Как показано в [2], при помощи замены $Y(t,x) = \int\limits_0^x P(t,x-z)e^{-kz}dz$ интегродифференциальное уравнение (1) может быть сведено к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t \partial x} - \beta x \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + k\frac{\partial Y}{\partial t} + (\lambda - \beta(kx+1))\frac{\partial Y}{\partial x} + k\beta Y = 0, \quad x \geqslant 0,$$

относящемуся к гиперболическому типу. Это и объясняет тот факт, что разрывы начальных данных не исчезают со временем, а распространяются по характеристикам. Характеристики имеют вид $x(t) = x_0 e^{-\beta t}$, $x_0 \geqslant 0$, и $t = \text{const}$. Мы видим, что к "параболическому" семейству характеристик добавляется еще одно.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–11–00056.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Friedman N., Cai L., Xie X.S.* Linking stochastic dynamics to population distribution: an analytical framework of gene expression // Phys. Rev. Lett. 2006. **97**(16). 168302.
2. *Huang G.R., Saakian D.B., Rozanova O.S., Yu J.L., Hu C.K.* Exact solution of master equation with Gaussian and compound Poisson noises // J. Stat. Mech.: Theory and Experiment. 2014. **11**. 11033.
3. *Bokes P.* Heavy-tailed distributions in a stochastic gene autoregulation model // J. Stat. Mech.: Theory and Experiment. 2021. **11**. 113403.

Поступила в редакцию
21.05.2023

УДК 517.93

О ТОЧНОЙ БЭРОВСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ЛОКАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. Н. Ветохин[1]

Рассматривается параметрическое семейство динамических систем, определенных на локально компактном метрическом пространстве и непрерывно зависящих от параметра из некоторого метрического пространства. Для любого такого семейства локальная энтропия входящих в него динамических систем изучается как функция параметра с точки зрения бэровской классификации функций.

Ключевые слова: динамическая система, локальная энтропия, бэровская классификация функций.

We consider a parametric family of dynamical systems defined on a locally compact metric space and continuously dependent on a parameter from some metric space. For any such family, the local entropy of the dynamical systems included in it is studied as a function of a parameter from the point of view of the Baire classification of functions.

Key words: dynamical systems, local entropy, Baire classification of functions.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-6-4

Введение. В качестве меры "массивности" компактного метрического пространства X А.Н. Колмогоров в статье [1] ввел понятие ε-емкости, которая определяется как максимальное число ε-различимых элементов в X. Используя это понятие, приведем определение локальной энтропии автономной динамической системы [2, с. 274].

[1] *Ветохин Александр Николаевич* — доктор физ.-мат. наук, доцент каф. дифференциальных уравнений мех.-мат. ф-та МГУ; проф. каф. ФН-1 "Высшая математика" МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: anveto27@yandex.ru.

Vetokhin Alexander Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Equations; Professor, Bauman Moscow State Technical University, Chair of Higher Mathematics.

Пусть X — локально компактное метрическое пространство, т.е. у каждой его точки существует открытая окрестность, замыкание которой компактно; f — непрерывное отображение из X в X. Наряду с исходной метрикой d на пространстве X определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x,y) = \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad f^i \equiv \underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{i},\ f^0 \equiv \mathrm{id}_X, \quad x,\, y\in X, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Зафиксируем точку $x \in X$. Для всяких $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ и $\rho > 0$ подмножество P шара $B_d(x,\rho) = \{y : d(x,y) < \rho\}$ называется (f,r,n,x,ρ)-отделенным, если попарные d_n^f-расстояния между любыми двумя точками P больше r. Пусть $N_d(f,r,n,x,\rho)$ — максимальное число точек в (f,r,n,x,ρ)-отделенном множестве, тогда *локальную энтропию* динамической системы f в точке x определяют формулой

$$h_d(f,x) = \lim_{r\to 0}\lim_{\rho\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N_d(f,r,n,x,\rho). \tag{1}$$

Отметим, что пределы в формуле (1) существуют, так как величина

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N_d(f,r,n,x,\rho)$$

не возрастает с уменьшением ρ и не убывает с уменьшением r.

В статье [1] А. Н. Колмогоров рассмотрел еще одну меру "массивности" компактного метрического пространства X, определяемую как наименьшее количество открытых шаров радиуса ε, необходимых для покрытия X. Используя это понятие, приведем другое определение локальной энтропии автономной динамической системы. Для всяких r, $\rho > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ множество $Q \subset B_d(x,\rho)$ называется (f,r,n,x,ρ)-покрытием шара $B_d(x,\rho)$, если для любой точки $z \in B_d(x,\rho)$ найдется точка $y \in Q$, такая, что $d_n^f(z,y) < r$. Обозначим через $S_d(f,r,n,x,\rho)$ минимальное количество элементов (f,r,n,x,ρ)-покрытия, тогда локальная энтропия вычисляется по формуле

$$h_d(f,x) = \lim_{r\to 0}\lim_{\rho\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln S_d(f,r,n,x,\rho). \tag{2}$$

Формула (2) вытекает из следующего двойного неравенства:

$$S_d(f,r,n,x,\rho) \leqslant N_d(f,r,n,x,\rho) \leqslant S_d(f,\frac{r}{2},n,x,\rho).$$

По метрическому пространству $\mathcal{M}$, непрерывному отображению

$$f : \mathcal{M}\times X \to X \tag{3}$$

и точке $x \in X$ образуем функцию

$$\mu \mapsto h_d(f(\mu,\cdot),x). \tag{4}$$

Как показывает следующий пример, функция (4) может быть разрывной на пространстве $\mathcal{M}$.

