УДК 517.5

О ЧЕБЫШЁВСКИХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

В. М. Федоров[1]

А. Хаар и А. Н. Колмогоров нашли необходимые и достаточные условия, при которых конечномерные подпространства в пространстве непрерывных функций на произвольном компакте являются чебышёвскими. В работе доказано, что подпространства рядов Дирихле в пространстве $\boldsymbol{C}(0,\infty]$ ограниченных непрерывных функций в интервале $(0,\infty)$, имеющих предел в бесконечности, образуют чебышёвские подпространства.

Ключевые слова: чебышёвское подпространство, ряд Дирихле, обобщенная формула Мюнтца, компактификация Стоуна–Чеха, опорный функционал, носитель функционала, сопряженное пространство, функционал Дирака.

A. Haar and A. N. Kolmogorov found necessary and sufficient conditions under which finite-dimensional subspaces in the space of continuous functions on an arbitrary compact set are Chebyshev. In this paper, we prove that subspaces of Dirichlet series in the space of $\boldsymbol{C}(0,\infty]$ of continuous and bounded functions in the interval $(0,\infty)$ that have a limit at infinity form Chebyshev subspaces.

Key words: Chebyshev subspace, Dirichlet series, generalized Muntz formula, Stone–Cech compactification, support functional, functional carrier, conjugate space, Dirac functional.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-6-2

Будем предполагать, что $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих следующим условиям: $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n < \infty$, $\inf_{n\geqslant 1}\{\lambda_n - \lambda_{n-1}\} > 0$ и $\lambda_0 = 0$. Рассмотрим пространство $\boldsymbol{C}(0,\infty]$ действительных, непрерывных и ограниченных функций в интервале $(0,\infty)$, которые имеют предел в бесконечности. Пусть $L \subset \boldsymbol{C}(0,\infty]$ — подпространство, состоящее из рядов Дирихле $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \boldsymbol{e}^{-\lambda_n x}$ с действительными коэффициентами $a_n \in \mathbb{R}$, сходящихся во всех точках интервала $(0,\infty)$. Как известно [1, с. 115], всякий ряд Дирихле, сходящийся в интервале $(0,\infty)$, сходится абсолютно и равномерно в каждом полуинтервале $[b,\infty) \subset (0,\infty)$. Поэтому всякая функция $\varphi \in L$ имеет предел в бесконечности: $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = a_0$.

Лемма 1. *Величина наилучшего приближения* $\rho(\varphi_\lambda, L)_{\boldsymbol{L}_2} = \inf_{\varphi\in L}\|\varphi_\lambda - \varphi\|_{\boldsymbol{L}_2}$ *функции* $\varphi_\lambda(x) = \boldsymbol{e}^{-\lambda x}$ *подпространством* L *в гильбертовом пространстве* $\boldsymbol{L}_2((0,\infty),\mu)$ *с мерой* $d\mu = \boldsymbol{e}^{-x}dx$ *вычисляется по обобщенной формуле Мюнтца:*

$$\rho(\varphi_\lambda, L)_{\boldsymbol{L}_2} = \frac{\Pi_\lambda}{\sqrt{2\lambda+1}}, \quad \textit{где} \quad \Pi_\lambda = \prod_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda-\lambda_n|}{\lambda+\lambda_n+1}.$$

Доказательство. Обозначим через $L_n = \mathrm{sp}\{\boldsymbol{e}^{-\lambda_0 x},\ldots,\boldsymbol{e}^{-\lambda_n x}\}$ линейную оболочку системы функций $\boldsymbol{e}^{-\lambda_0 x},\ldots,\boldsymbol{e}^{-\lambda_n x}$. Тогда величина наилучшего приближения функции $\varphi_\lambda(x) = \boldsymbol{e}^{-\lambda x}$ подпространством L_n в пространстве $\boldsymbol{L}_2((0,\infty),\mu)$ равна [2, с. 25, 30]

$$\rho(\varphi_\lambda, L_n)_{\boldsymbol{L}_2} = \frac{\Pi_\lambda^n}{\sqrt{2\lambda+1}}, \quad \text{где} \quad \Pi_\lambda^n = \prod_{k=0}^{n}\frac{|\lambda-\lambda_k|}{\lambda+\lambda_k+1}.$$

Так как при $\lambda > 0$ последовательность чисел Π_λ^n монотонно убывает и имеет предел Π_λ, то отсюда вытекает обобщенная формула Мюнтца. Лемма доказана.

В следующей лемме получена оценка снизу величины бесконечного произведения $\mathit{\Pi}_\lambda$. Аналогичная оценка была доказана в работе [3] для натуральных чисел λ и λ_n.

[1] *Федоров Владимир Михайлович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail:vferdorov@rambler.ru.

Fedorov Vladimir Mikhailovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Functions and Functional Analysis.

Лемма 2. *Если* $\inf_{n\geqslant 0}\{|\lambda_n-\lambda|\}>0$, *то справедливо неравенство* $\varPi_\lambda > \boldsymbol{e}^{-\lambda d_\lambda}$, *где величина* $d_\lambda>0$ *и ее предел* $\lim_{\lambda\to\infty} d_\lambda = 0$.

