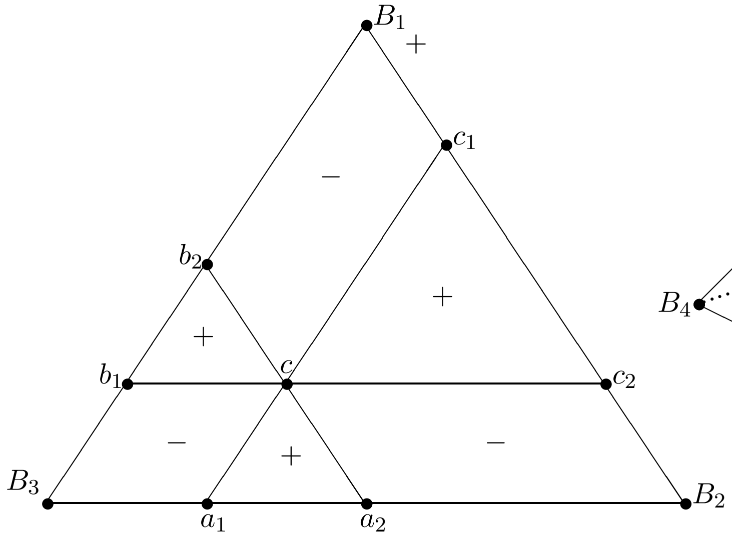

Рис. 1

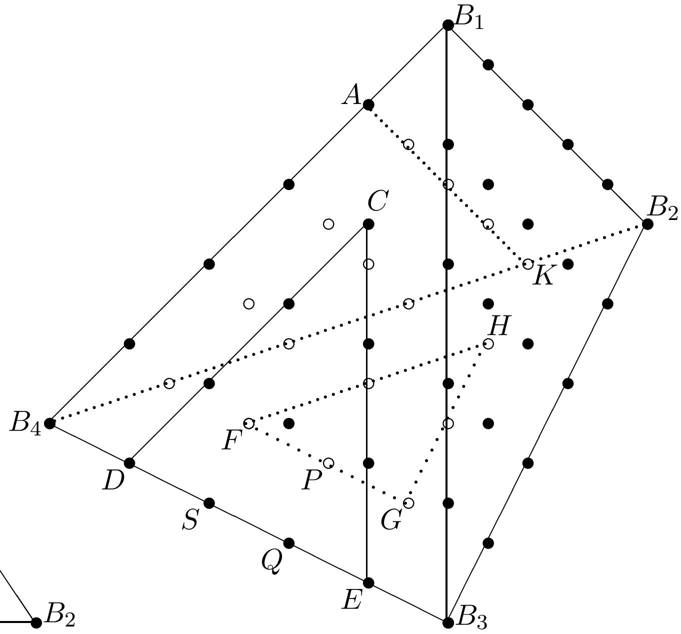

Рис. 2

Поворотами σ_2, σ_2^{-1} получаем три (вместе с найденным) линейно независимых решения $(3,5)$-системы. Здесь вместо $A_{3,5}$ классифицирующим множеством могут служить вершины кубооктаэдра с координатами $(1,4,2,2)$, переставляемыми всеми 12 способами. К вершинам кубооктаэдра z произвольно приписываем вещественные числа u_z, но так, что сумма при вершинах каждой грани равна нулю. Векторное пространство возможностей трехмерно, так как числами при любых трех вершинах любой прямоугольной грани определяются однозначно, без нарушения общего правила числа при остальных вершинах кубооктаэдра. Другие (ненулевые) компоненты u_z решений будут для вершин z трех усеченных тетраэдров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1999.
2. *Малышев Ф.М.* Симплициальные системы линейных уравнений // Алгебра. М.: Изд-во МГУ, 1980. 53–56.
3. *Кириллов А.А.* Инвариантные операторы над геометрическими величинами // Итоги науки и техники. Т. 16. М.: ВИНИТИ, 1980. 3–29.

Поступила в редакцию
19.04.2023

УДК 511

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА ПОЛУПРЯМОЙ ПО НАПЕРЕД ЗАДАННОМУ СУЩЕСТВЕННОМУ СПЕКТРУ

Г. А. Агафонкин[1]

В статье рассматривается класс операторов Шрёдингера в $L^2([0,+\infty))$ с потенциалом вида $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\delta_{x_k}$, где $x_k>0$ и $a_k\in\mathbb{R}$. Приведено конструктивное доказательство того, что всякое замкнутое полуограниченное множество $S\subset\mathbb{R}$ может являться существенным спектром такого оператора.

