11. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.: ОНТИ. Гл. ред. техн.-теор. лит-ры, 1937.
12. *Ветохин А.Н.* Класс Бэра полунепрерывных снизу минорант показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2019. **34**, № 10. 1313–1317.

Поступила в редакцию
24.05.2023

УДК 519.21

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ТОЧЕЧНЫХ ПРОЦЕССОВ ВЫХОДОВ ЗА ВЫСОКИЕ УРОВНИ ГАУССОВСКОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В. И. Питербарг[1]

Изучается асимптотическое поведение точечных процессов выходов гауссовской стационарной последовательности за уровень, стремящийся к бесконечности медленнее, чем в пуассоновской предельной теореме для числа выходов. Доказана сходимость по вариации таких точечных процессов к маркированному пуассоновскому процессу. Применяются результаты Ю. В. Прохорова о наилучшем приближении распределения Бернулли смесью гауссовского и пуассоновского распределений. Эта задача поставлена А. Н. Колмогоровым в начале 50-х годов прошлого века.

Ключевые слова: гауссовская последовательность, большие выбросы, пуассоновская предельная теорема, сходимость по вариации.

We study the asymptotic behavior of point processes of exits of a Gaussian stationary sequence beyond a level tending to infinity more slowly than in the Poisson limit theorem for the number of exits. Convergence in variation of such point processes to a marked Poisson process is proved. The results of Yu. V. Prokhorov on the best approximation of the Bernoulli distribution by a mixture of Gaussian and Poisson distributions are applied. A. N. Kolmogorov proposed this problem in the early 1950s.

Key words: Gaussian sequence, large excursions, Poisson limit theorem, convergence in variation.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-6-5

1. Введение. Рассмотрим гауссовскую стационарную последовательность $X(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, с нулевым средним $EX(k) = 0$ и единичной дисперсией $\operatorname{Var} X(k) = 1$. Обозначим $\operatorname{Cov}(X(0), X(k)) = EX(k)X(0) = r(k)$. Пусть $\mathcal{B}$ — σ-алгебра ограниченных борелевских множеств на прямой $\mathbb{R}$. Введем на $\mathcal{B}$ точечный процесс

$$\eta_u(B) := \sum_{k \in nB} \mathbf{I}\left\{X(k) > u\right\}, \quad B \in \mathcal{B}, \tag{1}$$

где последовательность натуральных чисел $n = n(u)$ стремится к бесконечности с ростом уровня u. Мы рассматриваем предельное поведение процесса $\eta_u(\cdot)$ при различных скоростях роста этого уровня к бесконечности. Известно, что при достаточно быстром убывании корреляции $r(k)$ к нулю на бесконечности процесс $\eta_u(\cdot)$ слабо сходится в естественной нормировке к пуассоновскому. *Естественная нормировка* — это

$$n = n(u) = \frac{\lambda}{P(X(1) > u)}, \ \lambda > 0,$$

[1] *Питербарг Владимир Ильич* — доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ; e-mail: piter@mech.math.msu.su.

Piterbarg Vladimir Ilich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Probability Theory.

т.е. среднее число точек в множестве nB асимптотически постоянно. В случае независимых $X(k)$ это, по сути, классическая теорема Пуассона для бернуллиевской последовательности $\eta_u([0,1])$. Поскольку для гауссовской стандартной функции распределения Φ выполнено

$$\Psi(u) \geqslant p(u) := 1-\Phi(u) \geqslant (1-u^{-2})\Psi(u), \quad u>0, \text{ где } \Psi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}u}e^{-u^2/2}, \tag{2}$$

удобнее использовать эквивалентную нормировку $n(u) = \lambda/\Psi(u)$, что в свою очередь эквивалентно соотношению

$$u = u_n = \sqrt{2\log n} - \frac{\frac{1}{2}\log\log n + \log(\lambda\sqrt{\pi/2})}{\sqrt{2\log n}} + O(1/\log n), \ n \to \infty \tag{3}$$

(см., например, [1]). Нетрудно проверить, что это соотношение остается в силе и при $np(u_n) \to \infty$ вместе с $n \to \infty$ и $u_n \to \infty$, т.е. при $\lambda \to \infty$. В работе [2], по сути, утверждается следующее.

