УДК 539.3

ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ЧЕЗАРО И УРАВНЕНИЯ СОВМЕСТНОСТИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

С. А. Лурье[1], П. А. Белов[2]

Рассматривается классическая проблема теории упругости об условиях совместности деформаций, обеспечивающих определение непрерывного поля перемещений упругого тела по полю деформаций. Построены обобщенные представления Чезаро, позволяющие с точностью до квадратичных полиномов определить поле перемещений через интегро-дифференциальные операторы от компонент тензора-девиатора деформаций. Установлено, что квадратуры и для псевдовектора локальных поворотов, и для деформации изменения объема полностью задаются полем девиатора деформаций. Представлены условия существования перечисленных квадратур, которые записываются в виде пяти уравнений совместности третьего дифференциального порядка относительно пяти компонент тензора-девиатора деформаций.

Ключевые слова: кинематическая модель, соотношения Коши, формулы Чезаро, уравнения совместности Сен-Венана, уравнения совместности третьего порядка.

We consider the classical problem of elasticity theory concerning the conditions of compatibility deformations, which ensure the determination of a continuous field of displacements of an elastic body by the deformation field. We construct generalized Cesaro representations that allow one to define the displacement field through integro-differential operators on the components of the strain tensor deviator with an accuracy up to quadratic polynomials. It has been established that the quadratures both for the pseudovector of local rotations and for the volume change deformation are completely determined by the deformation deviator field. We present the conditions for the existence of the listed quadratures, which are written in the form of five third differential order coincidence equations with respect to the five components of the strain tensor-deviator.

Key words: kinematic model, Cauchy relations, Cesaro formulas, Saint-Venant's compatibility equations, third-order compatibility equations.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-11

Введение. В классической механике деформируемого твердого тела особое место занимают задачи теории упругости в напряжениях. Проблеме построения решения в напряжениях традиционно отводятся специальные разделы во всех фундаментальных трудах по теории упругости [1–3]. Обоснование этому приводится, в частности, в монографии [4]. Постановке задачи теории упругости в напряжениях предшествует проблема построения условий (условий совместности деформаций Сен-Венана), при которых непрерывный вектор перемещений (и поворотов) может быть восстановлен по заданным деформациям. Эта задача является классической и решена в полной мере путем представления перемещений с помощью формул Чезаро. Здесь следует сослаться на интересные недавние работы [5–7] по изучению кинематической стороны теории упругости, в которых рассмотрены вопросы вычисления квадратур Чезаро в случае плоской нелинейной задачи, а также вопросы построения уравнений совместности для многомерной упругой среды. В настоящей работе вновь рассматривается лишь кинематическая проблема об определении условий совместности деформаций и показывается, что уравнения совместности Сен-Венана также могут быть проинтегрированы в квадратурах явно. В результате получены обобщенные формулы Чезаро, показывающие, что поле перемещений с точностью до квадратичного полинома полностью определяется компонентами

[1] *Лурье Сергей Альбертович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. механики композитов мех.-мат. ф-та МГУ; проф. каф. прикладной механики, ракетных комплексов и космонавтики МАИ (НИУ), e-mail: salurie@mail.ru.

Lurie Sergey Albertovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Composite Mechanics; Professor, Moscow Aviation Institute (NRU), Department of Applied Mechanics, Rocket Systems and Astronautics.

[2] *Белов Петр Анатольевич* — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. Ин-та прикладной механики РАН, e-mail: belovpa@yandex.ru.

Belov Petr Anatolievich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher of the Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences.

тензора-девиатора деформаций. Установлены и новые соотношения совместности, сформулированные относительно тензора-девиатора деформаций.

1. Уравнения совместности и классические формулы Чезаро. Приведем основные определения кинематических переменных и существующие кинематические соотношения линейной теории упругости.

Соотношения Коши, как известно, имеют вид

$$R_{i,j} = \gamma_{ij} + \theta\delta_{ij}/3 - \omega_k \ni_{ijk}, \tag{1}$$

где R_i — вектор перемещений, $R_{i,j}$ — тензор дисторсии, γ_{ij} — тензор-девиатор деформаций, θ — деформация изменения объема, ω_k — псевдовектор локальных поворотов, δ_{ij} — тензор Кронекера, $\ni_{ijk}$ — псевдотензор Леви-Чивиты.