Рассмотрим отображение $t(x) = 4x(1-x)$ отрезка $[0;\,1]$ в себя. В книге [3, с. 502] установлено, что топологическая энтропия отображения t равна $\ln 2$. Напомним, что в случае компактного метрического пространства X топологическая энтропия непрерывного отображения $g : X \to X$ вычисляется по формуле [3, с. 122]

$$h_{\mathrm{top}}(g) = \lim_{r\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N_d(g,r,n),$$

где $N_d(g,r,n)$ — максимальное число точек в X, попарные d_n^g-расстояния между которыми больше r.

Пусть $X = \mathcal{M} = [0;\,1]$ и отображение (3) имеет вид

$$f(\mu,x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu = 0 \text{ или } x\in(\mu;\,1];\\ \frac{4}{\mu}x(\mu-x), & \text{если } \mu\in(0;\,1] \text{ и } x\in[0;\,\mu]. \end{cases}$$

Если $x = 0$ и $\mu \in (0,\, 1]$, то найдутся бесконечно малая последовательность положительных действительных чисел $(\rho_m)_{m=1}^{\infty}$ и последовательность натуральных чисел $(q_m)_{m=1}^{\infty}$, такие, что выполнено равенство

$$g^{q_m}(\mu,\cdot)(\{x : |x| \leqslant \rho_m\}) = [0,\, \mu]. \tag{5}$$

Обозначим через φ гомеоморфизм из квадрата $[0,\, \mu] \times [0,\, \mu]$ на квадрат $[0,\, 1] \times [0,\, 1]$. В силу равенства (5) для любого натурального числа n сужение (q_m+n)-й степени отображения $\varphi \circ g(\mu,\cdot) \circ \varphi^{-1}$ на отрезок $[0,\, \mu]$ совпадает с n-й степенью отображения t. Таким образом, получаем оценку локальной энтропии отображения $g(\mu,\cdot)$, $\mu \in (0;\, 1]$, в точке $x = 0$ снизу:

$$h_d(g(\mu,\cdot),0) = h_d(\varphi \circ g(\mu,\cdot) \circ \varphi^{-1},0) =$$

$$= \lim_{r\to 0}\lim_{m\to\infty}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{q_m+n}\ln N_d(\varphi \circ g(\mu,\cdot) \circ \varphi^{-1}, r, q_m+n, 0, \rho_m) \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{r\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N_d(t,r,n) = h_{\mathrm{top}}(t) = \ln 2.$$

Так как для $\mu = 0$ имеем $h_d(g(0,\cdot),0) = 0$, то функция (4) имеет разрыв в нуле.

Возникает естественный вопрос о наименьшем бэровском классе, которому принадлежит функция (4) на пространстве $\mathcal{M}$. Напомним, что функциями нулевого бэровского класса на метрическом пространстве $\mathcal{M}$ называются непрерывные функции и для всякого натурального числа p функциями p-го бэровского класса называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций $(p-1)$-го класса.

Для параметрических семейств динамических систем вида (3) в случае компактности метрического пространства X для функции

$$\mu \mapsto h_{\mathrm{top}}(f(\mu,\cdot)) \tag{6}$$

получены следующие результаты. В работе [4] установлено, что если $X = [0,\, 1]$, то для любого отображения (3) функция (6) полунепрерывна снизу, а следовательно, принадлежит первому бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$, а в случае полноты пространства $\mathcal{M}$ в силу теоремы Бэра о функциях первого класса множество точек непрерывности образует всюду плотное множество типа G_δ. В работе [5] показано, что в случае нульмерности и сепарабельности пространства $\mathcal{M}$ для любого всюду плотного множества типа G_δ в пространстве $\mathcal{M}$ найдется отображение (3), такое, что множество точек непрерывности функции (6) совпадает с этим множеством.

Вообще же говоря (при произвольных $\mathcal{M}$ и X и для любого отображения (3)), функция (6) принадлежит второму бэровскому классу [6], а в случае полноты пространства $\mathcal{M}$ множество точек ее полунепрерывности снизу образует всюду плотное множество типа G_δ в пространстве $\mathcal{M}$ [7]. В работе [8] для $X = \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ — множество Кантора на отрезке $[0,\, 1]$ с метрикой, индуцированной стандартной метрикой вещественной прямой, в случае нульмерности и сепарабельности пространства $\mathcal{M}$ для любого всюду плотного множества типа G_δ в пространстве $\mathcal{M}$ найдено отображение (3), такое, что множество точек полунепрерывности снизу функции (6) совпадает с этим множеством. В случае, когда пространства $\mathcal{M} = X = \mathcal{C}$, найдется такое отображение (3), являющееся гомеоморфизмом из X в X при всяком фиксированном значении $\mu \in \mathcal{M}$, что функция (6) всюду разрывна и не принадлежит первому бэровскому классу [9].

В случае, когда локально компактное пространство X имеет счетную базу, в работе [10] установлено, что для любого отображения (3) функция (6) (в этом случае топологическая энтропия определяется как точная верхняя грань множества топологических энтропий всех компактов, содержащихся в пространстве X) принадлежит третьему классу Бэра; там же построены такие пространства X, $\mathcal{M}$ и отображение (3), для которых функция (6) всюду разрывна и не принадлежит второму бэровскому классу.