Теорема 1. *Пусть для ковариационной функции $r(k)$ последовательности $X(k)$ выполнено соотношение*

$$r(k)\log k \to 0 \ \text{при} \ k \to \infty.$$

Если для последовательности точечных процессов $\eta_u(B)$, $B \in \mathcal{B}$, $n = 1, 2, \ldots$, последовательность уровней $u = u_n$ удовлетворяет соотношению (3)*, то при $u \to \infty$ имеет место слабая сходимость*

$$\eta_u(B) \Rightarrow \Pi_\lambda(B), \tag{4}$$

где $\Pi_\lambda(B)$, $B \in \mathcal{B}$, — пуассоновский точечный процесс с интенсивностью λ.

На самом деле Й. Миттал и Д. Илвисакер доказали предельную теорему для максимума гауссовской стационарной последовательности, однако теорема 1 очевидно отсюда следует в силу теоремы Калленберга о сходимости точечных процессов (детали см. в [1] или [3]). В этих монографиях также приводятся необходимые и достаточные условия на $r(k)$ для выполнения соотношения (4). В настоящей работе рассматривается задача об описании предельного поведения точечного процесса $\eta_u(B)$, когда уровень u по-прежнему стремится к бесконечности вместе с n, но медленнее, чем в соотношении (4). Основываясь на теоремах Ю. В. Прохорова [4] о приближении распределения Бернулли в зависимости от поведения его параметров, мы рассмотрим сначала предельное поведение последовательности $\eta_u([0,1])$ при различных соотношениях между n и $u = u(n)$ при $n, u \to \infty$. В случае независимых $X(k)$ нами дана фактически переформулировка соответствующей теоремы Ю. В. Прохорова в терминах сходимости маркированных точечных процессов. Это возможно, поскольку теоремы Ю. В. Прохорова дают оценки скорости сходимости в метрике ℓ_1 (определение сходимости дано ниже соотношением (5)) к пуассоновскому, нормальному или вырожденному распределению для любых соотношений между u и n при их стремлении к бесконечности. Как и в [4], в модели (1) мы рассматриваем различные соотношения стремления u и n к бесконечности, при этом, если u растет медленнее стандартной (3), его интенсивность стремится к бесконечности. В связи с этим при помощи операции прореживания (см. ниже) мы представляем процесс $\eta_u(\cdot)$ и предельный пуассоновский в виде маркированных точечных процессов, в которых марки (кластеры) также являются точечными процессами. Основной результат работы — теорема 4, доказательство которой основано на теореме Прохорова с последующим применением техники сравнения гауссовских распределений и которая представляет собой теорему о сходимости к маркированному точечному процессу. Марки предельного процесса являются независимыми пуассоновскими процессами. В заключительных замечаниях к работе рассматриваются дальнейшие возможные шаги в этом направлении и возможные применения.

2. Последовательность с некоррелированными значениями [4]. В 1953 г. Ю. В. Прохоров, развивая результаты П. А. Козуляева 1939 г. [5], опубликовал статью о соотношении качества аппроксимации биномиального распределения $B(n,p)$ пуассоновским и нормальным для различных поведений вероятности успеха при росте числа испытаний [4]. Как указано в этой статье, задача о выборе оптимального предельного распределения, т.е. пуассоновского или нормального, была предложена А. Н. Колмогоровым в руководимом им семинаре. В то время как в [5] доказано, что пределом $B(n,p)$ при $np \to \infty$ может быть только пуассоновское, нормальное или же вырожденное распределение, Ю. В. Прохоров установил, что если $np \to \infty$, то и пуассоновское, и нормальное распределения аппроксимируют $B(n,p)$, но с разной степенью точности.