Доказательство. По условию существует такое $\delta>0$, что $\inf_{n\geqslant 1}\{\lambda_n-\lambda_{n-1}\}$, $\inf_{n\geqslant 0}\{|\lambda_n-\lambda|\}>\delta$. Представим выражение $\varPi_\lambda$ в виде произведения трех сомножителей:

$$\varPi_\lambda = A_\lambda B_\lambda C_\lambda = \prod_{0<\lambda_n<\lambda}\frac{\lambda-\lambda_n}{\lambda+\lambda_n+1}\prod_{\lambda<\lambda_n<3\lambda+1}\frac{\lambda_n-\lambda}{\lambda+\lambda_n+1}\prod_{\lambda_n\geqslant 3\lambda+1}\frac{\lambda_n-\lambda}{\lambda+\lambda_n+1}\,.$$

Обозначим через $n_\lambda=\sum_{\lambda_n\leqslant\lambda}1$ считающую функцию последовательности Λ. Тогда имеем $n_\lambda=n$ при $\lambda_{n-1}\leqslant\lambda<\lambda_n$. Отсюда следует, что $\lim_{\lambda\to\infty}n_\lambda/\lambda=\lim_{n\to\infty}n/\lambda_n=0$ [4, с. 92], а в случае $\lambda_n<\lambda$ выполняются неравенства

$$\frac{\lambda-\lambda_n}{\lambda+\lambda_n+1} > \frac{(n_\lambda-n)\delta}{2\lambda+1}\quad \text{при}\quad n=0,1,\,\ldots,\,n_\lambda-1\,.$$

Поэтому $A_\lambda > n_\lambda!(\frac{\delta}{2\lambda+1})^{n_\lambda} > (\frac{n_\lambda\delta}{4\lambda+2})^{n_\lambda}$, так как $n_\lambda! > (\frac{n_\lambda}{2})^{n_\lambda}$. Следовательно, имеем

$$A_\lambda > \boldsymbol{e}^{-\lambda a_\lambda},\quad \text{где}\quad a_\lambda=\frac{n_\lambda}{\lambda}\ln\left(\frac{4\lambda+2}{n_\lambda\delta}\right)\quad \text{и}\quad \lim_{\lambda\to\infty}a_\lambda=0\,.$$

В случае $\lambda<\lambda_n<3\lambda+1$ полагаем $m_\lambda=n_{3\lambda+1}-n_\lambda$. Тогда $\lim_{\lambda\to\infty}m_\lambda/\lambda=0$ и выполняются неравенства

$$\frac{\lambda_n-\lambda}{\lambda+\lambda_n+1} > \frac{(n-n_\lambda+1)\delta}{4\lambda+2}\quad \text{при}\quad n=n_\lambda,\,\ldots,\,n_{3\lambda+1}-1\,.$$

Отсюда следует, что $B_\lambda > m_\lambda!(\frac{\delta}{4\lambda+2})^{m_\lambda} > (\frac{m_\lambda\delta}{8\lambda+4})^{m_\lambda}$, поскольку $m_\lambda! > (\frac{m_\lambda}{2})^{m_\lambda}$. Поэтому получаем

$$B_\lambda > \boldsymbol{e}^{-\lambda b_\lambda}\,,\quad \text{где}\quad b_\lambda=\frac{m_\lambda}{\lambda}\ln\left(\frac{8\lambda+4}{m_\lambda\delta}\right)\quad \text{и}\quad \lim_{\lambda\to\infty}b_\lambda=0\,.$$

Наконец, в случае $\lambda_n\geqslant 3\lambda+1$, т.е. при всех $n\geqslant n_{3\lambda+1}$, имеют место соотношения

$$\frac{\lambda_n-\lambda}{\lambda+\lambda_n+1}=1-\frac{2\lambda+1}{\lambda+\lambda_n+1}\quad \text{и}\quad 0<\frac{2\lambda+1}{\lambda+\lambda_n+1}\leqslant\frac{1}{2}\,.$$

Применяя неравенство $1-x>\boldsymbol{e}^{-2x}$ при $0<x\leqslant 1/2$, мы получим нужную оценку:

$$C_\lambda > \boldsymbol{e}^{-\lambda c_\lambda}\,,\quad \text{где}\quad c_\lambda=\frac{4\lambda+2}{\lambda}\sum_{\lambda_n\geqslant 3\lambda+1}\frac{1}{\lambda_n}\quad \text{и}\quad \lim_{\lambda\to\infty}c_\lambda=0\,.$$

Теперь, полагая $d_\lambda=a_\lambda+b_\lambda+c_\lambda$, имеем $\varPi_\lambda>\boldsymbol{e}^{-\lambda d_\lambda}$ и $\lim_{\lambda\to\infty}d_\lambda=0$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Подпространство* $L\subset \boldsymbol{C}(0,\infty]$ *рядов Дирихле* $\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\boldsymbol{e}^{-\lambda_n x}$ *с действительными коэффициентами, сходящихся во всех точках интервала* $(0,\infty)$, *обладает свойством существования наилучшего приближения в пространстве* $\boldsymbol{C}(0,\infty]$.

Доказательство. Пусть $f\in\boldsymbol{C}(0,\infty]$. Для $0<\varepsilon_n<1$, удовлетворяющих условию $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$, выберем последовательность функций $\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(n)}\boldsymbol{e}^{-\lambda_k x}$ из подпространства L, для которых

$$\|f-\varphi_n\|_{\boldsymbol{C}}<\rho(f,L)_{\boldsymbol{C}}+\varepsilon_n,$$

где $\rho(f,L)_{\boldsymbol{C}}=\inf_{\varphi\in L}\|f-\varphi\|_{\boldsymbol{C}}$ обозначает величину наилучшего приближения функции f по норме пространства $\boldsymbol{C}(0,\infty]$. Тогда имеет место неравенство $\|\varphi_n\|_{\boldsymbol{C}}<\|f\|_{\boldsymbol{C}}+\rho(f,L)_{\boldsymbol{C}}+1=K$ при всех n. Поэтому последовательность функций $\{\varphi_n\}$ является ограниченной в пространстве $\boldsymbol{C}(0,\infty]$.