1. О принадлежности третьему бэровскому классу локальной энтропии, рассматриваемой как функция точки фазового пространства и параметра. По метрикам $d_{\mathcal{M}}$ и d на пространствах $\mathcal{M}$ и X зададим метрику $d_{\mathcal{M}\times X}$ на $\mathcal{M} \times X$ формулой

$$d_{\mathcal{M}\times X}((\mu,x),(\nu,y)) = \max\{d_{\mathcal{M}}(\mu,\nu), d(x,y)\}.$$

Первым основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого непрерывного отображения* $f : \mathcal{M} \times X \to X$ *функция* $(\mu, x) \mapsto h_d(f(\mu, \cdot), x)$ *принадлежит третьему бэровскому классу на пространстве* $\mathcal{M} \times X$ *с метрикой* $d_{\mathcal{M}\times X}(\cdot, \cdot)$.

Предварительно докажем несколько лемм, которые будут использованы для доказательства теоремы 1. Пусть $f : \mathcal{M} \times X \to X$ — непрерывное отображение.

Лемма 1. *Для произвольных* $\mu \in \mathcal{M}$, *компактного множества* $\mathcal{K} \subset X$ *и положительного числа* r *найдется такое число* $\delta(\mu, \mathcal{K}, r) \in (0, r)$, *что для любых* $\nu \in \mathcal{M}$, y, $z \in \mathcal{K}$, *таких, что* $d_{\mathcal{M}\times X}((\nu, \mu), (y, z)) < \delta(\mu, \mathcal{K}, r)$, *выполнено неравенство* $d(f(\nu, y), f(\nu, z)) < r$.

Доказательство. В силу непрерывности отображения f для каждой точки $y \in \mathcal{K}$ найдутся шары $B_d(y, \alpha(r)) \subset X$, $B^y_{d_\mathcal{M}}(\mu, \beta(r)) \subset \mathcal{M}$, такие, что для любой точки $(\nu, z) \in B^y_{d_\mathcal{M}}(\mu, \beta(r)) \times B_d(y, \alpha(r))$ выполнено неравенство $d(f(\mu, y), f(\nu, z)) < r$. Из компактности множества $\mathcal{K}$ следует существование конечного набора точек $(y_k)^n_{k=1} \subset \mathcal{K}$, такого, что

$$\mathcal{K} \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_d(y_k, \alpha_k(r)),$$

тогда для любого $\nu \in \bigcap^n_{k=1} B^{y_k}_{d_\mathcal{M}}(\mu, \beta_k(r))$ выполнено неравенство

$$\sup_{y\in\mathcal{K}} d(f(\mu, y), f(\nu, y)) < 2r. \tag{7}$$

В силу компактности $\mathcal{K}$ отображение $f(\mu, \cdot) : X \to X$ является равномерно непрерывным на $\mathcal{K}$, следовательно, найдется такое число $\sigma(\mu, \mathcal{K}, r) > 0$, что из неравенства $d(x, y) < \sigma(\mu, \mathcal{K}, r)$ вытекает неравенство

$$d(f(\mu, x), f(\mu, y)) < r. \tag{8}$$

Положим $\delta(\mu, \mathcal{K}, r) = \min\{\frac{r}{3}, \sigma(\mu, \mathcal{K}, \frac{r}{3}), \beta_1(\frac{r}{6}), \ldots, \beta_n(\frac{r}{6})\}$. Тогда из неравенств (7) и (8) для любых $\nu \in \mathcal{M}$, y, $z \in \mathcal{K}$, таких, что $d_{\mathcal{M}\times X}((\mu, \nu), (y, z)) < \delta(f(\mu, \cdot), \mathcal{K}, r)$, следует неравенство

$$d(f(\nu, y), f(\nu, z)) \leqslant d(f(\nu, y), f(\mu, y)) + d(f(\mu, y), f(\mu, z)) + +d(f(\mu, z), f(\nu, z)) < r,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Для произвольных* $\mu \in \mathcal{M}$, *компактного множества* $\mathcal{K} \subset X$, $r > 0$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *найдется такое число* $\alpha_{\mu,n}(r) \in (0, r)$, *что для каждого* $\nu \in \mathcal{M}$, *такого, что* $d_\mathcal{M}(\mu, \nu) < \alpha_{\mu,n}(r)$, *и любых* y, $z \in \mathcal{K}$ *выполнено неравенство*

$$d^{f(\mu,\cdot)}_n(y, z) - 2r \leqslant d^{f(\nu,\cdot)}_n(y, z).$$

Доказательство. При $n = 1$ для любых y, $z \in \mathcal{K}$ имеем цепочку равенств

$$d^{f(\mu,\cdot)}_n(y, z) = d(y, z) = d^{f(\nu,\cdot)}_n(y, z),$$

из которой следует утверждение леммы 2. Пусть натуральное число $n \geqslant 2$. Для заданного $r > 0$ в силу леммы 1 найдется $\delta_1 \equiv \delta(\mu, f^{n-2}(\mu, \mathcal{K}), r) < r$, такое, что для любых $\nu \in \mathcal{M}$, $d_\mathcal{M}(\mu, \nu) < \delta_1$ и $y \in f^{n-2}(\mu, \mathcal{K})$ выполнено неравенство $d(f(\nu, y), f(\nu, y)) < r$. Далее, для δ_1 в силу леммы 1 найдется $\delta_2 \equiv \delta(\mu, f^{n-3}(\mu, \mathcal{K}), \delta_1) < \delta_1 < r$, такое, что для каждого $\nu \in \mathcal{M}$, такого, что $d_\mathcal{M}(\mu, \nu) < \delta_2$, и любого $y \in f^{n-3}(\mu, \mathcal{K})$ выполнены неравенства $d(f(\mu, y), f(\nu, y)) < \delta_1 < r$, $\quad d(f^2(\mu, y), f^2(\nu, y)) < r$. Продолжая этот процесс, найдем число $\delta_{n-1} \equiv \delta(\mu, \mathcal{K}, \delta_{n-2}) < \delta_{n-3} < \ldots < \delta_1 < r$, такое, что для каждого $\nu \in \mathcal{M}$ из условий $d_\mathcal{M}(\mu, \nu) < \delta_{n-1}$ и $y \in \mathcal{K}$ вытекают неравенства

$$\begin{gathered} d(f(\mu, y), f(\nu, y)) < \delta_{n-2} < \ldots < \delta_1 < r, \\ d(f^2(\mu, y), f^2(\nu, y)) < \delta_{n-3} < \ldots < \delta_1 < r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d(f^{n-1}(\mu, y), f^{n-1}(\nu, y)) < r. \end{gathered} \tag{9}$$