В этом пункте теорема Ю. В. Прохорова о сходимости к пуассоновскому распределению практически повторяется в терминах изучаемой модели. Рассматриваются большие значения уровня u, т.е. вероятность $p(u)$ мала. В [4] рассмотрен также случай $u < 0$, т.е. аппроксимация числа событий $\{X(k) > u\}$, $u < 0$, $k = 0, \ldots, n$. В силу симметрии гауссовского распределения этот случай очевиден и здесь не рассматривается. Для $p = p(u)$ (см. (2)) обозначим

$$B(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},\ q = 1-p,\quad \Pi(k) = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np},\ k = 0, \ldots, n,$$

и введем *метрику ℓ_1 соотношением*

$$\rho_1(u,n) = \sum_{k=0}^{n} |B(k) - \Pi(k)|. \tag{5}$$

Теорема 2 [4, теорема 2]. *Пусть $r(k) = 0$ для всех $k > 0$. Тогда*

$$\rho_1(u,n) = \lambda_1 p(u) + p(u) O\left(\min(1, (np(u))^{-1/2}\right),\ np \to \infty,$$

где

$$\lambda_1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi e}} = 0.483\ldots\ .$$

Из теоремы 2 следует, что для любого множества $B \in \mathcal{B}$ и любой нормировки n распределение величины $\eta_u(B)$ может быть аппроксимировано пуассоновским при $n, u \to \infty$, даже если $np(u) \to \infty$.

Пример. Степенная шкала. Пусть для некоторых неотрицательного a и положительного c выполнено соотношение $p(u)n^a \to c$. Тогда при $a = 1$ имеет место пуассоновская предельная теорема даже для зависимых $X(k)$ — это теорема 1. Беря в соотношении (3) n^a вместо n, $a > 0$, получаем соотношение

$$u = u(a) = \sqrt{2a \log n} - \frac{\frac{1}{2}\log\log n + \log(c\sqrt{a\pi/2})}{\sqrt{2a\log n}} + O(1/\log n),\ n \to \infty.$$

Ниже увидим, что теперь c — не обязательно интенсивность.

Заметим, что из других теорем статьи Ю. В. Прохорова [4] следует, что пуассоновская аппроксимация предпочтительней для уровней с $a > 1/3$, в то время как для $a < 1/3$ — нормальная. При этом обе аппроксимации возможны. Далее будут описаны предельные точечные процессы, соответствующие уровням $u(a)$ и основанные на пуассоновской аппроксимации. Заметим, что, если $a \in (0,1)$, интенсивность предельного процесса равна бесконечности.

2.1. Прореживание и кластеры. Рассмотрим пуассоновскую аппроксимацию точечного процесса $\eta_u(B)$, $B \in \mathcal{B}$, при $np \to \infty$, при этом $n \to \infty$ и $p \to 0$. Продолжаем считать, что $r(k) = 0$ для всех $k > 0$. Очевидным, но важным для нас следствием теоремы 2 является равномерная оценка этой аппроксимации.

Следствие 1. *Пусть $r(k) = 0$ для всех $k > 0$. Существует константа C, такая, что для произвольного множества $B \in \mathcal{B}$ имеет место оценка*

$$\rho_1(u,n,B) := \sum_{k \in nB}^{n} |B(k) - \Pi(k)| \leqslant Cp(u).$$

Действительно, величина $O\left(\min(1, (np(u))^{-1/2}\right)$ в теореме 2 не превосходит константы.

Поскольку интенсивность точечного процесса η_u может стремиться к бесконечности, представим его и соответствующий пуассоновский точечный процесс в удобном виде. Выделим из η_u точечный процесс $\eta_u^l(B)$, $B \in \mathcal{B}$, *l-точек:*

$$k \in \eta_u^l(\cdot) \subseteq \eta_u(\cdot) : \max_{i=1,\ldots,l} X(k-i) \leqslant u, X(k) > u.$$

То есть перед выходом за уровень u в течение времени l выходов не было. В непрерывном времени для процессов с недифференцируемыми траекториями — это естественный путь выделения пересечений [1, 3].

