2. *Mittal Y., Ylvisaker D.* Limit distribution for the maxima of stationary Gaussian processes // Stochast. Process. and their Appl. 1975. **3**. 1–18.
3. *Piterbarg V.I.* Asymptotic methods in theory of Gaussian random processes and fields. Providence: Amer. Math. Soc., Ser. Translations of Mathematical Monographs, 2012. Vol. 148.
4. *Прохоров Ю.В.* Асимптотическое поведение биномиального распределения // Успехи матем. наук. 1953. **8**, № 3. 135–142.
5. *Козуляев П.А.* Асимптотический анализ одной основной формулы теории вероятностей // Уч. зап. Моск. ун-та. 1939. **15**. 179–182.
6. *Богачев В.И.* Основы теории меры. Т. 1. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2003.
7. *Resnick S.I.* Extreme values, regular variation, and point processes. N.Y.; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1987.
8. *Berman S.* Sojourns and extremes of stochastic processes. London: CRC Press, Taylor&Francis, 1992.
9. *Ben Arous G., Bogachev L., Molchanov S.* Limit theorems for sums of random exponentials // Probab. Theory and Related Fields. 2005. **132**, N 4. 579–612.
10. *Molchanov S., Panov V.* Limit theorems for the alloy-type random energy model // Stochastics. 2019. **91**, N 5. 754–772 (arXiv:1802.05071v1 [math.PR]).

Поступила в редакцию
16.05.2023

УДК 519

МОДЕЛИ СТРАХОВАНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Е. В. Булинская[1]

Рассматриваются две модели страхования с дискретным временем. Первая модель изучает непропорциональное перестрахование и банковские займы. Для нее найдено оптимальное управление и установлена устойчивость к флуктуациям параметров и возмущениям распределений случайных величин, описывающих модель. Вторая модель дуальная, для нее выполнено сравнение вероятностей разорения в предположении, что распределения доходов подчинены одному из четырех частичных порядков.

Ключевые слова: модели страхования с дискретным временем, оптимальное управление; устойчивость к малым флуктуациям параметров и возмущениям распределений случайных величин, описывающих модель; вероятность разорения; стохастические порядки.

Two discrete-time insurance models are considered. The first model studies non-proportional reinsurance and bank loans. For this model, we establish the optimal control and stability to small fluctuation of parameters and perturbation of random variables distributions describing the model. The second model is dual and the ruin probabilities are compared under assumption that the gains distributions satisfy one of four partial orders.

Key words: discrete-time insurance models, optimal control, stability with respect to small fluctuation of parameters and perturbation of random variables distributions describing the model, ruin probability, stochastic orders.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-6-6

1. Введение. Начнем с напоминания хорошо известных фактов. Для исследования реальных процессов или явлений необходимо построить соответствующую математическую модель. При этом для одного и того же явления (процесса) может существовать большое число моделей, которые описывают его с различной степенью точности. Кроме того, одна и та же модель может использоваться для описания явлений, относящихся к различным областям. Наиболее распространены так

[1] *Булинская Екатерина Вадимовна* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ebulinsk@mech.math.msu.su, ebulinsk@yandex.ru.

Bulinskaya Ekaterina Vadimovna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Probability Theory.

называемые модели "входа-выхода" (input-output models), если речь идет о таких приложениях, как страхование, финансы, управление запасами, телекоммуникации, теория массового обслуживания, динамика популяций, теория надежности и другие. Для их использования [1] необходимо задать набор $(T, Z, Y, U, \Psi, \mathcal{L})$, где T — горизонт планирования; $Z = \{Z(t), t \in [0,T]\}$ — входящий процесс; $Y = \{Y(t), t \in [0,T]\}$ — выходящий процесс; $U = \{U(t), t \in [0,T]\}$ — управление; Ψ — функционал, который дает возможность найти состояние системы $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ в виде $X = \Psi(Z,Y,U)$, так как он характеризует структуру рассматриваемой системы и способ ее функционирования; $\mathcal{L}_T(U) = \mathcal{L}(T,Z,Y,U,X)$ — это целевая функция, оценивающая качество функционирования системы (обычно не все аргументы указываются в записи).

Одна из основных задач при исследовании моделей прикладной теории вероятностей — нахождение оптимального управления, которое обеспечивает достижение экстремума целевой функции. В страховании, являющемся важной и старейшей областью применения теории вероятностей, имеются два основных подхода (стоимостной и надежностный) при выборе целевой функции, т.е. оцениваются либо понесенные компанией убытки, либо вероятность ее разорения на горизонте планирования, которые необходимо минимизировать. Если речь идет о полученном компанией доходе или времени безотказной работы (т.е. времени до разорения), то желательно их максимизировать. В последние десятилетия стали популярны и другие подходы, например многокритериальная оптимизация [2] и поиск условных экстремумов. В качестве управления могут рассматриваться выбор начального капитала и принципа подсчета страховой премии, применение сострахования или перестрахования, использование банковских займов и инвестиций, стратегия выплаты дивидендов [3, 4]. Большой интерес также представляет изучение предельного поведения капитала страховой компании при неограниченном росте горизонта планирования [5, 6]. Отметим, что для того чтобы использовать на практике полученные оптимальные управления, необходимо убедиться, что предлагаемая математическая модель устойчива, т.е. малые флуктуации параметров или возмущения распределений, фигурирующих в построенной модели, приводят к малым изменениям целевой функции. Существует целый ряд методов исследования устойчивости [7]. Основное внимание в настоящей работе будет уделено использованию вероятностных метрик.