Положим $\alpha_{\mu,n}(r) = \delta_{n-1}$. Тогда для любого $\nu \in \mathcal{M}$, удовлетворяющего неравенству $d_{\mathcal{M}}(\mu,\nu) < \alpha_{\mu,n}(r)$, из неравенств (9) для любых y, $z \in \mathcal{K}$ следует цепочка

$$d_n^{f(\nu,\cdot)}(y,z) = \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} d(f^i(\nu,y), f^i(\nu,z)) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant n-1}(d(f^i(\nu,y), f^i(\mu,y)) + d(f^i(\mu,y), f^i(\mu,z)) + d(f^i(\mu,z), f^i(\nu,z)) \leqslant$$

$$\leqslant r + \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} d(f^i(\mu,y), f^i(\mu,z)) + r = 2r + d_n^{f(\mu,\cdot)}(y,z),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Для любых натурального числа n и положительных чисел r, ρ функция*

$$(\mu,x) \mapsto N_d(f(\mu,\cdot), r, n, x, \rho)$$

полунепрерывна снизу в каждой точке пространства $\mathcal{M}\times X$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $(\mu,x)\in\mathcal{M}\times X$ и шар $B_d(x,\rho)$. Пусть множество $P_{\mu,x}\subset B_d(x,\rho)$ является $(f(\mu,\cdot), r, n, x, \rho)$-отделенным, тогда найдется такое натуральное число m, что множество $P_{\mu,x}$ является $(f(\mu,\cdot), r+\frac{1}{m}, n, x, \rho)$-отделенным.

Обозначим через

$$\eta = \min_{y\in P_{\mu,x}} \inf_{z\in S_d(x,\rho)} d(y,z)$$

расстояние от множества $P_{\mu,x}$ до границы $S_d(x,\rho)$ шара $B_d(x,\rho)$. Так как пересечение множеств $P_{\mu,x}$ и $S_d(x,\rho)$ пусто и $S_d(x,\rho)$ является замкнутым множеством, то $\eta > 0$.

Заметим, что для любого $y\in B_d(x,\frac{\eta}{2})$ шар $B_d(y,\rho)$ содержит множество $P_{\mu,x}$.

Пусть $\nu\in\mathcal{M}$ удовлетворяет условию $d_{\mathcal{M}}(\mu,\nu) < \alpha_{\mu,n}(\frac{1}{2m})$, где число $\alpha_{\mu,n}(\cdot)$ найдено в лемме 2. Тогда в силу леммы 2 для любых точек $u,v\in P_{\mu,x}$ выполнены неравенства

$$d_n^{f(\nu,\cdot)}(u,v) \geqslant d_n^{f(\mu,\cdot)}(u,v) - 2\frac{1}{2m} > r.$$

Положим $\delta = \min\{\frac{\eta}{2}, \alpha_{\mu,n}(\frac{1}{2m})\}$, тогда для всех точек $(\nu,y)\in B_{d_{\mathcal{M}}}(x,\delta)\times B_d(x,\delta)$ множество $P_{\mu,x}\subset B_d(y,\rho)$ является и $(f(\nu,\cdot), r, n, y, \rho)$-отделенным. Таким образом, выполнено неравенство

$$N_d(f(\nu,\cdot), r, n, y, \rho) \geqslant N_d(f(\mu,\cdot), r, n, x, \rho),$$

что и требовалось доказать.

Вернемся к доказательству теоремы 1. Из леммы 3 вытекает, что для всяких $r>0$, $\rho>0$ и $n\in\mathbb{N}$ функция $(\mu,x)\mapsto\frac{1}{n}\ln N_d(f(\mu,\cdot), r, n, x, \rho)$ полунепрерывна снизу, следовательно [11, гл. IX, § 37, п. XI], существует последовательность непрерывных функций $(\mu,x)\mapsto g_d^m(\mu,r,n,x,\rho)$ на пространстве $\mathcal{M}\times X$, такая, что

$$\frac{1}{n}\ln N_d(f(\mu,\cdot), r, n, x, \rho) = \sup_{m\in\mathbb{N}} g_d^m(\mu,r,n,x,\rho), \quad \mu\in\mathcal{M},$$

откуда в силу формулы (1) получаем

$$h_d(f(\mu,\cdot),x) = \lim_{r\to 0}\lim_{\rho\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\ln N_d(f(\mu,\cdot), r, n, x, \rho) = \sup_{p\in\mathbb{N}}\inf_{k\in\mathbb{N}}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{m\in\mathbb{N}} g_d^m(\mu, 1/p, l, x, 1/k) =$$

$$= \sup_{p\in\mathbb{N}}\inf_{k\in\mathbb{N}}\inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{l\geqslant n}\sup_{m\in\mathbb{N}} g_d^m(\mu, 1/p, n, x, 1/k) =$$

$$= \lim_{p\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant p}\lim_{s\to\infty}\min_{1\leqslant k\leqslant s}\min_{1\leqslant n\leqslant s}\lim_{q\to\infty}\max_{n\leqslant l\leqslant q}\max_{1\leqslant m\leqslant q} g_d^m(\mu, 1/j, l, x, 1/k).$$

Так как максимум и минимум конечного множества функций из некоторого бэровского класса принадлежат тому же классу [11, гл. IX, § 37, п. III], функция $\mu\mapsto h_d(f(\mu,\cdot),x)$ принадлежит третьему классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}$, что и требовалось доказать.