Положим l зависимым от n, $l = l(n)$, так, чтобы для некоторого $\lambda \in (0, \infty)$ выполнялось соотношение

$$n(1-p)^{l(n)}p = \lambda + o(1),\ n \to \infty, p \to 0. \tag{6}$$

В силу пуассоновской предельной теоремы для любого непустого множества $B \in \mathcal{B}$ распределение числа $l(n)$-точек в nB, где

$$n = n(u) = \frac{\lambda}{(1-p)^{l(n)}p},$$

стремится к пуассоновскому с параметром $\lambda|B|$ ($|B|$ — мера (длина) B). Логарифмируя (6) и используя разложение Тейлора при $p \to 0$, получаем

$$l(n) = \frac{\log np - \log(\lambda + o(1))}{p + o(p)} = p^{-1}\log(np/\lambda)(1 + o(1)), \quad n \to \infty, p \to 0. \tag{7}$$

2.2. Сходимость к маркированному пуассоновскому процессу. Рассмотрим предельное поведение введенного выше $l(n)$-прореженного точечного процесса

$$\eta_u^{l(n)}(B) = \sum_{k \in nB} \mathbf{I}\left\{\max_{i=1,\dots,l(n)} X(k-i) \leqslant u, X(k) > u\right\},\ B \in \mathcal{B}.$$

Аналогично доказательству теоремы 1 нетрудно показать, что он слабо сходится при $u \to \infty$ к пуассоновскому точечному процессу с интенсивностью λ. Однако из следствия 1 теоремы 2 следует сходимость по вариации [6]. Имея в виду (7), обозначим $n_1 := l(n)/\log np$, так что $pn_1 \to 1$ при $n \to \infty$, и сопоставим каждой точке k точечного процесса $\eta_u^{l(n)}(\cdot)$ точечный процесс

$$\zeta_u^k(B) = \sum_{j \in n_1 B} \mathbf{I}\left\{X(k+j) > u\right\},\ B \in \mathcal{B}.$$

Образно говоря, мы рассматриваем под лупой точки процесса $\eta_u(B)$, расположенные между соседними $l(n)$-точками, скажем $l(n)$-*пачки.*

Таким образом, на алгебре $\mathcal{B} \times \mathcal{B}^\infty$ введен маркированный точечный процесс

$$\Xi_u^n(\boldsymbol{B}) = \sum_{k \in nB}\left\{\mathbf{I}\left\{\max_{i=1,\dots,l(n)} X(k-i) \leqslant u, X(k) > u\right\}\sum_{j \in n_1 B_k}\mathbf{I}\left\{X(k+j) > u\right\}\right\}, \tag{8}$$

где обозначено $\boldsymbol{B} := (B, \times_{k \in \mathbb{Z}_+} B_k) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}^\infty$.

(Определение маркированного точечного процесса см. в [7, гл. 3].) Поскольку величины $X(k)$ независимы, следующее утверждение является, по сути, переформулировкой теоремы 2: изменится только нумерация счетного числа событий в сумме (5). Заметим при этом, что алгебра $\mathcal{B} \times \mathcal{B}^\infty$ является представлением алгебры $\mathcal{B}$, адаптированным к операции кластеризации.

