СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лейбензон Л.С.* Курс теории упругости. М.: Наука, 1947.
2. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.
4. *Победря Б.Е., Шешенин С.В., Холматов Т.* Задача в напряжениях. Ташкент: ФАН, 1988.
5. *Георгиевский Д.В.* Построение обобщенных формул Чезаро для конечных плоских деформаций // Прикл. мех. и техн. физ. 2014. **55**, № 3. 140–145.
6. *Георгиевский Д.В.* Уравнения совместности в системах, основанных на обобщенных кинематических соотношениях Коши // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2014. № 1. 127–132.
7. *Georgievskii D.V., Pobedrya B.E.* On the compatibility equations in terms of stresses in many-dimensional elastic medium // Russ. J. Math. Phys. 2015. **22**, N 1. 6–8.
8. *Cesăro E.* Sulle formole del Volterra, fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche // Rend. Accad. Napoli. 1906. **12**, N 1. 311–321.
9. *Poynting J.H.* On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears, and on the lengthening on loaded wires when twisted // Proc. Roy. Soc. London. A. 1909. **82**, N 557. 546–559.

Поступила в редакцию
10.03.2023

УДК 539.3+531.53+532.23

О ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ ЛАГРАНЖА МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

А. В. Романов[1]

В рамках теории микрополярного континуума с использованием вариационного принципа Лагранжа, метода Ритца и кусочно-полиномиальных базисных функций серендипова семейства получены компоненты тензорно-блочной матрицы жесткости и составлена система линейных алгебраических уравнений для анизотропного и изотропного материалов с центром симметрии при неизотермических процессах.

Ключевые слова: микрополярная среда, континуум Коссера, несимметричная теория упругости, вариационный принцип, тензор изгиба-кручения, тензор моментных напряжений, метод конечных элементов, матрица жесткости, неизотермический процесс.

In this paper, a variational principle of Lagrange, the Ritz method and piecewise polynomial serendipity shape functions are used to obtain a stiffness matrix and a system of linear algebraic equations in the micropolar theory of elasticity for anisotropic, isotropic and centrally symmetric material in case of a non isothermal process.

Key words: micropolar continuum, Cosserat continuum, theory of asymmetric elasticity, variational principle, rotation gradient tensor, couple stress tensor, finite element method, stiffness matrix, non isothermal process.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-12

1. Вариационный принцип Лагранжа. Обобщим задачу минимизации функционала Лагранжа классической теории упругости [1, 2] на микрополярную среду:

$$L(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi})\leqslant L(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}),\quad L(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi})=\frac{1}{2}\,a(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi};\,\mathbf{w},\boldsymbol{\psi})-l(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}),\quad \forall\,\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}\colon\ \mathbf{w},\boldsymbol{\psi}\,|_{\Sigma_1}=0 \tag{1}$$

и запишем условия стационарности:

$$DL(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi};\,\mathbf{w},\boldsymbol{\psi})=0, \tag{2}$$

[1] *Романов Александр Вячеславович* — науч. сотр. каф. механики композитов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: atomicra@ya.ru.

Romanov Aleksandr Vyacheslavovich — Scientific Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Composite Mechanics.

где D — дифференциал Гато; $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varphi}$ — действительная кинематическая система независимых векторов перемещений и микровращений (далее вращений) соответственно; $\mathbf{w}$, $\boldsymbol{\psi}$ — кинематически допустимая система векторов, т.е. возможные перемещения и вращения из того же пространства, что и $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varphi}$. При формулировке вариационного принципа Лагранжа аналогично классической теории потребуем выполнения кинематических соотношений и кинематических граничных условий [1, 3–9]

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla\mathbf{u} - \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}} = \nabla\boldsymbol{\varphi}, \quad \mathbf{u}\,|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\varphi}\,|_{\Sigma_1} = \boldsymbol{\varphi}_0,$$

а из условий стационарности (2) следуют уравнения равновесия и статические граничные условия:

$$\nabla\cdot\underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{F} = 0, \quad \nabla\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} + \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{P}}\,|_{\Sigma_2} = \mathbf{S}, \quad \mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}\,|_{\Sigma_2} = \mathbf{R},$$