Отметим, что из этого результата в силу теоремы Бэра [11, гл. IX, § 39, п. VI] вытекает, что для любого отображения (3) в полном метрическом пространстве $\mathcal{M}$ найдется всюду плотное множество G типа G_δ, такое, что сужение функции $\mu \mapsto h_d(f(\mu,\cdot),x)$ на множество G непрерывно.

2. О локальной энтропии одного параметрического семейства динамических систем. В связи с теоремой 1 возникают естественные вопросы: является ли оценка сверху бэровского класса функции $\mu \mapsto h_d(f(\mu,\cdot),x)$ точной и может ли бэровский класс этой функции изменяться при переходе от одной точки пространства X к другой? На эти вопросы получены ответы в данном пункте.

Построим метрические пространства $\mathcal{M}$ и X. Точками пространства $\mathcal{M}$ являются всевозможные (счетные) последовательности $\mu = (\mu_k)_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел. Расстояние между двумя точками μ и ν определяется формулой

$$d_{\mathcal{M}}(\mu,\nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu=\nu; \\ \frac{1}{\min\{k\colon \mu_k\neq\nu_k\}}, & \text{если } \mu\neq\nu. \end{cases}$$

Отметим, что пространство $\mathcal{M}$ гомеоморфно множеству иррациональных чисел на отрезке $[0, 1]$ с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой. Рассмотрим пространство X, построенное в работе [10]. На множестве последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, $x_k \in \{0, 1\}$, введем метрику

$$d_{\Omega_2}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x=y; \\ \frac{1}{\min\{i\colon x_i\neq y_i\}}, & \text{если } x\neq y. \end{cases}$$

Полученное компактное метрическое пространство обозначим через Ω_2. Отметим, что пространство Ω_2 гомеоморфно множеству Кантора $\mathcal{C}$. Точками пространства X являются всевозможные пары (x,i), где $x\in\Omega_2$, $i\in\mathbb{N}$, а расстояние между двумя точками $(x,i)\in X$ и $(y,j)\in X$ определяется формулой

$$d((x,i),(y,j)) = \begin{cases} d_{\Omega_2}(x,y), & \text{если } i=j; \\ 1, & \text{если } i\neq j. \end{cases}$$

Вторым основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 2. *Существуют непрерывное отображение $f:\mathcal{M}\times X\to X$ и четыре точки x_1, x_2, x_3, $x_4 \in X$, такие, что*

1) *функция $\mu \mapsto h_d(f(\mu,\cdot),x_1)$ непрерывна на пространстве $\mathcal{M}$;*

2) *функция $\mu \mapsto h_d(f(\mu,\cdot),x_2)$ принадлежит первому бэровскому классу и не является непрерывной на пространстве $\mathcal{M}$;*

3) *функция $\mu \mapsto h_d(f(\mu,\cdot),x_3)$ принадлежит второму бэровскому классу, всюду разрывна и не принадлежит первому бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$;*

4) *функция $\mu \mapsto h_d(f(\mu,\cdot),x_4)$ принадлежит третьему бэровскому классу, всюду разрывна и не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$.*

Отображение $f:\mathcal{M}\times X\to X$ построим следующим образом.

Для всех $\mu\in\mathcal{M}$ и точек из X вида $(x,1)$ определим

$$f(\mu,(x,1)) = (x,1). \tag{10}$$

По последовательности $\mu = (\mu_k)_{k=1}^{\infty}$ построим последовательности $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\xi_k = \begin{cases} \mu_k & \text{при } k\leqslant k_0, \\ 0 & \text{при } k>k_0, \end{cases}$$

где k_0 — номер первого элемента в последовательности $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$, отличного от единицы. Для всех $\mu\in\mathcal{M}$ и $(x,2)\in X$ положим

$$f(\mu,((x_1,x_2,x_3,\dots),2)) = ((x_{1+\xi_1},x_{2+\xi_2},x_{3+\xi_3},\dots),2). \tag{11}$$

Далее, построим последовательность $(\zeta_k)_{k=1}^{\infty}$, где

$$\zeta_k = \begin{cases} \mu_k & \text{при } \mu_k=1, \\ 0 & \text{при } \mu_k\neq 1, \end{cases}$$

и для всех $\mu \in \mathcal{M}$ и $(x, 3) \in X$ положим

$$f(\mu, ((x_1, x_2, x_3, \ldots), 3)) = ((x_{1+\zeta_1}, x_{2+\zeta_2}, x_{3+\zeta_3}, \ldots), 3). \tag{12}$$