Теорема 3. *Маркированный точечный процесс* $\Xi_u^n(\boldsymbol{B})$, $\boldsymbol{B} \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}^\infty$, *сходится в метрике* ℓ_1 (см. (5)) *к маркированному пуассоновскому процессу*

$$\Pi_\lambda(\boldsymbol{B}) = \sum_{k \in \pi_\lambda(B)} \pi_1^k(B_k),\ \boldsymbol{B} \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}^\infty. \tag{9}$$

Пуассоновский процесс $\pi_\lambda(\cdot)$ *на* $\mathcal{B}$ *с интенсивностью* λ *и пуассоновские процессы ("марки")* $\pi_1^k(\cdot)$ *на* $\mathcal{B}^k$, $k = 1, 2, \dots,$ *с интенсивностями* 1, $k = 1, 2, \dots,$ *независимы в совокупности.*

Рассмотрим степенную шкалу. Из соотношения (7) следует, что

$$l(n) = \frac{(a-1)\log(cn/(\lambda + o(1)))}{\log(1 - p(u_n^a))} = \frac{1-a}{c}n^a \log\frac{cn}{\lambda}\left(1 + o\left(\frac{1}{\log n}\right)\right),\ n \to \infty.$$

В этой шкале $l(n) = 0$ при $a = 1$. Кроме того, интенсивность λ растет до бесконечности, если l убывает к нулю, что вполне естественно.

3. Общая гауссовская последовательность. Для перехода к общему случаю последовательности $X(k)$ с ненулевой корреляцией применим технику сравнения гауссовских распределений [1, 3, 8]. Для последовательности действительных чисел x_k, $k \in \mathbb{Z}$, обозначим через $\mathcal{A}_u$ алгебру множеств, порожденную множествами $\{x_k > u\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Обозначим для краткости $\mathbf{X} = \{X(k), k = 1, \ldots, n\}$ и $\mathbf{X}_0 = \{X_0(k), k = 1, \ldots, n\}$, где $X_0(k)$ — последовательность гауссовских стандартных независимых величин. Основным инструментом перехода к общему случаю является следующая оценка близости по вариации вероятностных мер на $\mathcal{A}_u$, соответствующих последовательностям $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}_0$ [1, следствие 2.3.2].

Утверждение 1. *Пусть $|r(k)| < 1$, $k = 1, \ldots, n$. Для любого u имеет место неравенство*

$$\sup_{A \in \mathcal{A}_u} |P(\mathbf{X} \in A) - P(\mathbf{X}_0 \in A)| \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)|r(k)|}{\sqrt{1 - r^2(k)}} \exp\left(-\frac{u^2}{1 + r(k)}\right). \tag{10}$$

Заметим, что для каждого элементарного события $\omega \in \Omega$ множества $\{\eta_u(B) \in K\}$, $nB \subseteq (0, n+1)$, $K \subseteq \mathbb{Z}_0$, содержатся в $\mathcal{A}_u$. Поэтому стремление к нулю правой части неравенства (10) означает сближение по вариации точечных процессов $\eta_u(\cdot)$, построенных по последовательности $X(k)$ и по рассмотренной в предыдущем пункте последовательности с некоррелированными значениями.

Отметим также, что сходимость в норме ℓ_1 из этого неравенства, вообще говоря, не следует. Проблема такой сходимости требует отдельного рассмотрения.

Выясним, при каких соотношениях u и n правая часть (10) стремится к нулю, но при этом $np \to \infty$. Так как случай $np \to 0$ здесь не рассматривается, то, если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $\inf_{n,p} np \geqslant \varepsilon$, из соотношения (3) следует, что

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{u}{\sqrt{2 \log n}} \leqslant 1.$$

Обозначим $\rho(k) := \sup_{l \geqslant k} |r(l)|$.

Лемма. *Пусть выполнены соотношения*

$$r(k) k^{1 - \rho(1)} \to 0, \ \ k \to \infty, \tag{11}$$

и

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{u}{\sqrt{2 \log n}} > \sqrt{1 - \rho(1)}. \tag{12}$$

Тогда правая часть в (10) *стремится к нулю при $n \to \infty$.*

Доказательство. Из условия (11) следует неравенство $\rho(1) < 1$. Поэтому неравенство (10) применимо. Обозначим для краткости $\gamma := 1 - \rho(1)$. Возьмем произвольное $\alpha \in (0, \gamma)$ и разобьем сумму в (10) на две: до $[n^\alpha]$ и после $[n^\alpha] + 1$, обозначим их Σ_1 и Σ_2 соответственно. Очевидно, что

$$\Sigma_1 < n n^\alpha \rho(1) \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2(1)}} \exp\left(-\frac{u^2}{1 + \rho(1)}\right).$$