где $\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}}$ — тензор деформации микрополярной теории упругости; $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}}$ — тензор изгиба-кручения; $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ — тензор напряжений второго ранга; $\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}$ — тензор моментных напряжений второго ранга; $\underset{\simeq}{\mathbf{C}}$ — дискриминантный тензор третьего ранга (тензор Леви-Чивиты); $\mathbf{F}$ — вектор массовой силы; $\mathbf{m}$ — вектор массовых пар; ρ — плотность среды; $\overset{2}{\otimes}$ — знак внутреннего 2-произведения [10]; Σ — поверхность тела ($\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$); $\mathbf{S}$ — вектор поверхностной силы; $\mathbf{R}$ — вектор поверхностных пар; $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности тела. Кроме того, в силу симметрии функционала a из условий стационарности (2) также следуют интегральные тождества

$$\begin{gathered}
a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi};\, \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}), \\
a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi};\, \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = \int\limits_V [\,\underset{\sim}{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) \overset{2}{\otimes} (\nabla\mathbf{w} - \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi}) + \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\varphi}) \overset{2}{\otimes} \nabla\boldsymbol{\psi}\,]dV, \\
l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = \int\limits_V \rho(\mathbf{F}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\psi})dV + \int\limits_{\Sigma_2} (\mathbf{S}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\psi})d\Sigma,
\end{gathered}$$

где V — объем тела. Если приняты тождества $\mathbf{w} = \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}$, то $a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi})$ есть энергия упругих деформаций и изгиба-кручения; $l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi})$ — работа внешних сил на соответствующих перемещениях и вращениях.

2. Потенциал деформаций и изгибов-кручений. Заметим, что в силу существования оператора (потенциала) деформаций и изгибов-кручений немедленно возникают определяющие соотношения для материалов с центром симметрии при изотермических процессах [6–9]:

$$\check{W}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}}) = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}} \overset{2}{\otimes} \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}} \overset{2}{\otimes} \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}}\right), \quad \underset{\sim}{\mathbf{P}} = \frac{\partial\check{W}}{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial\check{W}}{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}}} \quad \left(\underset{\approx}{\mathbf{A}} = \underset{\approx}{\mathbf{A}}^T, \quad \underset{\approx}{\mathbf{D}} = \underset{\approx}{\mathbf{D}}^T\right),$$

где $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$, $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$ — материальные тензоры четвертого ранга. При неизотермических процессах в силу обобщенного принципа Дюамеля–Неймана [6, 11] оператор (потенциал) деформаций можно представить в виде

$$\begin{gathered}
\check{W}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}}) = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}} \overset{2}{\otimes} \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}} \overset{2}{\otimes} \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}}\right) + \left(\underset{\sim}{\mathbf{P}}_0 - \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{a}}\vartheta\right) \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}} + \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_0 - \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{b}}\vartheta\right) \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}} + \\
+ \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{a}} \overset{2}{\otimes} \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{a}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{b}} \overset{2}{\otimes} \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{b}}\right)\vartheta^2,
\end{gathered}$$

где $\underset{\sim}{\boldsymbol{a}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{b}}$ — тензоры теплового расширения; ϑ — перепад температуры; $\underset{\sim}{\mathbf{P}}_0$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_0$ — тензоры, либо образованные источниками немеханической природы, либо являющиеся результатом решения несвязанных задач. Тогда при неизотермических процессах функционал Лагранжа (1) примет вид

$$\begin{gathered}
L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{2}\,[\; a(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi};\, \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) + h \;] + l_0(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) - l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}), \\
h = \int\limits_V [\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{a}} \overset{2}{\otimes} \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{a}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{b}} \overset{2}{\otimes} \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{b}}\right)\vartheta^2]dV, \\
l_0(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = \int\limits_V [\left(\underset{\sim}{\mathbf{P}}_0 - \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{a}}\vartheta\right) \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) + \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_0 - \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{b}}\vartheta\right) \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}}(\boldsymbol{\psi})]dV.
\end{gathered} \tag{3}$$

Для изотропного материала компоненты тензоров $\underset{\sim}{\boldsymbol{a}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{b}}$ принимают выражения $a_{ij} = \alpha_\tau\, g_{ij}$, $b_{ij} = \beta_\tau\, g_{ij}$, где α_τ, β_τ — коэффициенты линейного теплового расширения.