Уравнения совместности Папковича, которые являются условиями существования квадратур соотношений Коши, записываются следующим образом:

$$(\gamma_{ij} + \theta\delta_{ij}/3 - \omega_r \ni_{ijr})_{,s} \ni_{jst} = 0 \quad \text{или} \quad (\varepsilon_{ij} - \omega_r \ni_{ijr})_{,s} \ni_{jst} = 0. \tag{2}$$

Условиями существования квадратур уравнений (2), разрешенных относительно производных компонент псевдовектора поворотов, являются классические уравнения совместности Сен-Венана:

$$(\varepsilon_{mn,p} \ni_{mpi})_{,q} \ni_{nqj} = \varepsilon_{mn,pq} \ni_{mpi} \ni_{nqj} = 0. \tag{3}$$

Из равенства (1), учитывая (2), (3), можно получить квадратуры для вектора перемещений в форме классических формул Чезаро [8]:

$$R_i = R_i^0 + \omega_m^0 (z_n - z_n^0) \ni_{mni} + \int\limits_{M_0}^{M_z} [\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ij,r} - \varepsilon_{jr,i})] dx_j = 0. \tag{4}$$

Соотношения (4) позволяют получить компоненты вектора перемещения в каждой точке сплошной среды с координатами z_i по известным вектору R_i^0 и псевдовектору поворотов ω_m^0, заданным в точке M_0 с координатами z_i^0, и по компонентам тензора деформаций ε_{ij}, известным во всех точках x_i области, занимаемой сплошной средой.

2. Новые квадратуры соотношений Сен-Венана. Уравнения совместности третьего порядка. Учтем соотношения совместности Сен-Венана. Они могут быть представлены в виде

$$\theta_{,ij} = -\gamma_{ab,ab}\delta_{ij}(3/2) + 3(\gamma_{ia,aj} + \gamma_{ja,ai} - \gamma_{ij,bb}). \tag{5}$$

Имеет место следующая

Теорема. 1. *Относительное изменение объема θ и псевдовектор поворотов ω_k с точностью до линейных полиномов выражаются через тензор-девиатор деформаций γ_{ij}; вектор перемещений записывается через тензор-девиатор деформаций с точностью до квадратичного полинома.*

2. *Условиями существования квадратур для объемной деформации являются уравнения совместности третьего порядка, записанные только относительно тензора-девиатора деформаций.*

Доказательство. Рассмотрим тождество $\theta = \theta^0 + \int_{M_0}^{M_z} \theta_{,i}\, dx_i$, проинтегрируем по частям контурный интеграл и воспользуемся равенством (5). Получим равенство

$$\theta = \theta^0 + \int\limits_{M_0}^{M_z} \theta_{,i}\, dx_i = \theta^0 - \int\limits_{M_0}^{M_z} \theta_{,i}\, d(z_i - x_i) = \theta^0 - \theta_{,i}(z_i - x_i) \,|_{M_0}^{M_z} + \int\limits_{M_0}^{M_z} \theta_{,ij}(z_i - x_i)\, dx_j =$$

$$= \theta^0 + \theta_i^0 (z_i - z_i^0) + 3 \int\limits_{M_0}^{M_z} (-\gamma_{ab,ab}\delta_{ij}/2 + \gamma_{ia,aj} + \gamma_{ja,ai} - \gamma_{ij,bb})(z_i - x_i)\, dx_j, \tag{6}$$

в котором известными являются значения объемной деформации θ^0 и градиент объемной деформации θ_i^0 в точке M_0 с координатами z_i^0.

Теперь рассмотрим уравнения (2). Учитывая тождество $\ni_{ijr}\ni_{jst}= (\delta_{rs}\delta_{it} - \delta_{rt}\delta_{is})$ и известное свойство псевдовектора поворотов $\omega_{r,r} = 0$, преобразуем (2) к виду

$$\omega_{k,j} = -\gamma_{ja,b} \ni_{abk} -\theta_{,s} \ni_{skj} /3.$$

В результате получим следующие квадратуры уравнения совместности Папковича (2) относительно псевдовектора поворотов:

$$\omega_k = \omega_k^0 - \int\limits_{M_0}^{M_z} \varepsilon_{ja,b} \ni_{abk} dx_j = \omega_k^0 - \int\limits_{M_0}^{M_z} (\gamma_{ja,b} + \theta_{,b}\delta_{ja}/3) \ni_{abk} dx_j,$$

откуда, учитывая последнее равенство и (6), найдем

$$\omega_k = \omega_k^0 - \int\limits_{M_0}^{M_z} (\gamma_{ja,b} \ni_{abk} +\theta_{,s} \ni_{jsk} /3)\, dx_j = \omega_k^0 - (\theta_{,s}^0 \ni_{jsk} /3)(z_j - z_j^0) -$$

$$- \int\limits_{M_0}^{M_z} [(\gamma_{ja,b} \ni_{abk})\, dx_j + \frac{1}{3}(-\gamma_{pc,pc}\delta_{bj}/2 + \gamma_{bj,pj} + \gamma_{jp,pb} - \gamma_{bj,qq}) \ni_{ibk} (z_i - x_i)]\, dx_j. \tag{7}$$

В равенствах (6), (7) θ^0, θ_i^0 и ω_k^0 являются известными значениями объемной деформации, градиента объемной деформации и псевдовектора поворотов в точке M_0 с координатами z_i^0.