Логарифмируя, убеждаемся, что правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$, если

$$u^2 - (1 + \rho(1))(1 + \alpha) \log n \ \to \infty$$

при $n \to \infty$. Поскольку $1 + \alpha < 1 + \gamma = \rho(1) < 1$, то $\Sigma_1 \to 0$ при $n \to \infty$, если

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{u}{\sqrt{2 \log n}} > \sqrt{\frac{1 + \rho(1)}{2}}.$$

Далее,

$$\Sigma_2 \leqslant \frac{n}{\sqrt{1 - \rho^2(1)}} \sum_{k=[n^\alpha]+1}^{n} |r(k)| \exp\left(-\frac{u^2}{1 + |r(k)|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{\sqrt{1-\rho^2(1)}} \exp\left(-\frac{u^2}{1+\rho([n^\alpha])}\right) \sum_{k=[n^\alpha]+1}^{n} |r(k)|.$$

Пользуясь условием (11) и суммируя величины k^γ, получаем, что для любого произвольно малого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших n сумма в правой части этой цепочки не превосходит $\varepsilon n^{2-\gamma}$. Отсюда заключаем, что

$$\Sigma_2 \leqslant \frac{\varepsilon n^{2-\gamma}}{\sqrt{1-\rho^2(1)}} \exp\left(-\frac{u^2}{1+\rho([n^\alpha])}\right)$$

для тех же ε и n. Логарифмируя, получаем, что, поскольку ε можно брать произвольно малым, Σ_2 стремится к нулю тогда и только тогда, когда

$$\frac{u^2}{1+n^{-\alpha\gamma}} - (2-\gamma)\log n \to \infty \quad \text{при } n \to \infty.$$

А это эквивалентно неравенству

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{u}{\sqrt{(2-\gamma)\log n}} > 1.$$

Осталось только вспомнить, что $2-\gamma = 1+\rho(1)$. Лемма доказана.

Из этой леммы, утверждения 1, теоремы 3 и следствия 1 вытекает основное утверждение настоящей работы.

Теорема 4. *Пусть для ковариационной функции гауссовской стационарной последовательности* $X(k)$ *выполнено соотношение* (11). *Пусть натуральное* n *и уровень* u *оба стремятся к бесконечности так, что* $nP(X(1) > u) \to \infty$, *при этом выполнено неравенство* (12). *Тогда маркированный точечный процесс* (8) *сходится по вариации к пуассоновскому маркированному процессу* (9). *Сходимость не медленнее чем* $\max\{p(u), \gamma(u,n)\}$, *где через* $\gamma(u,n)$ *обозначена правая часть неравенства* (10).

4. Замечания. *4.1. Броуновские марки.* Если для каких-либо целей потребуется нормировка $l(n)$-пачек (марок) $\zeta_u^k(\cdot)$, которые "сгущаются", т.е. их интенсивность стремится к бесконечности: $pn_1 \to \infty$, то на основе другой теоремы Ю. В. Прохорова [4, теорема 3] можно по этой же схеме доказать сходимость к пуассоновскому маркированному точечному процессу, марки которого — независимые броуновские движения, а также выбрать преимущественное приближение — броуновское или пуассоновское [4, теорема 1].

4.2. Модель Дерриды случайной энергии [9, 10]. Классическая модель случайной энергии Дерриды — это сумма

$$S_N(\beta) := \sum_{k=1}^{[2^N]} e^{\beta\sqrt{N}X(k)}, \ \beta > 0,$$

где $X(k)$ — независимые случайные величины. Стандартные задачи для этой модели — исследование предельного поведения средней энергии $S_N(\beta)/N$ при $N \to \infty$ в зависимости от β и предельного поведения распределения нормированной $S_N(\beta)$. Часто при этом основную роль играют большие значения величин $X(k)$, как в асимптотическом методе Лапласа, поэтому результаты настоящей работы могут найти здесь применение. Можно также рассмотреть зависимые $X(k)$. Кроме того, теоремы Прохорова позволяют исследовать качество получаемых аппроксимаций, включая асимптотические разложения.