3. Изотропные тензоры четвертого ранга. В этом случае каждый тензор микрополярного материала с центром симметрии имеет по 3 независимые компоненты [3, 10]:

$$\begin{aligned} A^{ijkl} &= \lambda\, g^{ij}g^{kl} + \mu\, \left(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}\right) + \alpha\, \left(g^{ik}g^{jl} - g^{il}g^{jk}\right), \\ D^{ijkl} &= \delta\, g^{ij}g^{kl} + \gamma\, \left(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}\right) + \beta\, \left(g^{ik}g^{jl} - g^{il}g^{jk}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

где λ, μ, α, δ, γ, β — материальные параметры среды; g^{ij} — компоненты единичного тензора.

4. Система линейных алгебраических уравнений. Применив метод Ритца и записав критерий стационарности для лагранжиана (3), а также воспользовавшись ранее принятыми обозначениями в работах [12, 13], придем к системе линейных алгебраических уравнений для материала с центром симметрии произвольной анизотропии при неизотермических процессах:

$$DL(\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{\boldsymbol{\psi}}) = 0, \quad \begin{cases} +\underset{(1)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq}\widehat{w}^p_l - \underset{(2)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq}\widehat{\psi}^p_l = \underset{(1)}{\mathbb{F}}{}^{\,j}_{q} - \underset{(1)}{\mathbb{T}}{}^{\,j}_{q} \\ -\underset{(3)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq}\widehat{w}^p_l + \underset{(4)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq}\widehat{\psi}^p_l = \underset{(2)}{\mathbb{F}}{}^{\,j}_{q} - \underset{(2)}{\mathbb{T}}{}^{\,j}_{q}, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \underset{(1)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq} & -\underset{(2)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq} \\ -\underset{(3)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq} & \underset{(4)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{w}^p_l \\ \widehat{\psi}^p_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{(1)}{\mathbb{F}}{}^{\,j}_{q} - \underset{(1)}{\mathbb{T}}{}^{\,j}_{q} \\ \underset{(2)}{\mathbb{F}}{}^{\,j}_{q} - \underset{(2)}{\mathbb{T}}{}^{\,j}_{q} \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

где компоненты тензорно-блочных матриц жесткости и векторов сил имеют вид:

$$\begin{aligned} &\underset{(1)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq} = \int\limits_{V_e} A^{ijkl}N_{p,s}N_{q,t}\, B^s_kB^t_iJ\, dV_\xi, \quad \underset{(2)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq} = \int\limits_{V_e} A^{ijkm}C^{\cdot\cdot l}_{km\cdot}N_pN_{q,t}B^t_iJ\, dV_\xi, \\ &\underset{(3)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq} = \int\limits_{V_e} A^{inkl}N_{p,s}C^{\cdot\cdot j}_{in\cdot}N_qB^s_kJ\, dV_\xi, \\ &\underset{(4)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq} = \int\limits_{V_e} \left[A^{inkm}N_pN_qC^{\cdot\cdot l}_{km\cdot}C^{\cdot\cdot j}_{in\cdot} + D^{ijkl}N_{p,s}N_{q,t}B^s_kB^t_i\right] J\, dV_\xi, \\ &\underset{(1)}{\mathbb{F}}{}^{\,j}_{q} = \int\limits_{V_e} F^jN_qJ\rho\, dV_\xi + \int\limits_{\Sigma_2} S^jN_qJ_\Sigma\, d\Sigma_\xi, \quad \underset{(2)}{\mathbb{F}}{}^{\,j}_{q} = \int\limits_{V_e} m^jN_qJ\rho\, dV_\xi + \int\limits_{\Sigma_2} R^jN_qJ_\Sigma\, d\Sigma_\xi, \\ &\underset{(1)}{\mathbb{T}}{}^{\,j}_{q} = \int\limits_{V_e} \left(P^{ij}_0 - A^{ijkl}\, a_{kl}\, \vartheta\right) N_{q,t}B^t_iJ\, dV_\xi, \\ &\underset{(2)}{\mathbb{T}}{}^{\,j}_{q} = \int\limits_{V_e} \left[\left(A^{inkl}\, a_{kl}\, \vartheta - P^{in}_0\right) C^{\cdot\cdot j}_{in\cdot}N_q + \left(\mu^{ij}_0 - D^{ijkl}\, b_{kl}\, \vartheta\right) N_{q,t}B^t_i\right] J\, dV_\xi. \end{aligned} \tag{6}$$