[1] *Агафонкин Григорий Андреевич* — студ. каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ; Моск. центр фунд. и прикл. матем., e-mail: agafgr.an@yandex.ru.

Agafonkin Grigoriy Andreevich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Functions and Functional Analysis; Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics.

Ключевые слова: оператор Шрёдингера, существенный спектр, теорема Вейля.

Singular Schrodinger operators on $L^2([0,+\infty))$ with the potential of the form $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\delta_{x_k}$, where $x_k>0$ and $a_k\in\mathbb{R}$, are considered. It is constructively proved that every closed semibounded set $S\subset\mathbb{R}$ can be the essential spectrum of such operator.

Key words: Schrodinger operator, essential spectrum, Weyl theorem.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-10

Исследуется обратная спектральная задача для оператора, заданного в $L^2([0,+\infty))$ формальным выражением

$$H=-\frac{d^2}{dx^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(\mu_k\delta_{m_k}+\nu_k\delta_{y_k}), \tag{1}$$

где $0=y_0<y_1<\ldots$ — возрастающая последовательность положительных чисел; m_k — середина отрезка $I_k=[y_{k-1},y_k]$; μ_k,ν_k — вещественные коэффициенты, а через δ_{x_k} обозначена дельта-функция с носителем в точке x_k. Областью определения такого оператора считаем

$$D_D(H)=\left\{u\in W_2^2([0,+\infty)\setminus\{m_k,y_k,\ k\in\mathbb{N}\})\cap C([0,+\infty)) : u(0)=0\right\} \tag{2}$$

(условие Дирихле). Операторы такого типа исследовались в работе [1], в работе [2] была показана связь спектральных свойств оператора H и трехдиагональных матриц Якоби специального вида.

Стандартное определение действия такого оператора дается на языке полуторалинейных форм, а именно при $k\in\mathbb{N}$ рассмотрим семейство форм

$$\mathfrak{h}_k(u,v)=\int_{I_k}u'v'\,dx+\mu_k u(m_k)\overline{v(m_k)}+\frac{\nu_{k-1}}{2}u(y_{k-1})\overline{v(y_{k-1})}+\frac{\nu_k}{2}u(y_k)\overline{v(y_k)}$$

с областями определения $D(\mathfrak{h}_k)=W_2^1(I_k)$ (при $k=1$ считаем $D(\mathfrak{h}_1)=\left\{w\in W_2^1(I_1) : w(0)=0\right\}$).

Формы $\mathfrak{h}_k$ замкнуты и полуограничены снизу, поэтому (см. [3]) определяют на $L^2(I_k)$ самосопряженные полуограниченные снизу операторы H_k с областями определения

$$D(H_k)=\left\{u\in W_2^2(I_k\setminus\{m_k\})\cap C(I_k) : u'(y_{k-1})=\frac{\nu_{k-1}}{2}u(y_{k-1}),\ u'(y_k)=-\frac{\nu_k}{2}u(y_k)\right\}.$$

Такие операторы могут быть (см. [4]) определены и другими способами, например с помощью квазидифференциальных выражений второго порядка. Их действие на произвольной функции $u\in D(H_k)$ может быть записано в виде

$$H_k u(x)=-u''(x)+\mu_k\delta(x-m_k)u(x).$$

Рассмотрим теперь форму

$$\mathfrak{h}(u,v)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathfrak{h}_k\left(u\big|_{I_k},v\big|_{I_k}\right)$$

с областью определения

$$D(\mathfrak{h})=\left\{w\in W^1_{2,\mathrm{loc}}([0,+\infty))\cap L^2([0,+\infty)) : \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\mathfrak{h}_k\left(w\big|_{I_k},w\big|_{I_k}\right)\right|^2<+\infty\right\}.$$

Можно проверить, что $\mathfrak{h}$ является замкнутой формой, а при должном выборе коэффициентов ν_k (см. следствие 1) еще и полуограниченной снизу. Наконец, несложно показать, что соответствующий ей самосопряженный полуограниченный снизу оператор H согласуется с определением (1), (2).

Пусть $S\subset\mathbb{R}$ — произвольное замкнутое полуограниченное снизу множество. Требуется выяснить, найдутся ли такие значения y_k, μ_k и ν_k (числа $m_k=\frac{y_k+y_{k-1}}{2}$ однозначно восстанавливаются по y_k), при которых существенный спектр оператора H в точности равен S.