В последние годы широкое распространение получило исследование моделей с дискретным временем, описанных в [8]. Начало изучению таких моделей положила работа [9]. Обзор полученных до 2009 г. результатов содержится в [10], более поздние работы указаны в [1, разд. 5]. С одной стороны, модели с дискретным временем удобнее для численных расчетов и могут использоваться для приближения моделей с непрерывным временем [11]. С другой стороны, существуют такие ситуации, когда модель с дискретным временем более точно описывает реальное положение дел. Например, если речь идет о перестраховании [12], то договоры обычно заключаются в конце календарного года. Поэтому будут рассмотрены две модели с дискретным временем. Для первой из них найдена оптимальная политика и установлена устойчивость, а также доказаны предельные теоремы для капитала компании. Для второй, дуальной модели, изучается вероятность разорения и производится сравнение этих вероятностей в предположении о существовании одного из четырех частичных порядков между распределениями получаемых доходов.

2. Непропорциональное перестрахование и банковские займы. Предположим, что требования, поступающие в страховую компанию, образуют последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) неотрицательных случайных величин $\{X_i, i \geqslant 1\}$. Здесь X_i — размер требования в i-й период (год, месяц или день в зависимости от целей исследования). Пусть $F(x)$ — функция распределения случайных величин X_i, $i \geqslant 1$, имеющая плотность $\varphi(x)$ и конечное математическое ожидание. Компания использует в каждый период договор непропорционального перестрахования с уровнем собственного удержания a, а также банковские займы. Таким образом, страховщик платит $\min(X_i, a)$ в i-й период, а остальное выплачивает перестраховщик. Если заем берется в начале периода (до поступления требования), то ставка равна b_1; если же приходится брать срочный заем после поступления требования на выплату возмещения, то ставка равна b_2 и $b_2 > b_1$. Цель компании — так выбрать размеры займов, чтобы минимизировать математическое ожидание дополнительных выплат, связанных с займами. Пусть M — премия непосредственного страховщика (после перестрахования) в каждый из периодов. Если для подсчета премий используется принцип среднего, то

$$M = (1+\beta_1)\mathsf{E}X - (1+\beta_2)\mathsf{E}(X-a)^+ = (1+\beta_1)\mathsf{E}\min(X,a) - (\beta_2-\beta_1)\mathsf{E}(X-a)^+.$$

Здесь β_1 и β_2 — страховые нагрузки соответственно страховщика и перестраховщика, обычно $\beta_1 < \beta_2$.

Начнем с одношагового процесса (т.е. выясним, что будет, когда речь идет о последнем шаге многошагового процесса, иначе говоря, рассматривается только один период). Если x — капитал в начале периода, а y — капитал после поступления займа, то $f_1(x)$ — минимальные средние издержки за один период — задаются следующим образом:

$$f_1(x) = \min_{y\geqslant x}[b_1(y-x) + b_2\mathsf{E}(\min(X,a) - (y+M))^+]. \tag{1}$$

Очевидно, соотношение (1) можно переписать в виде

$$f_1(x) = -b_1x + \min_{y\geqslant x} G_1(y), \quad G_1(y) = b_1y + b_2\mathsf{E}[\min(X,a) - (y+M)]^+.$$

Пусть теперь $f_n(x)$ — минимальные ожидаемые издержки за первые n периодов и α — дисконтирующий множитель для будущих издержек. Тогда методами динамического программирования (см., например, [13, гл. 5]) нетрудно получить соотношение

$$f_n(x) = -b_1x + \min_{y\geqslant x} G_n(y), \quad G_n(y) = G_1(y) + \alpha\mathsf{E}f_{n-1}(y+M-\min(X,a)).$$

2.1. Основной оптимизационный результат.

Теорема 1. *Пусть $F(M) < 1 - \frac{b_1}{b_2} < F(a)$, тогда существует возрастающая последовательность критических уровней $\{y_n\}_{n\geqslant 1}$, такая, что для всех $x \geqslant 0$*

$$f_n(x) = -b_1x + \begin{cases} G_n(y_n), & \text{если } x \leqslant y_n;\\ G_n(x), & \text{если } x > y_n.\end{cases}$$

Последовательность $\{y_n\}_{n\geqslant 1}$ ограничена числом $\bar{y}$, удовлетворяющим уравнению $H(\bar{y}) = 0$, где $H(y) = G_1'(y) - b_1\alpha$.

Доказательство. Начнем с рассмотрения одного периода. Ясно, что

$$\mathsf{E}[\min(X,a) - z]^+ = \int_z^a \bar{F}(s)\,ds,$$

где $\bar{F}(s) = 1 - F(s)$. Значит, $G_1'(y) = b_1 - b_2\bar{F}(y+M)$ для $y+M < a$ и $G_1'(y) = b_1 > 0$ в остальных случаях. Следовательно, существует такое значение $y_1 = F^{-1}(1-\frac{b_1}{b_2}) - M > 0$, что $G_1'(y_1) = 0$ и

$$f_1(x) = -b_1x + \begin{cases} G_1(y_1), & \text{если } x \leqslant y_1;\\ G_1(x), & \text{если } x > y_1,\end{cases}$$

$$f_1'(x) = \begin{cases} -b_1, & \text{если } x \leqslant y_1;\\ -b_2\bar{F}(x+M), & \text{если } x > y_1.\end{cases}$$

Иначе говоря, $f_1'(x) < 0$ для всех x. Дальнейшее доказательство ведется по индукции. Поскольку

$$G_2'(y) = G_1'(y) + \alpha\int_0^\infty f_1'(y+M-\min(s,a))\varphi(s)\,ds$$

и $G_2''(y) \geqslant 0$, мы легко получаем, что $G_2'(y) \leqslant G_1'(y)$ для всех y, следовательно, $y_2 \geqslant y_1$. Более того,

$$G_2'(y) \geqslant G_1'(y) - b_1\alpha = H(y).$$

Отсюда вытекает неравенство $y_2 \leqslant \bar{y}$. Поэтому выражение $f_2(x)$ такое же, как $f_1(x)$, но с y_2 вместо y_1 и $f_2'(x) < 0$ для всех x.