Покажем, что можно выбрать такую подпоследовательность последовательности $\varphi_n(x)$, для которой при всех $k=0,1,\ldots$ соответствующие последовательности коэффициентов $\{a_k^{(n)}\}$ сходятся. Если $a_k^{(n)}\neq 0$, то функция $\varphi_n(x)$ допускает представление в виде

$$\varphi_n(x)=a_k^{(n)}\left\{\boldsymbol{e}^{-\lambda_k x}+\sum_{\nu\neq k}b_\nu\,\boldsymbol{e}^{-\lambda_\nu x}\right\}\ \text{при всех}\ x>0.$$

Возводя в квадрат и интегрируя это равенство, мы имеем

$$\int_0^\infty |\varphi_n(x)|^2\,d\mu = |a_k^{(n)}|^2 \int_0^\infty \left| \boldsymbol{e}^{-\lambda_k x} + \sum_{\nu\neq k} b_\nu\, \boldsymbol{e}^{-\lambda_\nu x} \right|^2 d\mu\,.$$

Применяя леммы 1 и 2 для оценки снизу последнего интеграла, получим неравенство

$$|a_k^{(n)}| \leqslant \sqrt{2\lambda_k+1}\,\boldsymbol{e}^{\lambda_k d_{\lambda_k}}\, \|\varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_2} < \sqrt{2\lambda_k+1}\,\boldsymbol{e}^{\lambda_k d_{\lambda_k}} K\,.$$

Следовательно, для всех $k = 0, 1, \ldots$ последовательности коэффициентов $\{a_k^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ ограничены. Выбирая сходящиеся подпоследовательности при $k = 0, 1, \ldots$ и применяя диагональный метод Кантора, мы можем считать, что при всех $k = 0, 1, \ldots$ существуют пределы коэффициентов $a_k = \lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}$ и также выполняются неравенства $|a_k| \leqslant \sqrt{2\lambda_k+1}\,\boldsymbol{e}^{\lambda_k d_{\lambda_k}} K$.

Поскольку по условию леммы 2 имеем $\lim_{\lambda_k\to\infty} d_{\lambda_k} = 0$, то верхний предел $\overline{\lim}_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{\lambda_k}} \leqslant 1$. Поэтому ряд Дирихле $\varphi(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k \boldsymbol{e}^{-\lambda_k x}$ сходится абсолютно при всех $x > 0$ [1, с. 115]. Докажем, что последовательность функций $\{\varphi_n\}$ сходится к функции $\varphi(x)$ равномерно на каждом полуинтервале $[b, \infty)$ при $b > 0$. Пусть $x \geqslant b$, тогда получим неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^m |a_k - a_k^{(n)}| + \sum_{k=m+1}^\infty (|a_k| + |a_k^{(n)}|)\, \boldsymbol{e}^{-\lambda_k b}\,.$$

Выберем число m настолько большим, чтобы модули коэффициентов $|a_k|$ и $|a_k^{(n)}|$ не превосходили величины $(2/(1+\boldsymbol{e}^{-b}))^{\lambda_k}$ при всех $k \geqslant m+1$ и n. Это возможно в силу доказанных выше оценок $\overline{\lim}_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{\lambda_k}} \leqslant 1$ и $\overline{\lim}_{k\to\infty} |a_k^{(n)}|^{\frac{1}{\lambda_k}} \leqslant 1$. Тогда вторая сумма в указанном выше неравенстве не превосходит суммы сходящегося числового ряда:

$$\sum_{k=m+1}^\infty (|a_k| + |a_k^{(n)}|)\, \boldsymbol{e}^{-\lambda_n b} \leqslant \sum_{k=m+1}^\infty 2 \left(\frac{2\boldsymbol{e}^{-b}}{1+\boldsymbol{e}^{-b}} \right)^{\lambda_k}.$$

При данном $\varepsilon > 0$ сумма этого ряда меньше, чем $\varepsilon/2$, для достаточно больших m. Теперь при заданном m можно выбрать число N настолько большим, чтобы первая сумма была меньше $\varepsilon/2$ для всех $n \geqslant N$. Таким образом, мы получим неравенство $|\varphi(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon$ для всех $x \geqslant b$ и $n \geqslant N$ и, значит, $\varphi \in L$. Переходя к пределу в неравенстве при $n \to \infty$

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \rho(f, L)_{\boldsymbol{C}} + \varepsilon_n\,, \quad \text{где} \quad x > 0,$$

имеем $|f(x) - \varphi(x)| \leqslant \rho(f, L)_{\boldsymbol{C}}$ при всех $x > 0$. Следовательно, $\|f - \varphi\|_{\boldsymbol{C}} = \rho(f, L)_{\boldsymbol{C}}$ и теорема доказана.

Пусть T — компактное хаусдорфово пространство и $\boldsymbol{C}(T)$ — пространство действительных непрерывных на T функций. Каждый ограниченный функционал $\alpha \in \boldsymbol{C}^*(T)$ имеет каноническую декомпозицию Рисса $\alpha = \alpha_+ - \alpha_-$ и $\|\alpha\| = \alpha_+(1) + \alpha_-(1)$ в виде разности двух положительных функционалов $\alpha_\pm \in \boldsymbol{C}^*(T)$, которые задаются интегралами по положительным регулярным конечным борелевским мерам $\mu_\pm$. При этом полная вариация знакопеременной меры $\mu = \mu_+ - \mu_-$, интеграл по которой задает функционал α, равна $|\mu|(T) = \mu_+(T) + \mu_-(T) = \|\alpha\|$ [5, с. 113].