Наконец, последовательность $(\vartheta_k)_{k=1}^{\infty}$ определим равенствами $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = 1$ и при $k \geqslant 4$ равенствами $\vartheta_k = \min\{\mu_{[\log_2(\log_2 k)]}, k\}$ ($[\cdot]$ — целая часть числа). Рассмотрим последовательность преобразований $(\sigma_m(\cdot,\cdot))_{m=1}^{\infty}$ из $\mathcal{M} \times \Omega_2$ в Ω_2, здесь $\sigma_m(\mu, \cdot) \equiv \mathrm{id}_{\Omega_2}$, $\mu \in \mathcal{M}$ при $1 \leqslant m < 16$ и $\sigma_m(\mu, x) = (x'_1, x'_2, x'_3, \ldots)$ при $16 \leqslant m$, где

$$x'_i = \begin{cases} x_i & \text{при } i < \vartheta_m, \\ x_{i+1} & \text{при } i \geqslant \vartheta_m. \end{cases}$$

Используя эту последовательность, доопределим отображение $f : \mathcal{M} \times X \to X$ на множестве элементов $(x, k) \in X$, $k \geqslant 4$, следующим образом:

$$f(\mu, (x, k)) = (\sigma_{k-3}(\mu, x), k + 1). \tag{13}$$

В силу определения функция f непрерывна на $\mathcal{M} \times X$ и для каждого $\mu \in \mathcal{M}$ функция $f(\mu, \cdot)$ является равномерно непрерывной на X. Докажем, что построенное при помощи формул (10)–(13) отображение $f : \mathcal{M} \times X \to X$ удовлетворяет заключению теоремы 2.

Лемма 4. *Для любого натурального числа k в точке $x = (0, 0, 0, \ldots)$ пространства Ω_2 локальная энтропия отображения $\sigma : \Omega_2 \to \Omega_2$ действует по правилу*

$$\sigma_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots) = \sigma_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots)$$

и равна $\ln 2$.

Доказательство. В книге [3, с. 132] установлено, что $h_{\mathrm{top}}(\sigma_1) = \ln 2$. Так как для отображения σ_k, $k \geqslant 2$, выполнено неравенство $2^{-k} N_d(\sigma_1, r, n) \leqslant N_d(\sigma_k, r, n) \leqslant N_d(\sigma_1, r, n)$, то

$$h_{\mathrm{top}}(\sigma_k) = \lim_{r\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln N_d(\sigma_k, r, n) = \ln 2. \tag{14}$$

Для точки $x = (0, 0, 0, \ldots)$ и $m \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\sigma_k^m \left(B_{d_{\Omega_2}} \left(x, \frac{1}{m+k} \right) \right) = B_{d_{\Omega_2}} \left(x, \frac{1}{k} \right),$$

а следовательно,

$$N_d(\sigma_k, r, n + q_m, x, \frac{1}{m}) \geqslant 2^{-k} N_d(\sigma_k, r, n), \tag{15}$$

таким образом, из (14) и (15) получаем

$$h_d(\sigma_k, x) = \lim_{r\to 0} \lim_{m\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n + q_m} \ln N_d \left(\sigma_k, r, q_m + n, x, \frac{1}{m} \right) \geqslant \lim_{r\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln N_d(\sigma_k, r, n) = \ln 2.$$

С другой стороны, имеем неравенство $h_d(\sigma_k, x) \leqslant h_{\mathrm{top}}(\sigma_k) = \ln 2$, что и требовалось доказать.

1. Рассмотрим точку $x_1 = ((0, 0, 0, \ldots), 1)$, тогда в силу (10) для любых $\mu \in \mathcal{M}$, $r \in (0, 1/4)$ и $0 < \rho \leqslant 1/2$ выполнено равенство

$$S_d(f(\mu, \cdot), r, n, x_1, \rho) = S_d(f(\mu, \cdot), r, 1, x_1, \rho),$$

следовательно, локальная энтропия отображения $f(\mu, \cdot)$ в точке x_1 равна нулю для всех значений параметра, а значит, функция $\mu \mapsto h_d(f(\mu, \cdot), x_1)$ принадлежит нулевому бэровскому классу на пространстве $\mu \in \mathcal{M}$.

2. Рассмотрим точку $x_2 = ((0, 0, 0, \ldots), 2)$, тогда согласно (11) для любых $\mu \neq (1, 1, 1, \ldots)$, $0 < \rho \leqslant 1/2$ и $r \in (0, 1/4)$ найдется такое число n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ выполнено равенство

$$S_d(f(\mu, \cdot), r, n, x_2, \rho) = S_d(f(\mu, \cdot), r, n_0, x_2, \rho),$$

а следовательно, для любого $\mu \neq (1,1,1,\dots)$ локальная энтропия отображения $f(\mu,\cdot)$ в точке x_2 равна нулю. Если $\mu = (1,1,1,\dots)$, то в силу леммы 4 и формулы (11) справедливо равенство $h_d(f(\mu,\cdot),x_2) = h_d(\sigma_1,(0,0,0,\dots)) = \ln 2$. Таким образом, функция $\mu \mapsto h_d(f(\mu,\cdot),x_2)$ имеет одну точку разрыва, а следовательно, принадлежит первому и не принадлежит нулевому бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$.

3. В пространстве $\mathcal{M}$ рассмотрим множество Q последовательностей, у которых начиная с некоторого номера k_0 все элементы равны единице. Пусть $x_3 = ((0,0,0,\dots),3) \in X$, тогда для любого $\mu \in Q$ в силу леммы 4 и формулы (12) имеем равенство $h_d(f(\mu,\cdot),x_3) = h_d(\sigma_{k_0},(0,0,0,\dots)) = \ln 2$.