Предположив, что такой же результат справедлив для n, можно записать

$$f_n'(x) - f_{n-1}'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant y_{n-1}; \\ -G_{n-1}'(x), & \text{если } y_{n-1} < x \leqslant y_n; \\ G_n'(x) - G_{n-1}'(x), & \text{если } y_n < x. \end{cases}$$

Итак, ясно, что $y_n \leqslant y_{n+1}$. Как и в случае $n = 2$, устанавливается, что $y_{n+1} \leqslant \bar{y}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Существует* $\lim_{n\to\infty} y_n = \hat{y}$. *Если* $M = 0$, *то* $\hat{y} = \bar{y}$.

2.2. Устойчивость модели. Предположим, что $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ — две различные последовательности требований соответственно с функциями распределения F_X и F_Y. Минимальные издержки за первые n шагов обозначим $f_{n,X}$ и $f_{n,Y}$, другие функции, зависящие от распределения, будут также отмечаться снизу индексами X и Y.

Определение расстояния Канторовича (см., например, [14, с. 14]). Пусть случайные величины X и Y, определенные на одном вероятностном пространстве, обладают конечными математическими ожиданиями. Расстояние, основанное на метрике Канторовича, задается следующим образом:

$$\varkappa(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} |F_X(t) - F_Y(t)|\, dt,$$

где F_X и F_Y — соответственно функции распределения X и Y.

Расстояние между распределениями будет измеряться в терминах метрики Канторовича, а расстояние между функциями издержек — в терминах равномерной метрики. Таким образом, мы будем изучать

$$\Delta_n = \sup_x |f_{n,X}(x) - f_{n,Y}(x)|.$$

Для этого докажем следующий результат

Лемма 1. *Пусть функции* $g_i(y)$, $i = 1, 2$, *таковы, что* $|g_1(y) - g_2(y)| < \delta$ *для некоторого* $\delta > 0$ *и любого* y, *тогда* $\sup_x |\inf_{y\geqslant x} g_1(y) - \inf_{y\geqslant x} g_2(y)| < \delta$.

Доказательство. Зафиксируем x и положим $C_i = \inf_{y\geqslant x} g_i(y)$. Тогда по определению нижней грани для любого $\varepsilon > 0$ существует такое значение $y_1(\varepsilon) \geqslant x$, что $g_1(y_1(\varepsilon)) < C_1 + \varepsilon$. Таким образом, $g_2(y_1(\varepsilon)) < g_1(y_1(\varepsilon)) + \delta < C_1 + \varepsilon + \delta$, что влечет $C_2 < g_2(y_1(\varepsilon)) < C_1 + \varepsilon + \delta$. Устремив $\varepsilon \to 0_+$, немедленно получаем $C_2 < C_1 + \delta$. Аналогично устанавливается, что $C_1 < C_2 + \delta$, а это дает требуемый результат $|C_1 - C_2| < \delta$. Лемма доказана.

Теперь можно оценить Δ_1.

Лемма 2. *Пусть* $\varkappa(X,Y) = \rho$, *тогда* $\Delta_1 \leqslant b_2\rho$.

Доказательство. Согласно лемме 1 необходимо оценить $|G_{1,X}(y) - G_{1,Y}(y)|$ для любого y. Из определения этих функций получаем

$$G_{1,X}(y) - G_{1,Y}(y) = b_2 \int_{y+M}^{a} (\bar{F}_X(s) - \bar{F}_Y(s))\, ds,$$

где, как обычно, $\bar{F}_X(s) = 1 - F_X(s)$. Это немедленно дает требуемую оценку. Лемма доказана.

Теорема 2. *Если* $\varkappa(X,Y) = \rho$, *то* $\Delta_n \leqslant D_n\rho$ *с* $D_n = \frac{b_2(1-\alpha^n)}{1-\alpha} + \frac{b_1(\alpha-\alpha^n)}{1-\alpha}$.

Доказательство. Как и в лемме 2, мы начинаем с оценки для всех y:

$$|G_{n,X}(y) - G_{n,Y}(y)| \leqslant |G_{1,X}(y) - G_{1,Y}(y)| + \alpha\Delta_{n-1}(X,Y),$$

где $\Delta_{n-1}(X,Y)$ имеет вид

$$\left| \int_0^{\infty} f_{n-1,X}(h(s))dF_X(s) - \int_0^{\infty} f_{n-1,Y}(h(s))dF_Y(s) \right|$$

с $h(s) = (y + M - \min(s,a))$. Прибавляя и вычитая в выражении под знаком модуля

$$\int_0^{\infty} f_{n-1,X}(y + M - \min(s,a))\, dF_Y(s) = f_{n-1,X}(y+M) - \int_0^{a} f_{n-1,X}'(y + M - s)\bar{F}_Y(s)\, ds,$$

получим рекуррентное соотношение

$$\Delta_n \leqslant \Delta_1 + \alpha(\Delta_{n-1} + b_1\rho),$$

поскольку $|f'_{n-1,X}(y)| \leqslant b_1$ для любого y. Таким образом, желаемое утверждение очевидно. Теорема доказана.

2.3. Предельные теоремы. Последняя проблема, которую рассмотрим для этой модели, — предельное поведение капитала компании при стремлении горизонта планирования n к ∞. Пусть x — начальный капитал компании. Поскольку используется договор перестрахования с уровнем собственного удержания a на каждом шаге, удобно положить $X_k^{(a)} = \min(X_k, a)$, где X_k — размер требования в k-й период. Согласно теореме 1 оптимальная политика страховщика характеризуется последовательностью критических уровней y_n следующим образом. На первом шаге n-шагового процесса необходимо увеличить начальный капитал до уровня y_n, если $x \leqslant y_n$, и не брать заем иначе. Следовательно, если $Z_k^{(n)}$ — капитал компании на k-м шаге n-шагового процесса, то $Z_0^{(n)} = x$ и

$$Z_k^{(n)} = \begin{cases} y_{n+1-k} + M - X_k^{(a)}, & \text{если } Z_{k-1}^{(n)} \leqslant y_{n+1-k}; \\ Z_{k-1}^{(n)} + M - X_k^{(a)}, & \text{если } Z_{k-1}^{(n)} > y_{n+1-k}. \end{cases} \tag{2}$$

Начнем с доказательства усиленного закона больших чисел (УЗБЧ) для капитала компании.