Далее рассмотрим равенство (4) и проинтегрируем по частям дважды слагаемые, содержащие объемную деформацию. Найдем

$$R_i = R_i^0 - \omega_k^0(z_j - z_j^0) \ni_{ijk} +\frac{1}{3}\theta^0(z_i - z_i^0) -$$

$$- \frac{1}{3}\,\theta_j^0[(z_a - z_a^0)(z_a - z_a^0)\delta_{ij}/2 - (z_i - z_i^0)(z_j - z_j^0)] +$$

$$+ \int\limits_{M_0}^{M_z} [(\gamma_{ij} + (z_a - x_a) \ni_{iak}\ni_{mbk} \gamma_{jm,b} + P_{ia}(z,x)(\gamma_{cb,cb}\delta_{aj}/2 - \gamma_{ab,bj} - \gamma_{jb,ba} + \triangle \gamma_{aj})]\, dx_j, \tag{8}$$

где полином второго порядка P_{ij} имеет вид

$$P_{ij} = (z_a - x_a)(z_a - x_a)\delta_{ij}/2 - (z_i - x_i)(z_j - x_j).$$

Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части достаточно учесть (5) и записать условия существования квадратур (6), получим

$$-\gamma_{ab,abp} \ni_{ipq} /2 + \gamma_{aj,pai} \ni_{jpq} - \triangle \gamma_{ij,p} \ni_{jpq}= 0. \tag{9}$$

Уравнения (9) являются уравнениями совместности деформаций третьего дифференциального порядка. Таким образом, установлена новая система уравнений совместности повышенного третьего порядка, содержащая пять уравнений и сформулированная относительно только пяти независимых компонент тензора-девиатора деформаций. Теорема доказана.

3. Выводы. В качестве заключения отметим, что квадратуры (8) являются новыми соотношениями, обобщающими соотношения Чезаро, и уточняют форму представления перемещений по известным деформациям. В результате вектор перемещений определяется через контурный интеграл, зависящий только от тензора-девиатора деформации, т.е. только от деформаций изменения формы. Более того, формулы (6)–(8), полученные исключительно из геометрических соображений и отражающие свойство сплошности рассматриваемого тела, можно использовать для обоснования эффекта Пойнтинга [9]. Новые уравнения совместности (9) определяют, очевидно, и новую постановку решения задачи теории упругости в напряжениях.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 22–79–10228 в МАИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лейбензон Л.С.* Курс теории упругости. М.: Наука, 1947.
2. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.
4. *Победря Б.Е., Шешенин С.В., Холматов Т.* Задача в напряжениях. Ташкент: ФАН, 1988.
5. *Георгиевский Д.В.* Построение обобщенных формул Чезаро для конечных плоских деформаций // Прикл. мех. и техн. физ. 2014. **55**, № 3. 140–145.
6. *Георгиевский Д.В.* Уравнения совместности в системах, основанных на обобщенных кинематических соотношениях Коши // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2014. № 1. 127–132.
7. *Georgievskii D.V., Pobedrya B.E.* On the compatibility equations in terms of stresses in many-dimensional elastic medium // Russ. J. Math. Phys. 2015. **22**, N 1. 6–8.
8. *Cesăro E.* Sulle formole del Volterra, fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche // Rend. Accad. Napoli. 1906. **12**, N 1. 311–321.
9. *Poynting J.H.* On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears, and on the lengthening on loaded wires when twisted // Proc. Roy. Soc. London. A. 1909. **82**, N 557. 546–559.

Поступила в редакцию
10.03.2023

УДК 539.3+531.53+532.23

О ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ ЛАГРАНЖА МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

А. В. Романов[1]

В рамках теории микрополярного континуума с использованием вариационного принципа Лагранжа, метода Ритца и кусочно-полиномиальных базисных функций серендипова семейства получены компоненты тензорно-блочной матрицы жесткости и составлена система линейных алгебраических уравнений для анизотропного и изотропного материалов с центром симметрии при неизотермических процессах.

Ключевые слова: микрополярная среда, континуум Коссера, несимметричная теория упругости, вариационный принцип, тензор изгиба-кручения, тензор моментных напряжений, метод конечных элементов, матрица жесткости, неизотермический процесс.

In this paper, a variational principle of Lagrange, the Ritz method and piecewise polynomial serendipity shape functions are used to obtain a stiffness matrix and a system of linear algebraic equations in the micropolar theory of elasticity for anisotropic, isotropic and centrally symmetric material in case of a non isothermal process.

Key words: micropolar continuum, Cosserat continuum, theory of asymmetric elasticity, variational principle, rotation gradient tensor, couple stress tensor, finite element method, stiffness matrix, non isothermal process.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-12

1. Вариационный принцип Лагранжа. Обобщим задачу минимизации функционала Лагранжа классической теории упругости [1, 2] на микрополярную среду:

$$L(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi}) \leqslant L(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}), \quad L(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{2}\,a(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi};\,\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}) - l(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}), \quad \forall\,\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}\colon\ \mathbf{w},\boldsymbol{\psi}\,|_{\Sigma_1} = 0 \tag{1}$$

и запишем условия стационарности:

$$DL(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi};\,\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}) = 0, \tag{2}$$

[1] *Романов Александр Вячеславович* — науч. сотр. каф. механики композитов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: atomicra@ya.ru.

Romanov Aleksandr Vyacheslavovich — Scientific Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Composite Mechanics.