5. Компоненты тензорно-блочной матрицы жесткости и вектора сил. Учитывая (6) и соответствующие выражения компонент изотропных материальных тензоров (4), а также запись производных функций форм по декартовым координатам [12], для компонент $\underset{(1)}{K}{}^{lj}_{pq} - \underset{(4)}{K}{}^{lj}_{pq}$, $\underset{(1)}{T}{}^{\,j}_{q}$, $\underset{(2)}{T}{}^{\,j}_{q}$ будем иметь

$$\begin{aligned} &\underset{(1)}{K}{}^{lj}_{pq} = \lambda\, N_{p,l}N_{q,j} + (\mu+\alpha)\, N_{p,i}N_{q,i}\, \delta_{jl} + (\mu-\alpha)\, N_{p,j}N_{q,l}, \\ &\underset{(2)}{K}{}^{lj}_{pq} = -2\alpha\, \epsilon_{lji}\, N_pN_{q,i}, \quad \underset{(3)}{K}{}^{lj}_{pq} = 2\alpha\, \epsilon_{ljk}\, N_{p,k}N_q, \\ &\underset{(4)}{K}{}^{lj}_{pq} = \delta\, N_{p,l}N_{q,j} + (\gamma+\beta)\, N_{p,i}N_{q,i}\, \delta_{jl} + (\gamma-\beta)\, N_{p,j}N_{q,l} + 4\alpha\, N_pN_q\delta_{lj}, \\ &\underset{(1)}{T}{}^{\,j}_{q} = \left(P^{ij}_0 - (3\lambda+2\mu)\, \delta_{ij}\, \alpha_\tau\vartheta\right) N_{q,i}, \quad \underset{(2)}{T}{}^{\,j}_{q} = \left(\mu^{ij}_0 - (3\delta+2\gamma)\, \delta_{ij}\, \beta_\tau\vartheta\right) N_{q,i} - P^{in}_0\epsilon_{inj}\, N_q. \end{aligned} \tag{7}$$

Придавая значения индексам l и j из формулы (7), для $\underset{(1)}{K}{}^{lj}_{pq}$ получим

$$\begin{aligned} &\underset{(1)}{K}{}^{11}_{pq} = (\lambda+2\mu)\, N_{p,1}N_{q,1} + (\mu+\alpha)\, (N_{p,2}N_{q,2} + N_{p,3}N_{q,3}), \; \underset{(1)}{K}{}^{12}_{pq} = \lambda\, N_{p,1}N_{q,2} + (\mu-\alpha)\, N_{p,2}N_{q,1}, \\ &\underset{(1)}{K}{}^{22}_{pq} = (\lambda+2\mu)\, N_{p,2}N_{q,2} + (\mu+\alpha)\, (N_{p,3}N_{q,3} + N_{p,1}N_{q,1}), \; \underset{(1)}{K}{}^{21}_{pq} = \lambda\, N_{p,2}N_{q,1} + (\mu-\alpha)\, N_{p,1}N_{q,2}, \\ &\underset{(1)}{K}{}^{33}_{pq} = (\lambda+2\mu)\, N_{p,3}N_{q,3} + (\mu+\alpha)\, (N_{p,1}N_{q,1} + N_{p,2}N_{q,2}), \\ &\underset{(1)}{K}{}^{13}_{pq} = \lambda\, N_{p,1}N_{q,3} + (\mu-\alpha)\, N_{p,3}N_{q,1}, \quad \underset{(1)}{K}{}^{23}_{pq} = \lambda\, N_{p,2}N_{q,3} + (\mu-\alpha)\, N_{p,3}N_{q,2}, \\ &\underset{(1)}{K}{}^{31}_{pq} = \lambda\, N_{p,3}N_{q,1} + (\mu-\alpha)\, N_{p,1}N_{q,3}, \quad \underset{(1)}{K}{}^{32}_{pq} = \lambda\, N_{p,3}N_{q,2} + (\mu-\alpha)\, N_{p,2}N_{q,3}. \end{aligned} \tag{8}$$