Теорема 3. *Для $x > a - M$ с вероятностью единица*

$$\frac{Z_n^{(n)}}{n} \to \delta(a) = M - \mathsf{E}X^{(a)} \ \ \textit{при} \ \ n \to \infty.$$

Доказательство. Из (2) легко получить, что для $x > a - M$

$$Z_n^{(n)} = x + nM - \sum_{k=1}^{n} X_k^{(a)}. \tag{3}$$

Поэтому в силу УЗБЧ для последовательности н.о.р. случайных величин с конечным средним утверждение теоремы верно. Теорема доказана.

Представляет интерес следующее утверждение.

Следствие 2. *Вероятность разорения компании равна единице, если $\delta(a) \leqslant 0$.*

Теперь установим центральную предельную теорему (ЦПТ).

Теорема 4. *Для $x > a - M$ верно соотношение*

$$\frac{Z_n^{(n)} - \mathsf{E}Z_n^{(n)}}{\sqrt{\mathrm{Var} Z_n^{(n)}}} \xrightarrow{d} \mathcal{N} \ \ \textit{при} \ \ n \to \infty,$$

здесь $\xrightarrow{d}$ означает сходимость по распределению и $\mathcal{N}$ имеет стандартное нормальное распределение.

Доказательство. Утверждение легко вытекает из ЦПТ для н.о.р. случайных величин. Согласно формуле (3)

$$\frac{Z_n^{(n)} - \mathsf{E}Z_n^{(n)}}{\sqrt{\mathrm{Var} Z_n^{(n)}}} = -\frac{\sum_{k=1}^n X_k^{(a)} - \sum_{k=1}^n \mathsf{E}X_k^{(a)}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \mathrm{Var} X_k^{(a)}}}.$$

Поэтому для получения асимптотической нормальности используются свойства сходимости по распределению (см., например, [15, гл. 5]) и элементарные свойства гауссовских распределений. Теорема доказана.

Это означает, что нетрудно установить границы изменения капитала компании с вероятностью $1 - \varepsilon$ при малых $\varepsilon > 0$ и выбрать подходящие значения для уровня собственного удержания a и нагрузок безопасности β_i, $i = 1, 2$.

3. Дуальная модель. Предположим, что капитал (доход, резерв) $\{R_n, n \geqslant 0\}$ имеет вид

$$R_n = u - n + X_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

где $u \geqslant 0$ — начальный капитал, n — это выплаты фирмы за n периодов, т.е. расходы равны единице за каждый период (единичной длины), а $\{X_n, n \geqslant 0\}$ — суммарное поступление средств за n периодов (при этом $X_0 \equiv 0$). Такая модель может описывать компанию по страхованию жизни, занимающуюся аннуитетами (см., например, [16]), а также фармацевтическую, нефтяную или венчурную компанию, которая имеет постоянный поток расходов и случайные доходы $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$. Дуальная модель с дискретным временем рассматривалась в работе [17], где был найден явный вид вероятности разорения.

Дуальные модели с непрерывным временем изучались многими исследователями (см., например, [18] и ссылки в этой работе). Однако в основном они рассматривали проблемы выплаты дивидендов (см. статьи [19–23] и библиографию в них). Упомянем также статью [24], где исследовалась дуальная модель с налогами. Вероятность разорения за конечное время впервые была изучена в 1993 г. в статье [25], где получены явные выражения вероятности с использованием производящих функций. Составная биномиальная модель была исследована в работе [26] (см. там же ссылки).

Предположим, что капитал R_n в момент n имеет вид (4), где u — начальный капитал, $u \in \mathbb{N}$. Предполагается, что расходы за каждый период равны единице. Совокупный доход X_n до момента n имеет вид $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, $n \geqslant 1$. Здесь Y_i, $i \geqslant 1$, — н.о.р. целочисленные случайные величины с конечным средним $1 < E(Y_i) < \infty$, $F(x)$ — их функция распределения и $p_k = \mathsf{P}(Y_i = k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $i \geqslant 1$.

3.1. Разорение компании. Пусть T — время разорения компании для данной дискретной модели, т.е.

$$T = \inf\{n \geqslant 1 : R_n \leqslant 0\},$$

в то время как $T = \infty$, если $R_n > 0$ для всех $n \geqslant 1$. Из определения очевидно, что $T \geqslant u$.

Вероятность разорения за время t для компании с начальным капиталом u задается следующим образом:

$$\psi_F(u, t) = \mathsf{P}(T < t | R_0 = u) = \mathsf{P}_u(T < t).$$

Аналогично вероятность когда-нибудь разориться определяется как

$$\psi_F(u) = \lim_{t\to\infty} \psi_F(u, t).$$

Пусть далее $p(z)$ — производящая функция случайной величины Y, имеющей такое же распределение, как все Y_i, $i \geqslant 1$, тогда

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad z \in [0, 1].$$

Напомним, что F — функция распределения Y, и обозначим через z_F корень уравнения $p(z) - z = 0$ в промежутке $[0, 1)$ (если он существует).

Лемма 3. *Уравнение $p(z) - z = 0$ имеет единственное решение на полуинтервале* $[0, 1)$.

Доказательство. Положим $f(z) = p(z) - z$. Тогда из свойств производящей функции $p^{(k)}(0) = k!\mathsf{P}(Y = k)$, $p(1) = 1$, $p'(1) = \mathsf{E}Y$, немедленно вытекают соотношения

$$\begin{cases} f(0) = p_0 \geqslant 0, \\ f'(0) = p_1 - 1 \leqslant 0, \\ f(1) = 0, \\ f'(1) = E(Y) - 1 > 0, \\ f''(z) > 0 \text{ для всех } z \in [0, 1). \end{cases}$$

Отсюда следует, что существует корень $z = 1$ уравнения $f(z) = 0$. Более того, существует также второй корень $z = z_F$ и этот корень единственный в промежутке $[0, 1)$. Лемма доказана.

