселя сходятся равномерно для любого промежутка действительной оси, можно поменять порядки интегрирования и суммирования. Вычисляя интеграл от каждого слагаемого, заключаем, что

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^{2k} \theta \cos^s \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{2k} t^s dt = \begin{cases} 0, & s = 2l + 1; \\ \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}+s)}{2\Gamma(\frac{3}{2}+k+s)}, & s = 2l, \end{cases}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. Тем самым все нечетные степени обнуляются и сумму для I можно записать следующим образом:

$$I = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n r^{2n} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}+n-k)}{2\Gamma(\frac{3}{2}+n) 2^{2k} (k!)^2 (2(n-k))!} \sin^{2k} \varphi \cos^{2(n-k)} \varphi.$$

Далее используем известные тождества:

$$\begin{aligned} \Gamma(k+1) &= k!, & \Gamma(\frac{1}{2}+n-k) &= 2^{k-n+1} (2(n-k)-1)!!, \\ \Gamma(\frac{3}{2}+n) &= 2^{-n} (2n+1)!!, & (2(n-k))! / (2(n-k))!! &= 2^{n-k} (n-k)!, \\ 2^n n! (2n+1)!! &= (2n+1)!. \end{aligned}$$

В результате под знаком внутренней суммы получим бином

$$I = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n r^{2n}}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \sin^{2k} \varphi \cos^{2(n-k)} \varphi = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n r^{2n} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n r^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Этот ряд совпадает с разложением функции $\sin r/r$ по степеням r .

Путем замены в тождестве (9) $r \cos \varphi = c_0 \lambda (t - \tau)$, $r \sin \varphi = k (t - \tau)$, $\beta = c_0 (t - \tau) \cos \theta$ решение (8) приводится к виду

$$v(z, t) = \frac{c_0^2}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda f(\tau) \Phi(\beta, t - \tau) e^{i(\beta - \lambda)z} d\beta, \tag{10}$$

где введено обозначение

$$\Phi(\beta, t - \tau) = \begin{cases} 0, & |\beta|/c_0 > |t - \tau|; \\ J_0\left(k\sqrt{(t - \tau)^2 - \beta^2/c_0^2}\right), & |\beta|/c_0 \leq |t - \tau|. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь и далее $J_\alpha(p)$ — функция Бесселя первого рода порядка α от аргумента p . Из (10), используя формулу обращения Фурье, получим

$$v(z, t) = -c_0 \int_0^t f(\tau) \frac{\partial \Phi(z, t - \tau)}{\partial z} d\tau,$$

где с учетом (11) частная производная понимается в обобщенном смысле, поэтому можно преобразовать результат к виду

$$v(z, t) = -c_0 \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{Z_0} f(\tau) J_0(k \cdot \text{sqrt}(t - \tau, z)) d\tau, \tag{12}$$

$$\text{sqrt}(t - \tau, z) \equiv \sqrt{(t - \tau)^2 - z^2/c_0^2}.$$

Здесь $Z_0 = t - z/c_0$. Выполнив дифференцирование по переменной z , получим другое представление решения (12):

$$v(z, t) = f(Z_0) + \frac{kz}{c_0} \int_0^{Z_0} f(\tau) \frac{J_1(k \cdot \text{sqrt}(t - \tau, z))}{\text{sqrt}(t - \tau, z)} d\tau.$$

Также можно воспользоваться рекуррентными формулами для функций Бесселя и представить решение в следующем виде:

$$v(z, t) = f(Z_0) + \frac{k^2 z}{2c_0} \int_0^{Z_0} f(\tau) [J_0(k \cdot \text{sqrt}(t - \tau, z)) + J_2(k \cdot \text{sqrt}(t - \tau, z))] d\tau.$$

Окончательное решение получается сложением решения $U(z, t)$ из (5) для сверхзвукового случая или (6) для дозвукового и выражения (10):

$$u(z, t) = U(z, t) + v(z, t).$$

Рассмотрим частный случай ступенчатой падающей волны $w_0(z, t) = I \cdot H(t - z/c)$, где I — размерный параметр, соответствующий характерному перемещению, вызванному волной. Вычислим деформации при $z = 0$ для задачи с граничным условием $u(0, t) = 0$ в сверхзвуковом случае:

$$\varepsilon_{zz}(0, t) \equiv \frac{\partial u}{\partial z}(0, t) = \frac{kI}{c} \sin kt - \frac{kI}{2c_0} [\pi t J_1(kt) H_1(kt) + t J_0(kt) (2 - \pi H_0(kt))], \quad (13)$$

где $H_\nu(kt)$ — функции Струве соответствующего порядка. Формуле (13) соответствуют незатухающие непериодические колебания, что следует из асимптотики специальных функций.

Также может представлять интерес граничное условие, при котором перемещение конца трубы равно перемещению грунта в падающей волне: $u(0, t) = w_0(0, t)$. Выражение деформаций существенно упрощается:

$$\varepsilon_{zz}(0, t) = \frac{kI}{c} \sin kt - \frac{kI}{c_0} J_1(kt). \quad (14)$$

На этот раз второе слагаемое в (14) уже стремится к нулю.

Для дозвукового случая деформации выражаются через квадратуры от функций Бесселя:

$$\varepsilon_{zz}(0, t) = f'(t) - \int_0^t f(t - \tau) [J_0(k\tau) + J_2(k\tau)] d\tau,$$

где следует положить $f(t) = \pm \frac{kI}{2c} (1 - e^{-kt})$, знак “+” берется для случая $u(0, t) = 0$, а знак “−” — для задачи $u(0, t) = U(0, t)$.

5. Обсуждение результатов и выводы. Установлено точное аналитическое решение о воздействии продольной сейсмической волны на полубесконечный трубопровод с закрепленным концом. Также получены выражения для деформаций на конце трубопровода.

На уровне постановки задачи показано, что любые (не только автомобильные) сверхзвуковые воздействия на трубопровод (т.е. когда скорость распространения падающей волны больше скорости распространения волн в трубопроводе) сводятся к сумме сверхзвукового решения для бесконечного трубопровода и решения для полубесконечного трубопровода с краевым воздействием, т.е. к дозвуковой задаче.

Асимптотика решения вблизи фронта сейсмической волны уже обсуждалась в [1], поэтому сосредоточимся на поведении решения на конце трубопровода $z = 0$. Вопрос о вычислении коэффициента I в соответствии с балльностью землетрясения в настоящее время является дискуссионным. Поэтому мы приведем только качественные результаты для $I = 1$. На рис. 1, 2 приведены графики деформаций при $z = 0$ для случая жесткого закрепления ($u(0, t) = 0$). Сплошная линия соответствует твердому суглинку, пунктир — супеси; данные по характеристикам грунтов взяты из [14].

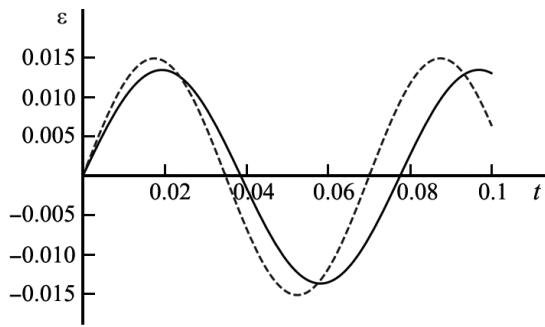


Рис. 1

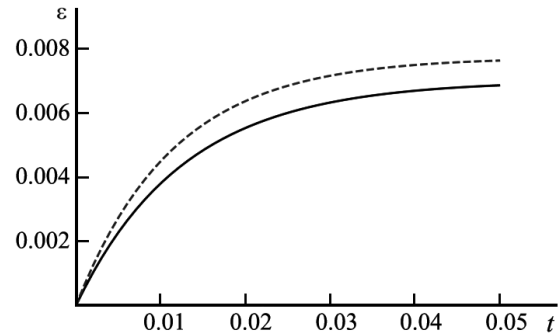


Рис. 2

В частности, было принято, что для суглинка модуль Юнга 25 МПа, коэффициент Пуассона 0.36, а для супеси соответственно 30 МПа и 0.33, радиус трубопровода 0.57 м, радиус зоны влияния трубопровода на грунт в 3 раза больше, характеристики материала трубопровода соответствуют углеродистой стали (скорость продольных волн 5950 м/с, плотность 7850 кг/м³), значение величины c/c_0 бралось равным 1.2 для сверхзвукового и 0.8 для дозвукового случаев. Качественное различие очевидно: если при дозвуковом характере движения деформации монотонно возрастают по модулю и асимптотически стремятся к постоянному значению (зависящему от состава окружающего грунта), то для сверхзвукового случая деформации меняются почти периодически. Точнее, для сверхзвукового случая имеют место незатухающие колебания, близкие к периодическим. Аналогичное поведение обнаруживается и в случае, когда конец трубопровода не является закрепленным, а свободно следует за волной ($u(0, t) = w_0(0, t)$), но их амплитуда меньше по модулю, чем для закрепленного конца. Подобные колебания могут оказывать разрушительное воздействие на протяженные подземные сооружения.

Обнаруженный эффект тем более важен, что проявляется он в самых близких к эпицентру землетрясения областях, где так называемая кажущаяся скорость падения волны имеет наибольшее значение и одновременно амплитуда колебаний наибольшая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Исраилов М.Ш., Носов С.Е.* О сейсмических колебаниях полубесконечного подземного трубопровода // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2022. № 5. 57–61.
2. *Рашидов Т.* Расчет подземного трубопровода на действие кратковременной и внезапно приложенной сейсмической нагрузки // Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук. 1968. № 3. 49–58.
3. *Исраилов М.Ш.* Связанные задачи сейсродинамики подземного трубопровода // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1995. № 5. 41–45.
4. *Георгиевский Д.В., Исраилов М.Ш.* Сейсродинамика протяженных подземных сооружений и грунтов: постановки задач и автомодельные решения // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2015. № 4. 138–151.
5. *Исраилов М.Ш.* Связанные сейсмические колебания трубопровода в бесконечной упругой среде // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2016. № 1. 57–66.
6. *Исраилов М.Ш.* Сейсродинамика протяженных подземных сооружений: границы применимости инженерных подходов и неправомочность аналогии с наземными сооружениями // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2017. № 1. 55–59.
7. *Исраилов М.Ш.* О гипотезе Ильющина в сейсродинамике подземных сооружений // Упругость и неупругость: Мат-лы Междунар. науч. симп. по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А. Ильющина. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2016. 323–328.
8. *Исраилов М.Ш., Хасамбиев М.В.* Об опытном определении коэффициента продольного взаимодействия грунта и трубопровода при сейсмических колебаниях // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2020. № 5. 8–18.
9. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.
10. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981.
11. *Исраилов М.Ш.* Нестационарные колебания подземного трубопровода и грунта при наклонном падении сейсмической волны // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2022. № 3. 50–57.
12. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Физматлит, 2003.

13. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: ИЛ, 1949.

14. ГОСТ 56353-2015. Национальный стандарт Российской Федерации. Методы лабораторного определения динамических свойств дисперсных грунтов. 2015-07-01.

Поступила в редакцию
23.12.2022

УДК 517.9+532.5

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НАД ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ И НАКЛОННЫМ ДНОМ

А. В. Аксенов¹

Получено точечное преобразование, определяющее эквивалентность систем уравнений двумерной мелкой воды над горизонтальным и наклонным дном. Найдены симметрии этих систем уравнений.

Ключевые слова: двумерная мелкая вода, эквивалентность систем уравнений, точечное преобразование, оператор симметрии, линеаризация.

A point transformation determining the equivalence of systems of equations of two-dimensional shallow water over horizontal and sloping bottoms is obtained. The symmetries of these systems of equations are found.

Key words: two-dimensional shallow water, equivalence of systems of equations, point transformation, symmetry operator, linearization.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-6-9

В безразмерных переменных система уравнений двумерной мелкой воды над горизонтальным дном имеет следующий вид [1]:

$$u_t + uu_x + vv_y + \eta_x = 0, \quad v_t + uv_x + vv_y + \eta_y = 0, \quad \eta_t + (u(\eta + h))_x + (v(\eta + h))_y = 0. \quad (1)$$

Здесь $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ — компоненты средней по глубине горизонтальной скорости; $\eta = \eta(x, y, t)$ — отклонение свободной поверхности; $\eta + h$, $\eta + h \geq 0$, $h = \text{const}$, — глубина жидкости. Систему уравнений двумерной мелкой воды над наклонным дном запишем в виде

$$\begin{aligned} u'_t + u'u'_{x'} + v'u'_{y'} + \eta'_{x'} &= 0, & v'_t + u'v'_{x'} + v'v'_{y'} + \eta'_{y'} &= 0, \\ \eta'_{x'} + (u'(\eta' + ax' + by'))_{x'} &+ (v'(\eta' + ax' + by'))_{y'} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $u' = u'(x', y', t')$, $v' = v'(x', y', t')$ — компоненты средней по глубине горизонтальной скорости; $\eta' = \eta'(x', y', t')$ — отклонение свободной поверхности; $\eta' + ax' + by'$, $\eta' + ax' + by' \geq 0$, $a, b = \text{const}$, — глубина жидкости.

Справедливо следующее

Утверждение. Точечное преобразование

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{at^2}{2}, & y' &= y + \frac{bt^2}{2}, & t' &= t, \\ u' &= u + at, & v' &= v + bt, & \eta' &= \eta - a\left(x + \frac{at^2}{2}\right) - b\left(y + \frac{bt^2}{2}\right) + h \end{aligned} \quad (3)$$

определяет эквивалентность систем уравнений (1) и (2).

¹ Аксенов Александр Васильевич — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. гидромеханики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: aksenov@mech.math.msu.su.

Aksenov Alexander Vasilievich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Hydromechanics.