Если $\mu \in \mathcal{M} \setminus Q$, то найдется последовательность натуральных чисел $q_m \to +\infty$, такая, что $\zeta_{q_m} = 0$, следовательно, в силу (12) для любого натурального числа $n > q_m$ первые q_m координат образа точки $(x,3) \in X$ при отображении f^n совпадают с первыми q_m координатами образа точки $(x,3)$ при отображении f^{q_m}. Таким образом, при $n > q_m$ величины $N_d(f(\mu,\cdot),\frac{1}{q_m},n,x_3,\frac{1}{q_m+1})$ не зависят от n и для любого $\mu \in \mathcal{M}\setminus Q$ локальная энтропия отображения $f(\mu,\cdot)$ в точке x_3 равна нулю. Следовательно, ввиду всюду плотности множества Q функция $\mu \mapsto h_d(f(\mu,\cdot),x_3)$ всюду разрывна.

В силу счетности множества Q функция $\mu \mapsto h_d(f(\mu,\cdot),x_3)$ принадлежит второму бэровскому классу, а по теореме Бэра о функциях первого класса не принадлежит первому бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$.

4. Для любого натурального числа l обозначим через P_l множество тех последовательностей из $\mathcal{M}$, у которых все члены, кроме, быть может, конечного числа, больше l. Обозначим через $\mathcal{P}$ пересечение всех множеств P_l, т.е. множество тех последовательностей, которые стремятся к бесконечности. Пусть $x_4 = ((0,0,0,\dots),4) \in X$, тогда справедливы следующие утверждения.

Лемма 5. *Если $\mu \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{P}$, то выполнено неравенство $h_d(f(\mu,\cdot),x_4) \geqslant \ln 2$.*

Доказательство. Пусть $\mu \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{P}$, тогда существуют подпоследовательность $(\vartheta_{m_j})_{j=1}^{\infty} \subset (\vartheta_m)_{m=1}^{\infty}$ и натуральное число ϑ, такие, что $\vartheta_{m_j} = \vartheta$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Обозначим $N_j = 2^{2^{m_j}}$, тогда для всех $j \in \mathbb{N}$, $k \in \{N_j,\dots,N_j^2-1\}$ и $x \in \Omega_2$ выполнено равенство $\sigma_k(\mu,x) = \sigma_{N_j}(\mu,x)$. Отображение $\sigma_{N_j}(\mu,\cdot)$ имеет вид

$$\sigma_{N_j}(\mu,x) = (x_1',x_2',x_3',\dots),$$

где

$$x_i' = \begin{cases} x_i & \text{при } i < \vartheta, \\ x_{i+1} & \text{при } i \geqslant \vartheta, \end{cases}$$

т.е. является сдвигом последовательности $x \in \Omega_2$ на один элемент влево начиная с номера $\vartheta + 1$.

Для $k \in \mathbb{N}$ и $N_j > k$ в шаре $B_d((0,4),2^{-k})$ рассмотрим множество A_j точек $(x,4) = ((x_1,x_2,x_3,\dots),4) \in X$, удовлетворяющих условию

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i < 2N_j, \\ 0 \text{ или } 1 & \text{при } 2N_j \leqslant i \leqslant N_j^2-1, \\ 0 & \text{при } i \geqslant N_j^2. \end{cases}$$

Образом множества A_j при отображении $\sigma^{(N_j-1)}(\mu,\cdot)$ является множество точек

$$(y,N_j+3) = ((y_1,y_2,y_3,\dots),N_j+3) \in X,$$

удовлетворяющих условию

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leqslant N_j, \\ 0 \text{ или } 1 & \text{при } N_j \leqslant i \leqslant N_j^2-N_j, \\ 0 & \text{при } i \geqslant N_j^2-N_j+1. \end{cases}$$

Таким образом, для любых двух точек $(x^{(1)},4)$ и $(x^{(2)},4)$ из A_j имеем

$$\max_{0\leqslant i\leqslant N_j^2-1} d(f^i(\mu,(x^{(1)},4)),f^i(\mu,(x^{(2)},4)) \geqslant \max_{2N_j\leqslant i\leqslant N_j^2-1} d_{\Omega_2}(\sigma^i(\mu,x^{(1)}),\sigma^i(\mu,x^{(2)})) \geqslant \frac{1}{\vartheta+1}.$$

Мощность множества A_j равна $2^{N_j^2-2N_j}$, отсюда получаем

$$N_d\left(f(\mu,\cdot),\frac{1}{\vartheta+1},N_j^2,x_4,\frac{1}{\vartheta+m}\right)\geqslant 2^{N_j^2-2N_j},$$

а следовательно,

$$h_d(f(\mu,\cdot),x_4)\geqslant \lim_{m\to\infty}\lim_{j\to\infty}\frac{1}{N_j^2}\ln\left(2^{N_j^2-2N_j}\right)=\ln 2,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 6. *Для любого* $\mu\in\mathcal{P}$ *выполнено равенство* $h_d(f(\mu,\cdot),x_4)=0$.

Доказательство. Если $\mu\in\mathcal{P}$, то для любого натурального числа m найдется такой номер n_m, что для всех $n>n_m$ выполнено неравенство $\vartheta_n>m$. Следовательно, для любых $x,y\in\Omega_2$, удовлетворяющих условию $d_{\Omega_2}(x,\,y)<\frac{1}{m}$, при всех $n>n_m$ справедливо неравенство $d_{\Omega_2}(\sigma_n(\mu,x),\sigma_n(\mu,y))<\frac{1}{m}$. Отсюда получаем, что если $d_{n_m}^{f(\mu,\cdot)}(x,y)<\frac{1}{m}$, то при всех $n>n_m$ имеет место неравенство $d_n^{f(\mu,\cdot)}(x,y)<\frac{1}{m}$. Таким образом, при $n>n_m$ справедлива оценка

$$S_d(f(\mu,\cdot),\frac{1}{m},n,x_4,1)\leqslant S_d(f(\mu,\cdot),\frac{1}{m},n_m,x_4,1)\leqslant 2^{n_m+1+m},$$

из которой получаем

$$h_d(f(\mu,\cdot),x_4)\leqslant \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln S_d(f(\mu,\cdot),\frac{1}{m},n_m,x_4,1)\leqslant \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}2^{n_m+1+m}=0,$$

что и требовалось доказать.