Теорема 5. *Вероятность разорения как функция начального капитала и имеет следующий вид:* $\psi_F(u) = z_F^u$.

Доказательство. Формула полной вероятности приводит к рекуррентному соотношению

$$\psi_F(u+1) = p_0\psi_F(u) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k\psi_F(u+k). \tag{5}$$

Нетрудно понять, что справедливы следующие граничные условия: $\psi_F(0) = 1$ и $\lim_{u\to\infty}\psi_F(u) = 0$. Будем искать вероятность разорения в виде $\psi_F(u) = cA^u$, где c и A — постоянные. Из граничных условий ясно, что $c = 1$ и $0 \leqslant A < 1$. Подставляя $\psi_F(u) = A^u$ в уравнение (5), получаем

$$A^{u+1} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k A^{u+k}. \tag{6}$$

Разделив обе части (6) на A^u, мы можем записать $A = p(A)$ или $f(A) = 0$. По лемме 3 в промежутке $[0, 1)$ существует единственный корень z_F уравнения $f(z) = 0$. Более того, ясно, что $A = z_F$. Теорема доказана.

3.2. Вероятность разорения и порядки распределений доходов. Далее мы предполагаем, что компания может выбирать случайные доходы. Другими словами, существуют две последовательности $\{Y_i\}_{i\geqslant 1}$ и $\{Z_i\}_{i\geqslant 1}$, такие, что их элементы упорядочены: $Y_i \prec Z_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$ (в смысле некоторого частичного порядка.)

Предположим, что все Y_i, $i \geqslant 1$, имеют распределение $p_k = \mathsf{P}(Y = k)$, $k \geqslant 0$, и F — функция распределения случайной величины Y. Вероятность разорения в этом случае обозначается $\psi_F(u)$. Точно так же Z_i, $i \geqslant 1$, имеют распределение $q_k = \mathsf{P}(Z = k)$ и случайная величина Z имеет функцию распределения G соответственно, вероятность разорения обозначается $\psi_G(u)$. Производящая функция Z обозначается $q(z)$, аналог соотношения $f(z) = 0$ — уравнение $q(z) - z = 0$.

С определениями различных порядков случайных величин (т.е. соответствующих функций распределения) и их свойствами можно ознакомиться, например, в книгах [12, 27] и статье [28].

Определение стохастического порядка. Случайная величина Y предшествует случайной величине Z в смысле стохастического порядка ($Y <_{\mathrm{st}} Z$) тогда и только тогда, когда $F(x) \geqslant G(x)$ для любого x, здесь $F(x)$ и $G(x)$ — соответственно функции распределения Y и Z.

Теорема 6. *Если* $Y <_{\mathrm{st}} Z$, *то* $z_F \geqslant z_G$ *и* $\psi_F(u) \geqslant \psi_G(u)$ *для любого* $u > 0$.

Доказательство. В силу стохастического порядка и вида функций распределения имеем

$$\begin{cases} p_0 \geqslant q_0, \\ p_0 + p_1 \geqslant q_0 + q_1, \\ p_0 + p_1 + p_2 \geqslant q_0 + q_1 + q_2, \\ \dots \end{cases}$$

Тогда $p(z_G) - z_G = p(z_G) - q(z_G)$ можно переписать следующим образом:

$$p_0 + p_1 z_G + p_2 z_G^2 + \ldots + p_n z_G^n + \ldots - q_0 - q_1 z_G - q_2 z_G^2 - \ldots - q_n z_G^n - \ldots =$$

$$= (p_0 - q_0) + (p_1 - q_1)z_G + \ldots + (p_n - q_n)z_G^n + \ldots.$$

Для того чтобы оценить знак этого выражения, продолжим преобразования:

$$(p_0 - q_0) + (p_1 - q_1)z_G + \ldots + (p_n - q_n)z_G^n + \ldots =$$

$$= (p_0 - q_0)(1 - z_G) + (p_0 + p_1 - q_0 - q_1)z_G + (p_2 - q_2)z_G^2 + \ldots + (p_n - q_n)z_G^n + \ldots =$$

$$= (p_0 - q_0)(1 - z_G) + (p_0 + p_1 - q_0 - q_1)z_G(1 - z_G) + (p_0 + p_1 + p_2 - q_0 - q_1 - q_2)z_G^2 + \ldots.$$

Продолжая далее преобразование и учитывая тот факт, что $Y_1 <_{st} Z_1$ и $0 < z_G < 1$, получаем $p(z_G) - z_G \geqslant 0$, так как каждое слагаемое неотрицательно. В силу монотонного убывания $\psi_F(u)$ на промежутке $[0, z_F)$ заключаем, что $z_F \geqslant z_G$ и $\psi_F(u) \geqslant \psi_G(u)$ для всех $u > 0$. Теорема доказана.

Определение выпуклого порядка. Пусть у случайных величин Y и Z одинаковые средние $\mathsf{E}Y = \mathsf{E}Z$. Величина Y тогда и только тогда предшествует Z в смысле выпуклого порядка ($Y <_{\mathrm{cx}} Z$), когда $\mathsf{E}[f(Y)] \leqslant \mathsf{E}[f(Z)]$ для всех выпуклых функций $f(x)$, для которых указанные средние существуют.