Если положим $\alpha = 0$, то из (8) определим компоненты матрицы жесткости классической трехмерной теории упругости [11], образующие систему линейных алгебраических уравнений вида $\underset{(1)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq}\, \widehat{w}^p_l = \underset{(1)}{\mathbb{F}}{}^j_q$. Аналогично выпишем компоненты для кососимметричных тензоров $\underset{(2)}{K}{}^{lj}_{pq}$ и $\underset{(3)}{K}{}^{lj}_{pq}$ поэлементно:

$$
\begin{aligned}
&\underset{(2)}{K}{}^{\alpha\alpha}_{pq} = \underset{(3)}{K}{}^{\alpha\alpha}_{pq} = 0, \quad \langle \alpha = 1,2,3 \rangle\,,\\
&\underset{(2)}{K}{}^{12}_{pq} = -2\alpha\, N_p N_{q,3}, \quad \underset{(2)}{K}{}^{13}_{pq} = +2\alpha\, N_p N_{q,2}, \quad \underset{(2)}{K}{}^{23}_{pq} = -2\alpha\, N_p N_{q,1},\\
&\underset{(2)}{K}{}^{21}_{pq} = +2\alpha\, N_p N_{q,3}, \quad \underset{(2)}{K}{}^{31}_{pq} = -2\alpha\, N_p N_{q,2}, \quad \underset{(2)}{K}{}^{32}_{pq} = +2\alpha\, N_p N_{q,1},\\
&\underset{(3)}{K}{}^{12}_{pq} = +2\alpha\, N_{p,3} N_q, \quad \underset{(3)}{K}{}^{13}_{pq} = -2\alpha\, N_{p,2} N_q, \quad \underset{(3)}{K}{}^{23}_{pq} = +2\alpha\, N_{p,1} N_q,\\
&\underset{(3)}{K}{}^{21}_{pq} = -2\alpha\, N_{p,3} N_q, \quad \underset{(3)}{K}{}^{31}_{pq} = +2\alpha\, N_{p,2} N_q, \quad \underset{(3)}{K}{}^{32}_{pq} = -2\alpha\, N_{p,1} N_q.
\end{aligned}
$$

Компоненты для $\underset{(4)}{K}{}^{lj}_{pq}$ поэлементно:

$$
\begin{aligned}
&\underset{(4)}{K}{}^{11}_{pq} = (\delta + 2\gamma)\, N_{p,1}N_{q,1} + (\gamma + \beta)\, (N_{p,2}N_{q,2} + N_{p,3}N_{q,3}) + 4\alpha\, N_p N_q,\\
&\underset{(4)}{K}{}^{22}_{pq} = (\delta + 2\gamma)\, N_{p,2}N_{q,2} + (\gamma + \beta)\, (N_{p,3}N_{q,3} + N_{p,1}N_{q,1}) + 4\alpha\, N_p N_q,\\
&\underset{(4)}{K}{}^{33}_{pq} = (\delta + 2\gamma)\, N_{p,3}N_{q,3} + (\gamma + \beta)\, (N_{p,1}N_{q,1} + N_{p,2}N_{q,2}) + 4\alpha\, N_p N_q,\\
&\underset{(4)}{K}{}^{12}_{pq} = \delta\, N_{p,1}N_{q,2} + (\gamma - \beta)\, N_{p,2}N_{q,1}, \; \underset{(4)}{K}{}^{13}_{pq} = \delta\, N_{p,1}N_{q,3} + (\gamma - \beta)\, N_{p,3}N_{q,1},\\
&\underset{(4)}{K}{}^{23}_{pq} = \delta\, N_{p,2}N_{q,3} + (\gamma - \beta)\, N_{p,3}N_{q,2}, \; \underset{(4)}{K}{}^{21}_{pq} = \delta\, N_{p,2}N_{q,1} + (\gamma - \beta)\, N_{p,1}N_{q,2},\\
&\underset{(4)}{K}{}^{31}_{pq} = \delta\, N_{p,3}N_{q,1} + (\gamma - \beta)\, N_{p,1}N_{q,3}, \; \underset{(4)}{K}{}^{32}_{pq} = \delta\, N_{p,3}N_{q,2} + (\gamma - \beta)\, N_{p,2}N_{q,3}.
\end{aligned}
$$