Наряду с определенным выше семейством форм $\mathfrak{h}_k$ рассмотрим формы

$$\mathfrak{g}_k(u,v)=\int_{I_k}u'v'\,dx+\mu_k u(m_k)\overline{v(m_k)}$$

с областями определения $D(\mathfrak{g}_k) = \mathring{W}_2^1(I_k)$ и ассоциированные с последними операторы G_k на $L^2(I_k)$ с областями определения

$$D(G_k) = \{u \in W_2^2(I_k \setminus \{m_k\}) \cap C(I_k) : u(y_{k-1}) = u(y_k) = 0\},$$

такие, что $(G_k u, v) = \mathfrak{g}_k(u, v)$. Действие таких операторов совпадает с действием H_k, отличаются лишь их области определения.

Несложно проверяется, что спектры операторов H_k и G_k чисто дискретны. Более того, если обозначить через $\lambda_j(H_k)$ и $\lambda_j(G_k)$ соответственно j-е собственные значения операторов H_k и G_k, то имеет место следующее асимптотическое свойство.

Утверждение 1. *При $\min\{\nu_{k-1}, \nu_k\} \to +\infty$ для всех j $\lambda_j(H_k)$ сходится к $\lambda_j(G_k)$.*

Из этого соотношения можно вывести

Следствие 1. *Пусть формы $\mathfrak{g}_k$ равномерно ограничены снизу константой $s_{\min}$. Тогда существует последовательность $\{\nu_k^\circ\}$, такая, что для всякой другой последовательности $\{\nu_k\}$ со свойством $\nu_k \geqslant \nu_k^\circ$ при всех $k \in \mathbb{N}$ формы $\mathfrak{h}_k$ равномерно ограничены снизу константой $s_{\min} - 1$.*

Иными словами, для корректного определения оператора H необходимо, чтобы коэффициенты ν_k возрастали не медленнее, чем ν_k°. Однако явный вид последовательности ν_k°, как и ее асимптотические свойства, указать проблематично ввиду большой сложности нахождения точных формульных выражений для $\lambda_j(H_k)$. Тем не менее мы покажем, что требуемые условия выполняются при всех достаточно быстро растущих ν_k при правильном выборе остальных параметров.

Идея построения оператора H заключается в следующем. Рассмотрим сперва аналогичную задачу для оператора $G = \bigoplus_{k=1}^{+\infty} G_k$, действующего в $L^2([0, +\infty)) \simeq \bigoplus_{k=1}^{+\infty} L^2(I_k)$, с областью определения прямой суммы

$$D(G) = \left\{ u \in L^2([0, +\infty)) : u\big|_{I_k} \in D(G_k) \ \text{ и } \ \sum_{k=1}^{+\infty} \left\| G_k u\big|_{I_k} \right\|^2 < \infty \right\}.$$

После добавления дополнительных условий Дирихле в точках y_k мы получаем систему независимых спектральных задач на каждом из отрезков I_k. Каждая из них сводится к изучению спектров операторов G_k, которые в свою очередь могут быть выписаны явно:

$$\Lambda(G_k) = \left\{ \left(\frac{2\pi j}{d_k} \right)^2 : j \in \mathbb{N} \right\} \cup \{\lambda : \mathcal{F}_k(\lambda) = \mu_k\}.$$

Здесь $d_k = |I_k| = y_k - y_{k-1}$ — длина отрезка I_k, а

$$\mathcal{F}_k(\lambda) = \begin{cases} -2\sqrt{\lambda} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{d_k\sqrt{\lambda}}{2}\right), & \lambda > 0; \\ -\frac{4}{d_k}, & \lambda = 0; \\ -2\sqrt{-\lambda} \cdot \operatorname{cth}\left(\frac{d_k\sqrt{-\lambda}}{2}\right), & \lambda < 0. \end{cases}$$

Поскольку функция $\mathcal{F}_k$ непрерывна и строго возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ на каждой компоненте связности области определения $D(\mathcal{F}_k) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \left(\frac{2\pi k}{d}\right)^2 : k \in \mathbb{N} \right\}$, для всякого $\mu \in \mathbb{R}$ корни уравнения $\mathcal{F}_k(\lambda) = \mu$ перемежаются с числами $\left(\frac{2\pi j}{d_k}\right)^2$. Тем самым, обозначая при $j \in \mathbb{N}$ через $\lambda_{2j+1,k}$ (единственное) решение уравнения $\mathcal{F}_k(\lambda) = \mu_k$ на интервале $\left(\left(\frac{2\pi j}{d_k}\right)^2, \left(\frac{2\pi(j+1)}{d_k}\right)^2 \right)$, а через $\lambda_{1,k}$ его (единственное) решение на луче $\left(-\infty, \left(\frac{2\pi}{d_k}\right)^2\right)$, имеем упорядочение спектра G_k:

$$\Lambda(G_k) = \left\{ \lambda_{1,k} < \left(\frac{2\pi}{d_k}\right)^2 < \lambda_{3,k} < \left(\frac{4\pi}{d_k}\right)^2 < \ldots < \lambda_{2j-1,k} < \left(\frac{2\pi j}{d_k}\right)^2 < \lambda_{2j+1,k} < \left(\frac{2\pi(j+1)}{d_k}\right)^2 < \ldots \right\}.$$

Следующее утверждение (см. [5]) позволяет найти спектр оператора G.

Утверждение 2. *Пусть спектры G_k чисто дискретны и $\lambda_{j,k}$ — j-е собственное значение оператора G_k. Тогда* (*a*) *спектр G равен замыканию множества $\Lambda = \{\lambda_{j,k} : j, k \in \mathbb{N}\}$;*

(*b*) *существенный спектр G составляют (конечные) точки накопления Λ и только они.*

Отсюда напрямую выводится

Следствие 2. *Пусть $d_k \to 0$ при $k \to +\infty$. Тогда существенный спектр G состоит в точности из точек накопления множества $\{\lambda_{1,k} : k \in \mathbb{N}\}$.*

Вообще говоря, для дальнейших рассуждений можно брать любые точки y_k с условиями

$$\lim_{k\to+\infty} d_k = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} d_k = +\infty.$$

Однако, поскольку в настоящей работе преследуется лишь цель построить пример оператора с заданным существенным спектром S, а не описать общие условия на его параметры, мы ограничимся весьма конкретной последовательностью длин

$$d_k = \frac{\pi}{k\sqrt{M_k}}, \tag{3}$$

где на калибровочную последовательность M_k дополнительно наложены следующие условия:

(a) $M_k > 0$ и M_k возрастает;

(b) $M_k = o(k^\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$ (например, $M_k \sim \ln(1 + k)$);

(c) существует число $s \in S$, такое, что $s < M_1$.

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Для всякого замкнутого полуограниченного снизу множества S существует последовательность μ_k, такая, что независимо от выбора M_k, удовлетворяющих условиям (a)–(c), существенный спектр оператора G с $y_k = \sum_{m=1}^{k} d_k$, где длины d_k описаны в (3), совпадает с S.*

Тем самым вспомогательная задача решена.

Связь полученного решения с исходной задачей дает следствие из теоремы Вейля (см. [3]), а именно справедливо

Утверждение 3. *Два самосопряженных оператора A и B имеют одинаковый существенный спектр, если их резольвентная разность $T_\lambda(A, B) = (A - \lambda I)^{-1} - (B - \lambda I)^{-1}$, взятая в некоторой регулярной для обоих операторов точке λ, является компактным оператором.*

В силу полуограниченности существование общей регулярной точки очевидно. Тем самым для окончательного построения оператора H остается выяснить, при каких значениях параметров ν_k оператор $T_\lambda(H, G)$ компактен. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть значения y_k и μ_k (найденные на предыдущем этапе) фиксированы, а*

$$\nu_k \geqslant \max\left\{\nu_k^\circ,\ M_{k+1}^{3/2}(k+1)^{5+\varepsilon}\right\}.$$

Тогда оператор $T_\lambda(H, G)$ является компактным в $L^2([0, +\infty))$ и, следовательно,

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma_{\text{ess}}(G) = S.$$

Тем самым доказано, что для операторов вида (1), (2) множество S может являться существенным спектром, если и только если оно замкнуто и полуограничено снизу.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 20–11–20261.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мирзоев К.А.* Операторы Штурма–Лиувилля // Тр. Моск. матем. о-ва. 2014. **75**, № 2. 335–359.
2. *Kostenko A.S., Malamud M.M.* 1-D Schrodinger operators with local point interactions on a discrete set // J. Diff. Equat. 2010. **249**, N 2. 253–304.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
4. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // Тр. Моск. матем. о-ва. 2003. **64**. 159–212.
5. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.

Поступила в редакцию
26.10.2022