Теорема 7. *Если $Y <_{\mathrm{cx}} Z$, то $z_F \leqslant z_G$ и $\psi_F(u) \leqslant \psi_G(u)$ для любого $u > 0$.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$p(z_G) - z_G = \mathsf{E}[{z_G}^{Y_1}] - z_G = \mathsf{E}[{z_G}^{Y_1} - z_G] = E[f(Y_1)],$$

где $f(x) = {z_G}^x - z_G$. Функция $f(x)$ выпукла вниз, так как $f''(x) = (\ln z_G)^2 {z_G}^x \geqslant 0$. Значит, $p(z_G) - z_G = E[f(Y_1)] \leqslant E[f(Z_1)] = E[{z_G}^{Z_1}] - z_G = 0$. Следовательно, $z_F \leqslant z_G$ и $\psi_F(u) \leqslant \psi_G(u)$ для всех $u > 0$. Теорема доказана.

Определение порядка левого хвоста. Случайная величина Y предшествует Z в смысле порядка левого хвоста ($Y <_{\mathrm{ltail}} Z$) тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}[YI(-\infty; a](Y)] \leqslant \mathsf{E}[ZI(-\infty; a](Z)]$ для любого $a \in R$.

Теорема 8. *Пусть $Y <_{\mathrm{ltail}} Z$ и $p_0 \leqslant q_0$, а случайные величины принимают только конечное число значений $1, 2, \ldots, n$. Тогда $z_F \leqslant z_G$ и $\psi_F(u) \leqslant \psi_G(u)$ для любого $u > 0$.*

Доказательство. Пусть $Y_1 \leqslant_{\mathrm{ltail}} Z_1$ и $p_0 \leqslant q_0$. По условию имеем

$$\begin{cases} p_1 + 2p_2 \leqslant q_1 + 2q_2, \\ p_1 + 2p_2 + 3p_3 \leqslant q_1 + 2q_2 + 3q_3, \\ \ldots \\ \frac{1}{n}p_1 + \frac{2}{n}p_2 + \ldots + p_n \leqslant \frac{1}{n}q_1 + \frac{2}{n}q_2 + \ldots + q_n. \end{cases}$$

Получаем

$$p(z_G) - z_G = p_0 + p_1 z_G + p_2 z_G^2 + \ldots + p_n z_G^n - q_0 - q_1 z_G - q_2 z_G^2 - \ldots - q_n z_G^n =$$

$$= (p_0 - q_0) + (p_1 - q_1) z_G + (p_2 - q_2) z_G^2 + \ldots + (p_n - q_n) z_G^n =$$

$$= (p_0 - q_0) + (p_1 - q_1) z_G \left(1 - \frac{z_G}{2}\right) + \left(p_2 + \frac{p_1}{2} - q_2 - \frac{q_1}{2}\right) z_G^2 + (p_3 - q_3) z_G^3 + \ldots + (p_n - q_n) z_G^n =$$

$$= (p_0 - q_0) + (p_1 - q_1) z_G \left(1 - \frac{z_G}{2}\right) + \left(p_2 + \frac{p_1}{2} - q_2 - \frac{q_1}{2}\right) z_G^2 \left(1 - \frac{2z_G}{3}\right) +$$

$$+ \left(p_3 + \frac{2p_2}{3} + \frac{p_1}{3} - q_3 - \frac{2q_2}{3} - \frac{q_1}{3}\right) z_G^3 + \ldots + (p_n - q_n) z_G^n =$$

$$= (p_0 - q_0) + \ldots + \left(p_{n-1} + \frac{n-2}{n-1} p_{n-2} + \ldots + \frac{2}{n-1} p_2 + \frac{p_1}{n-1}\right) z_G^{(n-1)} + (p_n - q_n) z_G^n =$$

$$= (p_0 - q_0) + \ldots + \left(p_{n-1} + \frac{n-2}{n-1} p_{n-2} + \ldots + \frac{2}{n-1} p_2 + \frac{p_1}{n-1} - \right.$$

$$\left. - q_{n-1} - \frac{n-2}{n-1} q_{n-2} - \ldots - \frac{2}{n-1} q_2 - \frac{q_1}{n-1}\right) z_G^{(n-1)} \left(1 - z_G \frac{n-1}{n}\right) +$$

$$+ \left(p_n + \frac{n-1}{n} p_{n-1} + \ldots + \frac{2}{n} p_2 + \frac{p_1}{n} - q_n - \frac{n-1}{n} q_{n-1} - \ldots - \frac{2}{n} q_2 - \frac{p_1}{n}\right) z_G^n.$$

Все слагаемые неположительны, значит, $p(z_G) - z_G \leqslant 0$. Таким образом, $z_F \leqslant z_G$ и $\psi_F(u) \leqslant \psi_G(u)$ для всех $u > 0$. Теорема доказана.

x	$\mathsf{P}(Y=x)$	$\mathsf{P}(Z=x)$
0	0.06	0.04
1	0.04	0.06
2	0.2	0.2
3	0.3	0.3
4	0.4	0.4

Замечание. Если $p_0 > q_0$, то утверждение предыдущей теоремы неверно. Такой пример дают случайные величины Y и Z с распределениями, представленными в таблице.

Тогда $z_F = 0.06342453, z_G = 0.04297288$ и $z_F > z_G$. Отсюда немедленно вытекает, что $\psi_F(u) > \psi_G(u)$. Искомый пример построен.

Определение порядка правого хвоста. Случайная величина Y предшествует Z в смысле порядка правого хвоста ($Y <_{\text{rtail}} Z$) тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}[YI[a;+\infty)(Y)] \leqslant \mathsf{E}[ZI[a;+\infty)(Z)]$ для любого $a \in R$.