Завершим доказательство теоремы 2, воспользовавшись следующим утверждением, установленным в работе [12]: если функционал $\mu\mapsto h_d(f(\mu,\cdot),x_4)$ принадлежит второму классу Бэра, то пересечение замыканий множеств $h_d(f(\mathcal{P},\cdot),x_4)$ и $h_d(f(\mathcal{M}\setminus\mathcal{P},\cdot),x_4)$ непусто. Согласно леммам 5 и 6 имеем

$$h_d(f(\mathcal{P},\cdot),x_4)=0<\ln 2\leqslant h_d(f(\mathcal{M}\setminus\mathcal{P},\cdot),x_4),$$

следовательно, в силу всюду плотности множества $\mathcal{P}$ в пространстве $\mathcal{M}$ функция $\mu\mapsto h_d(f(\mu,\cdot),x_4)$ всюду разрывна и не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А.Н.* Асимптотические характеристики вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН СССР. 1956. **179**, № 3. 585–589.
2. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005.
3. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999.
4. *Misiurewicz M.* Horseshoes for mappings of the interval // Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. math., astron. et phys. 1979. **27**. 167–169.
5. *Ветохин А.Н.* О множестве непрерывности топологической энтропии семейства отображений отрезка, зависящих от параметра // Функц. анализ и его прил. 2021. **55**, № 3. 42–50.
6. *Ветохин А.Н.* Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения. 2017. **53**, № 4. 448–453.
7. *Ветохин А.Н.* Строение множеств точек полунепрерывности топологической энтропии динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2019. № 4. 69–72.
8. *Ветохин А.Н.* О некоторых свойствах топологической энтропии и топологического давления семейств динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2019. **55**, № 10. 1319–1327.
9. *Ветохин А.Н.* Непринадлежность первому классу Бэра топологической энтропии на пространстве гомеоморфизмов // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. № 5. 64–67.
10. *Ветохин А.Н.* О некоторых свойствах топологической энтропии семейства динамических систем, определенных на произвольном метрическом пространстве // Дифференц. уравнения. 2021. **57**, № 10. 1005–1013.

11. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.: ОНТИ. Гл. ред. техн.-теор. лит-ры, 1937.
12. *Ветохин А.Н.* Класс Бэра полунепрерывных снизу минорант показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2019. **34**, № 10. 1313–1317.

Поступила в редакцию
24.05.2023

УДК 519.21

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ТОЧЕЧНЫХ ПРОЦЕССОВ ВЫХОДОВ ЗА ВЫСОКИЕ УРОВНИ ГАУССОВСКОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В. И. Питербарг[1]

Изучается асимптотическое поведение точечных процессов выходов гауссовской стационарной последовательности за уровень, стремящийся к бесконечности медленнее, чем в пуассоновской предельной теореме для числа выходов. Доказана сходимость по вариации таких точечных процессов к маркированному пуассоновскому процессу. Применяются результаты Ю. В. Прохорова о наилучшем приближении распределения Бернулли смесью гауссовского и пуассоновского распределений. Эта задача поставлена А. Н. Колмогоровым в начале 50-х годов прошлого века.

Ключевые слова: гауссовская последовательность, большие выбросы, пуассоновская предельная теорема, сходимость по вариации.

We study the asymptotic behavior of point processes of exits of a Gaussian stationary sequence beyond a level tending to infinity more slowly than in the Poisson limit theorem for the number of exits. Convergence in variation of such point processes to a marked Poisson process is proved. The results of Yu. V. Prokhorov on the best approximation of the Bernoulli distribution by a mixture of Gaussian and Poisson distributions are applied. A. N. Kolmogorov proposed this problem in the early 1950s.

Key words: Gaussian sequence, large excursions, Poisson limit theorem, convergence in variation.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-6-5

1. Введение. Рассмотрим гауссовскую стационарную последовательность $X(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, с нулевым средним $EX(k) = 0$ и единичной дисперсией $\operatorname{Var} X(k) = 1$. Обозначим $\operatorname{Cov}(X(0), X(k)) = EX(k)X(0) = r(k)$. Пусть $\mathcal{B}$ — σ-алгебра ограниченных борелевских множеств на прямой $\mathbb{R}$. Введем на $\mathcal{B}$ точечный процесс

$$\eta_u(B) := \sum_{k \in nB} \mathbf{I}\left\{X(k) > u\right\}, \quad B \in \mathcal{B}, \tag{1}$$

где последовательность натуральных чисел $n = n(u)$ стремится к бесконечности с ростом уровня u. Мы рассматриваем предельное поведение процесса $\eta_u(\cdot)$ при различных скоростях роста этого уровня к бесконечности. Известно, что при достаточно быстром убывании корреляции $r(k)$ к нулю на бесконечности процесс $\eta_u(\cdot)$ слабо сходится в естественной нормировке к пуассоновскому. *Естественная нормировка* — это

$$n = n(u) = \frac{\lambda}{P(X(1) > u)}, \ \lambda > 0,$$

[1] *Питербарг Владимир Ильич* — доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ; e-mail: piter@mech.math.msu.su.

Piterbarg Vladimir Ilich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Probability Theory.