Работа выполнена при частичной поддержке Института системных исследований РАН и Международной лаборатории стохастического анализа и его приложений НИУ "Высшая школа экономики".

Автор приносит благодарность А. В. Булинскому, М. Я. Кельберту и С. А. Молчанову за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Питербарг В.И.* Двадцать лекций о гауссовских процессах. М.: МЦНМО, 2015.

2. *Mittal Y., Ylvisaker D.* Limit distribution for the maxima of stationary Gaussian processes // Stochast. Process. and their Appl. 1975. **3**. 1–18.
3. *Piterbarg V.I.* Asymptotic methods in theory of Gaussian random processes and fields. Providence: Amer. Math. Soc., Ser. Translations of Mathematical Monographs, 2012. Vol. 148.
4. *Прохоров Ю.В.* Асимптотическое поведение биномиального распределения // Успехи матем. наук. 1953. **8**, № 3. 135–142.
5. *Козуляев П.А.* Асимптотический анализ одной основной формулы теории вероятностей // Уч. зап. Моск. ун-та. 1939. **15**. 179–182.
6. *Богачев В.И.* Основы теории меры. Т. 1. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2003.
7. *Resnick S.I.* Extreme values, regular variation, and point processes. N.Y.; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1987.
8. *Berman S.* Sojourns and extremes of stochastic processes. London: CRC Press, Taylor&Francis, 1992.
9. *Ben Arous G., Bogachev L., Molchanov S.* Limit theorems for sums of random exponentials // Probab. Theory and Related Fields. 2005. **132**, N 4. 579–612.
10. *Molchanov S., Panov V.* Limit theorems for the alloy-type random energy model // Stochastics. 2019. **91**, N 5. 754–772 (arXiv:1802.05071v1 [math.PR]).

Поступила в редакцию
16.05.2023

УДК 519

МОДЕЛИ СТРАХОВАНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Е. В. Булинская[1]

Рассматриваются две модели страхования с дискретным временем. Первая модель изучает непропорциональное перестрахование и банковские займы. Для нее найдено оптимальное управление и установлена устойчивость к флуктуациям параметров и возмущениям распределений случайных величин, описывающих модель. Вторая модель дуальная, для нее выполнено сравнение вероятностей разорения в предположении, что распределения доходов подчинены одному из четырех частичных порядков.

Ключевые слова: модели страхования с дискретным временем, оптимальное управление; устойчивость к малым флуктуациям параметров и возмущениям распределений случайных величин, описывающих модель; вероятность разорения; стохастические порядки.

Two discrete-time insurance models are considered. The first model studies non-proportional reinsurance and bank loans. For this model, we establish the optimal control and stability to small fluctuation of parameters and perturbation of random variables distributions describing the model. The second model is dual and the ruin probabilities are compared under assumption that the gains distributions satisfy one of four partial orders.

Key words: discrete-time insurance models, optimal control, stability with respect to small fluctuation of parameters and perturbation of random variables distributions describing the model, ruin probability, stochastic orders.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-6-6

1. Введение. Начнем с напоминания хорошо известных фактов. Для исследования реальных процессов или явлений необходимо построить соответствующую математическую модель. При этом для одного и того же явления (процесса) может существовать большое число моделей, которые описывают его с различной степенью точности. Кроме того, одна и та же модель может использоваться для описания явлений, относящихся к различным областям. Наиболее распространены так

[1] *Булинская Екатерина Вадимовна* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ebulinsk@mech.math.msu.su, ebulinsk@yandex.ru.

Bulinskaya Ekaterina Vadimovna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Probability Theory.