Теорема 9. *Пусть $Y <_{\text{rtail}} Z$ и $\mathsf{E}Y + p_0 \geqslant \mathsf{E}Z + q_0$, а случайные величины принимают только конечное число значений $1, 2, \ldots, n$. Тогда $z_F \geqslant z_G$ и $\psi_F(u) \geqslant \psi_G(u)$ для любого $u > 0$.*

Доказательство. По условию имеем

$$\begin{cases} p_n \leqslant q_n, \\ (n-1)p_{n-1} + np_n \leqslant (n-1)q_{n-1} + nq_n, \\ \ldots \\ p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n \leqslant q_1 + 2q_2 + \ldots + nq_n. \end{cases}$$

Найдем знак следующего выражения:

$$p(z_G) - z_G = (p_n - q_n)z_G^n + (p_{n-1} - q_{n-1})z_G^{(n-1)} + \ldots + (p_0 - q_0) =$$
$$= (p_n - q_n)z_G^{(n-1)}\left(z_G - \frac{n}{n-1}\right) + \left(\frac{n}{n-1}p_n + p_{n-1} - \frac{n}{n-1}q_n - q_{n-1})z_G^{(n-1)} + \ldots + (p_0 - q_0)\right) =$$
$$= (p_n - q_n)z_G^{(n-1)}\left(z_G - \frac{n}{n-1}\right) + \left(\frac{n}{n-1}p_n + p_{n-1} - \frac{n}{n-1}q_n - q_{n-1}\right)z_G^{(n-2)}\left(z_G - \frac{n-1}{n-2}\right) +$$
$$+ \left(p_{n-2} + \frac{n-1}{n-2}p_{n-1} + \frac{n}{n-2}p_n - q_{n-2} - \frac{n-1}{n-2}q_{n-1} - \frac{n}{n-2}q_n\right)z_G^{(n-2)} + \ldots + (p_0 - q_0) =$$
$$= (p_n - q_n)z_G^{(n-1)}\left(z_G - \frac{n}{n-1}\right) + \ldots + \left(p_2 + \frac{3}{2}p_3 + \ldots + \frac{n}{2}p_n - q_2 - \frac{3}{2}q_3 - \ldots - \frac{n}{2}q_n\right)z_G(z_G - 1) +$$
$$+ (p_1 + \ldots + np_n - q_1 - \ldots - nq_n)(z_G - 1) + (\mathsf{E}Y_1 + p_0 - \mathsf{E}Z_1 - q_0).$$

Используя тот факт, что $z_G \in [0, 1)$, получаем, что все слагаемые положительны. Значит, $p(z_G) - z_G \geqslant 0$, а это в свою очередь означает, что $z_F \geqslant z_G$ и $\psi_F(u) \geqslant \psi_G(u)$ для любого $u > 0$. Теорема доказана.

В заключение рассмотрим **дуальную модель сострахования**. Это означает, что компания участвует в проекте вместе с другими компаниями, выплачивая долю θ расходов и получая такую же долю дохода. Следовательно, капитал компании описывается соотношением

$$\tilde{R}_n = u - \theta n + \theta X_n,\ n \in \mathbb{N},$$

где X_n имеет тот же вид, что и в (4).

Теорема 10. *Вероятность разорения компании $\tilde{\psi}_F(u)$ равна $\psi_F^{1/\theta}(u)$, где функция $\psi_F(u)$ получена в теореме 5.*

Доказательство. В силу сделанных предположений вероятность разорения имеет вид

$$\tilde{\psi}_F(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}_u(T = k),$$

где $T = \inf\{n \in \mathbb{N} : \tilde{R}_n \leqslant 0\}$ — время разорения. Очевидно, верно соотношение

$$\tilde{\psi}_F(u + \theta) = p_0\tilde{\psi}_F(u) + \sum_{k=1}^{\infty} p_i\tilde{\psi}_F(u + k\theta) \tag{7}$$

с ограничениями $\tilde{\psi}_F(0) = 1$ и $\lim_{u\to\infty} \tilde{\psi}_F(u) = 0$.

Ищем решение в виде $\tilde{\psi}_F(u) = cA^u$, где c и A — некоторые константы. Используя граничные условия, получим $c = 1$ и $0 \leqslant A < 1$. Подстановка в (7) дает

$$A^{u+\theta} = p_0 A^u + \sum_{k=1}^{\infty} p_k A^{u+k\theta}.$$

Положив $B = A^\theta$ и поделив на A^u, приходим к уравнению $B = p(B)$. Решение такого уравнения уже изучалось и равно z_F. Поэтому получаем $A = z_F^{1/\theta}$, $\tilde{\psi}_F(u) = \psi_F^{1/\theta}(u)$. Тем самым мы нашли вероятность разорения компании, участвующей в проекте в определенной доле θ. Теорема доказана.

4. Заключение и направления будущих исследований. В работе исследованы две модели с дискретным временем и периодическим принятием решений. Первая описывает функционирование страховой компании, использующей на каждом шаге непропорциональное перестрахование и банковские займы. Страховые выплаты задавались последовательностью независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин с известной функцией распределения. Премии подсчитывались с помощью принципа среднего. Использовался стоимостной подход, т.е. необходимо было выбрать так стратегию заимствования, чтобы минимизировать дополнительные расходы, обусловленные займами. В предположении, что договор перестрахования с течением времени не меняется, было установлено, что оптимальное заимствование характеризуется возрастающей последовательностью критических уровней. Было бы интересно рассмотреть возможность выбора договора перестрахования, а также случай неизвестного распределения страховых выплат. Кроме того, можно использовать надежностный подход, т.е. изучать вероятность разорения или распределение времени безотказной работы. В настоящей работе была доказана устойчивость модели с использованием метрики Канторовича, возможно рассмотрение и других метрик.