Компоненты для $\underset{(1)}{T}{}^j_q$, $\underset{(2)}{T}{}^j_q$ поэлементно:

$$
\begin{aligned}
&\underset{(1)}{T}{}^1_q = \left(P_0^{11} - (3\lambda + 2\mu)\,\alpha_\tau\vartheta\right) N_{q,1} + P_0^{21} N_{q,2} + P_0^{31} N_{q,3},\\
&\underset{(1)}{T}{}^2_q = \left(P_0^{22} - (3\lambda + 2\mu)\,\alpha_\tau\vartheta\right) N_{q,2} + P_0^{32} N_{q,3} + P_0^{12} N_{q,1},\\
&\underset{(1)}{T}{}^3_q = \left(P_0^{33} - (3\lambda + 2\mu)\,\alpha_\tau\vartheta\right) N_{q,3} + P_0^{13} N_{q,1} + P_0^{23} N_{q,2},\\
&\underset{(2)}{T}{}^1_q = \left(\mu_0^{11} - (3\delta + 2\gamma)\,\beta_\tau\vartheta\right) N_{q,1} + \mu_0^{21} N_{q,2} + \mu_0^{31} N_{q,3} - \left(P_0^{23} - P_0^{32}\right) N_q,\\
&\underset{(2)}{T}{}^2_q = \left(\mu_0^{22} - (3\delta + 2\gamma)\,\beta_\tau\vartheta\right) N_{q,2} + \mu_0^{32} N_{q,3} + \mu_0^{12} N_{q,1} - \left(P_0^{31} - P_0^{13}\right) N_q,\\
&\underset{(2)}{T}{}^3_q = \left(\mu_0^{33} - (3\delta + 2\gamma)\,\beta_\tau\vartheta\right) N_{q,3} + \mu_0^{13} N_{q,1} + \mu_0^{23} N_{q,2} - \left(P_0^{12} - P_0^{21}\right) N_q.
\end{aligned}
$$

6. Выводы. С учетом выражений изотропных тензоров $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$, $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$ микрополярной теории упругости для материалов с центром симметрии при неизотермических процессах получены компоненты тензорно-блочной матрицы жесткости и вектора сил, которые впоследствии используются для составления системы линейных алгебраических уравнений (5), (6) и нахождения неизвестных векторов макроперемещений и микровращений. Данные результаты могут быть актуальны для исследования задач наномеханики микрополярного континуума с целью изучения механических свойств материала методом конечных элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности: Учеб. пособие. 2-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1995.
2. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.
4. *Eringen A.C.* Microcontinuum Field Theories.1. Foundation and Solids. N.Y.: Springer-Verlag, 1999.
5. *Lakes R.* Cosserat micromechanics of structured media: Experimental methods // Proc. Amer. Soc. Composites. 3rd Technical Conf., Sept. 25–29. Seatle, 1988. 505–516.

6. *Никабадзе М.У.* Развитие метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. М.: Изд-во Попечительского совета мех.-мат. ф-та МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014 (URL: https://istina.msu.ru/publications/book/6738800/).
7. *Nikabadze M., Ulukhanyan A.* Some variational principles in the three-dimensional micropolar theories of solids and thin solids // Theoretical Analyses, Computations, and Experiments of Multiscale Materials. Vol. 175. Advanced Structured Materials. Switzerland, 2022. 193–251 (URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-04548-6_11).
8. *Nikabadze M., Ulukhanyan A.* On some variational principles in micropolar theories of single-layer thin bodies // Continuum Mechanics and Thermodynamics. Germany, 2022 (URL: https://doi.org/10.1007/s00161-022-01089-5).
9. *Nikabadze M., Ulukhanyan A.* Generalized Reissner-type variational principle in the micropolar theories of multilayer thin bodies with one small size // Continuum Mechanics and Thermodynamics. Germany. 2022. **34**. N 2 (URL: https://doi.org/10.1007/s00161-022-01091-x).
10. *Nikabadze M.U.* Topics on tensor calculus with applications to mechanics // J. Math. Sci. 2017. **225**. 1–194 (URL: https://doi.org/10.1007/s10958-017-3467-4).
11. *Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J.Z.* The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013.
12. *Романов А.В.* О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости в случае трансверсально-изотропной среды // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2022. № 4. 35–39.
13. *Романов А.В.* О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости в случае ортотропной среды // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. № 1. 68–72.

Поступила в редакцию
23.03.2023