Как известно, в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ всякое замкнутое подпространство M коразмерности $\operatorname{codim} M = 1$ совпадает с ядром $M = \ker\,\alpha$ ограниченного функционала $\alpha \in \boldsymbol{E}^*$. Такое подпространство M тогда и только тогда обладает свойством существования наилучшего приближения, когда функционал α является *опорным*, т.е. достигает своей нормы на единичном шаре $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{E}$ пространства $\boldsymbol{E}$. В следующей лемме дана характеристика ограниченных опорных функционалов на пространстве $\boldsymbol{C}(T)$.

Лемма 3. *Ненулевой функционал $\alpha \in \boldsymbol{C}^*(T)$ на пространстве $\boldsymbol{C}(T)$ тогда и только тогда является опорным, когда пересечение носителей* $\operatorname{supp}\alpha_+ \cap \operatorname{supp}\alpha_-$ *пусто.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\alpha(f) = \|\alpha\| = |\mu|(T)$, где $\|f\| = 1$ и $\mu = \mu_+ - \mu_-$ есть регулярная борелевская мера, соответствующая α. Если $f(t_0) < 1$ в точке $t_0 \in \operatorname{supp}\alpha_+$, то существует окрестность $O_{t_0} \subset T$, для которой $\mu_+(O_{t_0}) > 0$ и $f(t) < 1$ при всех $t \in O_{t_0}$. Отсюда получаем $\alpha_+(f) < \mu_+(T)$, $-\alpha_-(f) \leqslant \mu_-(T)$ и, следовательно, $\alpha(f) < |\mu|(T)$, что противоречит нашему предположению. Таким образом, $f(t) = 1$ при всех $t \in \operatorname{supp}\alpha_+$ и аналогично $f(t) = -1$ при всех $t \in \operatorname{supp}\alpha_-$. Поскольку функция f непрерывна на T, то множества $f^{-1}(1)$ и $f^{-1}(-1)$ замкнуты и не пересекаются. Так как, кроме того, $\operatorname{supp}\alpha_+ \subset f^{-1}(1)$ и $\operatorname{supp}\alpha_- \subset f^{-1}(-1)$, то пересечение $\operatorname{supp}\alpha_+ \cap \operatorname{supp}\alpha_-$ пусто.

Достаточность. Пусть пересечение носителей $\operatorname{supp}\alpha_+ \cap \operatorname{supp}\alpha_-$ пусто. Применяя теорему Урысона [5, с. 25], можно построить такую функцию $f \in \boldsymbol{C}(T)$, что ее норма $\|f\|_{\boldsymbol{C}} = 1$, $f(t) = 1$ при всех $t \in \operatorname{supp}\alpha_+$, $f(t) = -1$ при всех $t \in \operatorname{supp}\alpha_-$. Тогда получим $\alpha(f) = \alpha_+(f) - \alpha_-(f) = \mu_+(T) + \mu_-(T) = |\mu|(T) = \|\alpha\|$. Лемма доказана.

Обозначим через $M^\perp = \{\alpha \in \boldsymbol{C}^*(T) \mid \alpha(f) = 0,\ f \in M\}$ аннулятор подпространства $M \subset \boldsymbol{C}(T)$ и через $(M^\perp)_\perp = \{f \in \boldsymbol{C}(T) \mid \alpha(f) = 0,\ \alpha \in M^\perp\}$ бианнулятор подпространства M. Тогда $(M^\perp)_\perp = M$ в том и только в том случае, когда подпространство M замкнуто. Для доказательства единственности наилучшего приближения подпространством M в пространстве $\boldsymbol{C}(T)$ обычно используется хорошо известное утверждение (см. [6]), которое приводится в следующей лемме для полноты доказательства теоремы 2.

Лемма 4. *Замкнутое подпространство M пространства $\boldsymbol{C}(T)$ тогда и только тогда не обладает свойством единственности наилучшего приближения в $\boldsymbol{C}(T)$, когда существуют ненулевая функция $g \in M$ и такой ненулевой опорный функционал $\alpha \in M^\perp$, что имеет место включение* $\operatorname{supp}\alpha \subset \operatorname{zero} g$, *где* $\operatorname{zero} g = \{t \in T \mid g(t) = 0\}$ *обозначает множество нулей функции g.*

Доказательство. Необходимость. Если $M \subset \boldsymbol{C}(T)$ не обладает свойством единственности, то найдутся такие $f \in \boldsymbol{C}(T)$ и $g \in M \setminus \{0\}$, что $\|f\| = \|f - g\| = \rho(f, M) = 1$. По теореме Хана–Банаха существует функционал $\alpha \in M^\perp$, такой, что $\alpha(f) = \|\alpha\| = 1$. Как и при доказательстве необходимости леммы 3, мы получим равенства $f(t) = 1$ при $t \in \operatorname{supp}\alpha_+$ и $f(t) = -1$ при $t \in \operatorname{supp}\alpha_-$. Поскольку $\alpha(f - g) = \|\alpha\| = 1$, то аналогично имеем $f(t) - g(t) = 1$ при $t \in \operatorname{supp}\alpha_+$ и $f(t) - g(t) = -1$ при $t \in \operatorname{supp}\alpha_-$. Отсюда вытекает, что $g(t) = 0$ при всех $t \in \operatorname{supp}\alpha$, т.е. $\operatorname{supp}\alpha \subset \operatorname{zero} g$.

Достаточность. Пусть существуют функция $g \in M$, $\|g\| = 1$, и опорный функционал $\alpha \in M^\perp$, $\|\alpha\| = 1$, для которых $\operatorname{supp}\alpha \subset \operatorname{zero} g$. Поскольку функционал α является опорным, то по теореме Урысона [5, с. 25] существует такая функция $h \in \boldsymbol{C}(T)$, что $\|h\| = 1$, $h(t) = 1$ при $t \in \operatorname{supp}\alpha_+$ и $h(t) = -1$ при $t \in \operatorname{supp}\alpha_-$. Пусть $f(t) = h(t)(1 - |g(t)|)$. Так как $f(t) = h(t)$ при всех $t \in \operatorname{supp}\alpha$, то $\alpha(f) = \alpha(h) = 1$. Поскольку $|f(t)| + |g(t)| \leqslant 1 - |g(t)| + |g(t)| = 1$, то мы имеем равенства $\|f\| = \|f \pm g\| = 1$. С другой стороны, так как $\alpha \in M^\perp$, то при всех $\varphi \in M$ выполняется неравенство $\|f - \varphi\| \geqslant \alpha(f - \varphi) = \alpha(f) = 1$. Отсюда получаем $\rho(f, M) = 1$. Таким образом, указанная функция f имеет по крайней мере три элемента наилучшего приближения подпространством M. Лемма доказана.

Пусть $\boldsymbol{C}[0, \infty]$ обозначает замкнутое подпространство в пространстве $\boldsymbol{C}(0, \infty]$, состоящее из всех непрерывных функций, у которых существуют пределы в нуле и в бесконечности. Для каждой последовательности точек $\{x_n\}$ интервала $(0, \infty)$, имеющей предел $\lim x_n = 0$, определим сублинейный функционал $p(f) = \overline{\lim}\, f(x_n)$ при всех $f \in \boldsymbol{C}(0, \infty]$. По теореме Хана–Банаха функционал $\beta_0(f) = \lim f(x_n)$, заданный на $\boldsymbol{C}[0, \infty]$, имеет такое продолжение β на все пространство $\boldsymbol{C}(0, \infty]$, что $\beta(f) = \beta_0(f)$ при всех $f \in \boldsymbol{C}[0, \infty]$ и при этом $\beta(f) \leqslant p(f)$ при всех $f \in \boldsymbol{C}(0, \infty]$. Ясно, что функционал $\beta \in \boldsymbol{C}^*(0, \infty]$ непрерывный и имеет норму $\|\beta\| = \|\beta_0\| = 1$.

Так как функционал $\beta_0 \in \boldsymbol{C}^*[0, \infty]$ является крайней точкой единичного шара в $\boldsymbol{C}^*[0, \infty]$, то множество всех таких продолжений образует в $\boldsymbol{C}^*(0, \infty]$ слабо* замкнутое, выпуклое и крайнее подмножество границы единичного шара $\boldsymbol{S}^* \subset \boldsymbol{C}^*(0, \infty]$ и значит, имеет крайнюю точку. Поэтому в качестве β мы можем взять крайнюю точку шара $\beta \in \operatorname{ex}(\boldsymbol{S}^*)$. Поскольку $\beta(1) = \beta_0(1) = 1$, то функционал β является положительным и удовлетворяет неравенствам $\underline{\lim}\, f(x_n) \leqslant \beta(f) \leqslant \overline{\lim}\, f(x_n)$ при всех $f \in \boldsymbol{C}(0, \infty]$. Он называется *функционалом Банаха*, построенным по последовательности точек $\{x_n\} \subset (0, \infty)$.

Пусть $\delta : (0, \infty] \to \boldsymbol{C}^*(0, \infty]$ обозначает отображение Дирака, при котором каждой точке $x \in (0, \infty]$ соответствует функционал $\delta_x \in \boldsymbol{C}^*(0, \infty]$, определенный по формуле $\delta_x(f) = f(x)$ при всех $f \in \boldsymbol{C}(0,\infty]$. Обозначим далее через $T \subset \boldsymbol{S}^*$ слабое* замыкание множества $\delta(0,\infty]$ всех функционалов Дирака в сопряженном пространстве $\boldsymbol{C}^*(0,\infty]$. Так как $T \subset \boldsymbol{S}^*$, то по теореме Банаха–Алаоглу множество T является компактным хаусдорфовым пространством в слабой* топологии. Легко видеть, что всякий функционал Дирака δ_x является крайней точкой единичного шара $\boldsymbol{S}^*$ и удовлетворяет условию $\delta_x(1) = 1$. Поэтому множество $T \subset \boldsymbol{S}^*$ состоит в точности из всех крайних точек $\sigma \in \mathrm{ex}(\boldsymbol{S}^*)$ единичного шара $\boldsymbol{S}^*$, удовлетворяющих условию $\sigma(1) = 1$ [7, с. 146]. В частности, имеет место включение $\beta \in T$. Пространство T называется *компактификацией Стоуна–Чеха* полуинтервала $(0,\infty]$. Его можно также определить как множество всех ненулевых мультипликативных функционалов на банаховой алгебре $\boldsymbol{C}(0,\infty]$ [5, с. 298].

Пространство T характеризуется следующими свойствами [7, с. 144]:

a) множество $\delta(0,\infty] \subset T$ является всюду плотным в слабой* топологии T;

b) множество $(0,\infty]$ гомеоморфно множеству $\delta(0,\infty]$ в слабой* топологии;

c) оператор $A : \boldsymbol{C}(0,\infty] \to \boldsymbol{C}(T)$, определенный по формуле $Af(\sigma) = \sigma(f)$ при всех $\sigma \in T$ и $f \in \boldsymbol{C}(0,\infty]$, является изометрическим изоморфизмом;

d) оператор $B : \boldsymbol{C}(T) \to \boldsymbol{C}(0,\infty]$, определенный по формуле $Bf(x) = f(\delta_x)$ при всех $x \in (0,\infty]$ и $f \in \boldsymbol{C}(T)$, является изометрическим изоморфизмом;

e) отображения A и B являются слабо* непрерывными и взаимно обратными линейными операторами, т.е. $AB = I|_{\boldsymbol{C}(T)}$ и $BA = I|_{\boldsymbol{C}(0,\infty]}$.

Поскольку пространство $\boldsymbol{C}(0,\infty]$ изометрически изоморфно пространству $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{C}(T)$, то замкнутому подпространству $\boldsymbol{C}[0,\infty] \subset \boldsymbol{C}(0,\infty]$ при этом изоморфизме соответствует замкнутое подпространство $\boldsymbol{E}_0 = A(\boldsymbol{C}[0,\infty]) \subset \boldsymbol{E}$, а всякому ограниченному функционалу $\alpha \in \boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{C}^*(T)$ на пространстве $\boldsymbol{C}^*(T)$ при этом изоморфизме соответствует ограниченный функционал $A^*\alpha \in \boldsymbol{C}^*(0,\infty]$ на пространстве $\boldsymbol{C}^*(0,\infty]$ и их нормы совпадают $\|\alpha\|_{\boldsymbol{E}} = \|A^*\alpha\|_{\boldsymbol{C}(0,\infty]}$.

Сопряженное пространство $\boldsymbol{E}_0^*$ изометрически изоморфно факторпространству $\boldsymbol{E}^*/\boldsymbol{E}_0^{\perp}$. Этот изоморфизм устанавливается следующим образом: для каждого функционала $\eta \in \boldsymbol{E}_0^*$ существует по теореме Хана–Банаха такой функционал $\zeta \in \boldsymbol{E}^*$, что $\zeta|_{\boldsymbol{E}_0} = \eta$ и $\|\zeta\|_{\boldsymbol{E}} = \|\eta\|_{\boldsymbol{E}_0}$. Тогда элемент $\zeta + \boldsymbol{E}_0^{\perp} \in \boldsymbol{E}^*/\boldsymbol{E}_0^{\perp}$ соответствует элементу $\eta \in \boldsymbol{E}_0^*$ при этом изоморфизме. Через $\pi : \boldsymbol{E}^* \to \boldsymbol{E}^*/\boldsymbol{E}_0^{\perp}$ обозначается факторотображение $\pi(\alpha) = \alpha + \boldsymbol{E}_0^{\perp}$ на факторпространство $\boldsymbol{E}^*/\boldsymbol{E}_0^{\perp}$. Ясно, что отображение $\pi : \boldsymbol{E}^* \to \boldsymbol{E}_0^*$ совпадает с оператором ограничения $\alpha|_{\boldsymbol{E}_0}$ функционала α на подпространство $\boldsymbol{E}_0$.

Теорема 2. *Подпространство* $L \subset \boldsymbol{C}(0,\infty]$ *рядов Дирихле* $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \boldsymbol{e}^{-\lambda_n x}$ *с действительными коэффициентами, сходящихся во всех точках интервала* $(0,\infty)$*, является чебышёвским подпространством в пространстве* $\boldsymbol{C}(0,\infty]$.

Доказательство. Свойство существования наилучшего приближения следует из теоремы 1. Так как пространство $\boldsymbol{C}(0,\infty]$ изометрически изоморфно пространству $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{C}(T)$, то его подпространство L изометрически изоморфно подпространству $M = A(L)$ пространства $\boldsymbol{E}$.

Если $M \subset \boldsymbol{E}$ не обладает свойством единственности наилучшего приближения, то согласно лемме 4 существуют такие функции $f \in \boldsymbol{E}$, $g \in M \setminus \{0\}$ и опорный функционал $\alpha \in M^{\perp} \setminus \{0\}$, для которых $\alpha(f) = \|f\| = \|f - g\| = 1$ и $\mathrm{supp}\,\alpha \subset \mathrm{zero}\,g$. Так как функция $\varphi(x) = Bg(x) = g(\delta_x) \in L$ голоморфна во всех точках интервала $(0,\infty)$, то множество ее нулей не более чем счетно и не имеет предельных точек в интервале $(0,\infty)$. Допустим, что 0 является единственной предельной точкой, и упорядочим нули $\{x_n\}$ в порядке убывания. В случае, если множество нулей $\mathrm{zero}\,\varphi = \{x_n\}$ имеет предельную точку в бесконечности, наше предположение приводится к противоречию аналогичным образом и даже более простым способом, так как функция $\varphi(x) \in \boldsymbol{C}(0,\infty]$ имеет предел в бесконечности.

Если 0 является единственной предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, то функционал $\alpha \in M^{\perp}$ представляется в виде суммы ряда $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{\sigma_n} + \alpha_0$, где $\sigma_n = \delta_{x_n} \in T$, а функционал $\alpha_0 \neq 0$ имеет носитель $\mathrm{supp}\,\alpha_0 \subset T \setminus \delta(0,\infty]$. Поскольку сопряженное пространство $\boldsymbol{E}^*$ образует порядково полную банахову решетку, то абсолютная величина функционала равна сумме ряда $|\alpha| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \delta_{\sigma_n} + |\alpha_0|$. Потому его норма определяется по формуле $\|\alpha\| = |\alpha|(1) = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| + |\alpha_0|(1)$. По предположению функционал $\alpha \in M^{\perp}$ аннулирует подпространство $M \subset \boldsymbol{E}$. Следовательно, для всех функций вида $e_n = A\varphi_{\lambda_n} \in M$ выполняется равенство $\alpha(e_n) = A^*\alpha(\varphi_{\lambda_n}) = h(\lambda_n) = 0$, где

$\varphi_\lambda(x) = \boldsymbol{e}^{-\lambda x}$ и

$$h(\lambda) = A^*\alpha(\varphi_\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{\sigma_n}(A\varphi_\lambda) + \alpha_0(A\varphi_\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \boldsymbol{e}^{-\lambda x_n} + \alpha_0(1).$$

Здесь равенства $A^*\delta_{\sigma_n}(\varphi_\lambda) = \delta_{\sigma_n}(A\varphi_\lambda) = A\varphi_\lambda(\sigma_n) = \sigma_n(\varphi_\lambda) = \boldsymbol{e}^{-\lambda x_n}$ вытекают из построения. Равенство $A^*\alpha_0(\varphi_\lambda) = \alpha_0(A\varphi_\lambda) = \alpha_0(1)$ можно вывести из следующего замечания. Так как $A\varphi_\lambda(\sigma) = \sigma(\varphi_\lambda)$ при всех $\sigma \in T$ и функция $A\varphi_\lambda(\delta_x) = \varphi_\lambda(x) = \boldsymbol{e}^{-\lambda x}$, заданная на множестве $\delta(0,\infty] \subset T$, имеет единственное непрерывное продолжение на все T, то ее значения равны $A\varphi_\lambda(\sigma) = 1$ при всех $\sigma \in T \setminus \delta(0,\infty]$. При этом носитель $\operatorname{supp}\alpha_0 \subset T \setminus \delta(0,\infty]$. Отсюда получаем $\alpha_0(A\varphi_\lambda) = \alpha_0(1)$.

Рассмотрим сначала случай, когда не все коэффициенты $\{\alpha_n\}$ равны нулю. Поскольку функция $h(\lambda)$ имеет бесконечное число нулей на интервале $(0,\infty)$, то последовательность коэффициентов $\{\alpha_n\}$ будет иметь бесконечное число перемен знака [8, с. 59]. Покажем, что это невозможно, если функционал α является опорным. В силу леммы 4 достаточно доказать, что функционал Банаха $\beta \in T$, построенный выше по последовательности $\{x_n\}$, принадлежит пересечению носителей $\operatorname{supp}\alpha_+ \cap \operatorname{supp}\alpha_-$.

Предположим обратное, т.е. функционал β не принадлежит одному из носителей $\operatorname{supp}\alpha_\pm$. Тогда существует слабая* окрестность $U_\beta = \{\sigma \in T \mid |(\beta - \sigma)(f_i)| < \varepsilon,\, i = 1, \dots, n\}$, где функции $f_i \in \boldsymbol{E}$, для которой пересечение $U_\beta \cap \operatorname{supp}\alpha_\pm$ пусто. Если $F = \operatorname{sp}\{f_1, \dots, f_n, \boldsymbol{E}_0\}$ обозначает линейную оболочку, то $F = \boldsymbol{E}_0 \oplus G$ является прямой суммой подпространств $\boldsymbol{E}_0$ и $G = \operatorname{sp}\{g_1, \dots, g_m\}$, где $\{g_1, \dots, g_m\}$ образует базис G и $m \leqslant n$. Введем функционалы Дирака $\delta_{g_j} \in \boldsymbol{E}^{**}$, определенные на сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}^*$, и докажем, что ограничения этих функционалов $\delta_{g_j}|_{\boldsymbol{E}_0^\perp}$ на подпространство $\boldsymbol{E}_0^\perp$ линейно независимы при $j = 1, \dots, m$. В самом деле, предположим, что существуют такие числа c_j, что выполняется равенство $\sum_{j=1}^m c_j \delta_{g_j}|_{\boldsymbol{E}_0^\perp} = 0$. Поскольку в силу замкнутости подпространства $\boldsymbol{E}_0$ мы имеем $\boldsymbol{E}_0 = (\boldsymbol{E}_0^\perp)_\perp$, то $\sum_{j=1}^m c_j g_j \in \boldsymbol{E}_0$. Поэтому из того, что пересечение $G \cap \boldsymbol{E}_0 = 0$ равно нулю, и из линейной независимости функций $\{g_j\}_{j=1}^m$ вытекают равенства $c_j = 0$ при $j = 1, \dots, m$.

Ввиду линейной независимости функций $\{g_j\}_{j=1}^m$ для каждого функционала $\sigma \in T$ найдется такой функционал $\gamma \in \boldsymbol{E}_0^\perp$, что $\gamma(g_j) = (\beta - \sigma)(g_j)$ при $j = 1, \dots, m$ [9, с. 82]. По построению подпространства G найдутся такие числа λ_{ij} и функции $h_i \in \boldsymbol{E}_0$, что $f_i = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} g_j + h_i$. Поэтому выполняются равенства $(\beta - \sigma - \gamma)(f_i) = (\beta - \sigma)(h_i)$ при $i = 1, \dots, n$. Пусть $O_\beta = \{\sigma \in T \mid |(\beta - \sigma)(h_i)| < \varepsilon,\, i = 1, \dots, n\}$ обозначает слабую* окрестность функционала $\beta \in T$ на компакте T. Поскольку функции $h_i \in \boldsymbol{E}_0$ при всех $i = 1, \dots, n$, то O_β является слабой* окрестностью в факторпространстве $\boldsymbol{E}_0^* = \boldsymbol{E}^*/\boldsymbol{E}_0^\perp$. При этом по доказанному выше выполняется включение $O_\beta \subset U_\beta + \boldsymbol{E}_0^\perp$.

Поскольку функционал $\sigma_n \in \operatorname{supp}\alpha$, имеет место $\sigma_n \notin U_\beta$. Покажем, что функционал σ_n не принадлежит факторокрестности $U_\beta + \boldsymbol{E}_0^\perp$. Допустим, что $\zeta = \sigma_n + \eta$, где $\zeta \in U_\beta$, $\eta \in \boldsymbol{E}_0^\perp$ и $\eta \neq 0$. Тогда получим $A^*\zeta(f) = f(x_n)$ для всех $f \in \boldsymbol{E}_0$. Так как носитель $\operatorname{supp}\sigma_n$ состоит из одной точки и не пересекается с носителем $\operatorname{supp}\eta$ в силу того, что $\eta \in \boldsymbol{E}_0^\perp$, норма функционала $\|\zeta\| = \|\sigma_n\| + \|\eta\| = 1 + \|\eta\| > 1$, что невозможно, поскольку $\zeta \in T$ имеет норму $\|\zeta\| = 1$.

Таким образом, имеет место $\delta_{x_n} \notin O_{\beta_0} = \pi(O_\beta)$ при всех n. Однако это противоречит равенству $\lim_{n\to\infty} \delta_{x_n}(f) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \beta_0(f)$ для всех $f \in \boldsymbol{E}_0$, из которого следует, что во всякой слабой* окрестности функционала $\beta_0 \in \boldsymbol{E}_0^* = \boldsymbol{E}^*/\boldsymbol{E}_0^\perp$ существуют точки δ_{x_n}. Отсюда вытекает, что функционал $\beta \in T$ принадлежит пересечению носителей $\operatorname{supp}\alpha_+ \cap \operatorname{supp}\alpha_-$ и, значит, в силу леммы 3 функционал α не является опорным.

Предположим теперь, что все коэффициенты $\alpha_n = 0$ равны нулю. В этом случае функционал $\alpha \in \boldsymbol{E}_0^\perp$, а его носитель $\operatorname{supp}\alpha \subset T \setminus \delta(0,\infty]$. Поскольку $\alpha(f) = \|f\| = 1$, существуют такие убывающие последовательности точек $\{y_k^\pm\} \subset (0,\infty)$, что $\lim_{k\to\infty} y_k^\pm = 0$ и $\lim_{k\to\infty} f(\delta_{y_k^\pm}) = \pm 1$ соответственно. Определим последовательность точек $x_n = y_k^+$ при $n = 2k$ и $x_n = y_k^-$ при $n = 2k-1$, для которой $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. В силу слабой* компактности множества T предельные точки последовательности $\{\delta_{x_n}\}$ принадлежат носителю функционала α.

Поскольку по построению окрестность U_β не пересекается с носителем $\operatorname{supp}\alpha_\pm$, она не содержит предельных точек последовательности $\{\delta_{x_n}\}$. Этим же свойством будет обладать факторокрестность $O_\beta = U_\beta + \boldsymbol{E}_0^\perp$. Таким образом, окрестность $O_{\beta_0} = \pi(O_\beta)$ не содержит предельных точек последовательности $\{\delta_{x_n}\}$ в сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}_0^*$. Однако это противоречит равенству $\lim_{n\to\infty}\delta_{x_n}(f) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \beta_0(f)$ при всех $f \in \boldsymbol{E}_0$, из которого следует, что функционал $\beta_0 \in \boldsymbol{E}_0^*$ является предельной точкой последовательности $\{\delta_{x_n}\}$. Поэтому функционал β принадлежит пересечению носителей $\operatorname{supp}\alpha_+ \cap \operatorname{supp}\alpha_-$ и, значит, в силу леммы 3 функционал α не является опорным. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
2. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимаций. М.: Наука, 1965.
3. *Clarkson J.A., Erdos P.* Approximation by polynomials // Duke. Math. J. 1943. **10**. 5–11.
4. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. I. М.: Наука, 1978.
5. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. I. М.: ИЛ, 1962.
6. *Phelps R.* Chebyshev subspace of finite codimension in $\boldsymbol{C}(X)$ // Pacif. J. Math. 1963. **13**, N 2. 647–655.
7. *Дэй М.* Нормированные линейные пространства. М.: ИЛ, 1961.
8. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. II. М.: Наука, 1978.
9. *Райков Д.А.* Векторные пространства. М.: ГИФМЛ, 1962.

Поступила в редакцию
05.05.2023

УДК 517.968.722

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА–ФЕЛЛЕРА, ВОЗНИКАЮЩЕГО В МОДЕЛИ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ

О. С. Розанова[1]

Рассмотрено уравнение Колмогорова–Феллера, описывающее плотность марковского процесса на полуоси, возникающего в важных задачах биологии. Этот процесс состоит из случайных скачков, распределенных согласно закону Лапласа, и детерминированной реверсии к нулю. Показано, что функция Грина для такого уравнения может быть найдена в виде ряда, а при некоторых соотношениях параметров и в явном виде. Это позволяет отыскать в явном виде решения уравнения Колмогорова–Феллера при многих начальных данных.

Ключевые слова: плотность вероятности, экспрессия генов, уравнение Колмогорова–Феллера, фундаментальное решение, точное решение.

The Kolmogorov–Feller equation for the probability density of a Markov process on a half-axis, which arises in important problems of biology, is considered. This process consists of random jumps distributed according to Laplace's law and a deterministic return to zero. It is shown that the Green's function for such an equation can be found both in the form of a series and in explicit form for some ratios of the parameters. This allows one to find explicit solutions to the Kolmogorov–Feller equation for many initial data.

Key words: probability density, gene expression, Kolmogorov–Feller equation, fundamental solution, exact solution.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-6-3

Введение и постановка задачи. В клетках всех живых организмов содержатся три основные макромолекулы: ДНК, мРНК и белки. Матричная рибонуклеиновая кислота (мРНК) содержит

[1] *Розанова Ольга Сергеевна* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. дифференциальных уравнений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: olga.rozanova@math.msu.ru.

Rozanova Olga Sergeevna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Equations.