Вторая модель дуальная, т.е. компания несет постоянные (единичные) расходы в каждый из периодов, при этом получаемые доходы случайны. Считаем, что последовательность получаемых доходов состоит из независимых неотрицательных целочисленных случайных величин. Показано, что вероятность разорения компании задается в виде A^u, где u — начальный капитал, константа A — корень уравнения $p(z) - z = 0$, а $p(z)$ — производящая функция дохода за один период. Затем предполагается, что есть две последовательности доходов, которые могут сравниваться с помощью одного из четырех порядков (стохастического, выпуклого, порядка левого или правого хвоста), и устанавливается, как при этом упорядочены вероятности разорения. Интересно было бы рассмотреть и другие порядки на классе распределений, а также исследовать предельное поведение капитала компании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bulinskaya E.V.* New research directions in modern actuarial sciences // Modern Problems of Stochastic Analysis and Statistics — Selected Contributions in Honor of Valentin Konakov / Ed. by V. Panov. Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer, 2017. 349–408.
2. *Ehrgott M.* Multicriteria Optimization. Second ed. Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer, 2005.
3. *Luesamai A.* Lower and upper bounds of the ultimate ruin probability in a discrete time risk model with proportional reinsurance and investment // J. Risk Management and Insurance. 2021. **25**, N 1. 1–10.
4. *Bata K., Shmidli H.* Optimal capital injections and dividends with tax in a risk model in discrete time // Eur. Actuar. J. 2020. **10**. 235–259.
5. *Bulinskaya E.* Asymptotic analysis and optimization of some insurance models // Appl. Stochast. Models in Business and Industry. 2018. **34**, N 6. 762–773.
6. *Bulinskaya E.* Asymptotic analysis of insurance models with bank loans // New Perspectives on Stochastic Modeling and Data Analysis / Ed. by J.-R. Bozeman, V. Girardin, Ch. Skiadas. Athens, Greece: ISAST, 2014. 255–270.
7. *Bulinskaya E., Gusak J.* Optimal control and sensitivity analysis for two risk models // Communs Statistics — Simulation and Computation. 2016. **45**, N 5. 1451–1466.
8. *Bulinskaya E., Gusak J., Muromskaya A.* Discrete-time insurance model with capital injections and reinsurance // Methodol. and Comput. Appl. Probab. 2015. **17**. 899–914.
9. *Gerber H.-U.* Mathematical fun with compound binomial process // ASTIN Bull. 1988. **18**, N 2. 161–168.

10. *Li S., Lu Y., Garrido J.* A review of discrete-time risk models // Rev. Real Acad. Ciencias Naturales. Ser. A. Matemáticas. 2009. **103**. 321–337.
11. *Dickson D.-C.-M., Waters H.-R.* Some optimal dividends problems // ASTIN Bull. 2004. **34**. 49–74.
12. *Булинская Е.В.* Теория риска и перестрахование. М.: ООО "Мэйлор", 2008.
13. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.
14. *Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F.* A probability metrics approach to financial risk measures. Oxford, UK: John Wiley & Sons, 2011.
15. *Billingsley P.* Convergence of probability measures. 2nd ed. N.Y.: Wiley, 1999.
16. *Cramer H.* Collective risk theory: A survey of the theory from the point of view of the theory of stochastic process. Stockholm: Ab Nordiska Bokhandeln, 1955.
17. *Palmowski Z., Ramsden L., Papaioannou A.D.* Parisian ruin for the dual risk process in discrete-time // arXiv:1708. 06785v1 [math.PR] 19 Aug 2017.
18. *Fahim A., Zhu Li.* Optimal investment in a dual risk model // arXiv:1510. 04924v2 [q-fin.RM] 2 Feb 2023.
19. *Avanzi B., Gerber H.U., Shiu E.S.* Optimal dividends in the dual model // Insurance: Mathematics and Economics. 2007. **41**, N 1. 111–123.
20. *Bergel A.I., Rodrigues-Martinez E.V., Egidio dos Reis A.D.* On dividends in the phase-type dual risk model // Scand. Actuar. J. 2017. **2017**. 1–24.
21. *Cheung E.C., Drekic S.* Dividend moments in the dual risk model: exact and approximate approaches // ASTIN Bull. 2008. **38**, N 2. 399–422.
22. *Ng A.C.* On a dual model with a dividend threshold // Insurance: Mathematics and Economics. 2009. **44**, N 2. 315–324.
23. *Bulinskaya E.V.* New dividend strategies // Applied Modeling Techniques and Data Analysis 2. London: Willey, 2021. 39–52.
24. *Albrecher H., Badescu A., Landriault D.* On the dual risk model with tax payment // Insurance: Mathematics and Economics. 2008. **42**, N 3. 1086–1094.
25. *Willmot G.E.* Ruin probabilities in the compound binomial model // Insurance: Mathematics and Economics. 1993. **12**, N 2. 133–142.
26. *Li S., Sendova K.P.* The finite-time ruin probability under the compound binomial risk model // Eur. Actuar. J. 2013. **3**, N 1. 249–271.
27. *Shaked M., Shantikumar J.G.* Stochastic orders. Springer Series Statistics. N.Y.: Springer, 2007.
28. *Mulero J., Sordo M.A.* Two stochastic dominance criteria based on tail comparisons // Appl. Stochast. Models in Business and Industry. 2017. **33**, N 6. 575–589.

Поступила в редакцию
07.06.2023

УДК 510.649

НОРМАЛИЗАЦИЯ ТЕРМОВ В ТОЧНЫХ МОДЕЛЯХ ЛОГИКИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ LP

В. Н. Крупский[1]

Базисная модель логики свидетельств является точной, если конструкторы свидетельских термов $\cdot, +, !$ в модели интерпретируются в точности в соответствии с их неформальным пониманием как применение правила *modus ponens*, объединение и верификация свидетельств. В статье строится пример точной базисной модели для логики доказательств LP и доказывается, что в точных моделях LP каждый терм эквивалентен некоторому полиному доказательств.

Ключевые слова: эпистемическая логика, логика доказательств, базисная модель логики свидетельств, свойство точности, полином доказательств.

A basic justification model is sharp when the evidence term constructors $\cdot, +, !$ in it mean exactly the application of *modus ponens* rule, the union and the verification of evidences. We

[1] *Крупский Владимир Николаевич* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математической логики и теории алгоритмов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vladimir.krupski@math.msu.ru.

Krupski Vladimir Nikolaevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms.