Теорема. *Пусть дана модель ВСБ на многомерной решетке* $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, *с непрерывным временем в случайной среде со стационарным, пространственно независимым и однородным потенциалом* $V(x, \omega)$, $x \in \mathbb{Z}^d$. *Пусть для его функции распределения* $F(z)$ *выполнено условие*

$$\ln (1 - F(z)) \sim -ce^{z\alpha}, \quad c > 0, \quad \alpha > 1, \quad z \to \infty.$$

Тогда при фиксированных $x, y \in \mathbb{Z}^d$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\ln \langle m_n^p(t, x, y) \rangle \sim \alpha^{-1} pnt \ln t, \quad t \to \infty.$$

Автор приносит благодарность проф. Е. Б. Яровой и проф. С. А. Молчанову за обсуждение задачи.

Работа автора поддержана фондом БАЗИС, договор № 22–8–3–36–1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Перемежаемость пассивных полей в случайных средах // Журн. эксперимент. и теор. физ. 1985. **89**, № 6. 2061–2072.
2. *Gärtner J., Molchanov S.* Parabolic problems for the Anderson model // Communs Math. Phys. 1990. **132**, N 3. 613–655.
3. *Albeverio S.A., Bogachev L.V., Molchanov S.A., Yarovaya E.B.* Annealed moment Lyapunov exponents for a branching random walk in a homogeneous random branching environment // Markov Processes Relat. Fields. 2000. **6**. 473–516.
4. *Куценко В.А., Соколов Д.Д., Яровая Е.Б.* Неустойчивости в случайных средах и режимы с обострением // Журн. эксперимент. и теор. физ. 2023. **163**, № 4. 561–573.
5. *Yarovaya E.* Symmetric branching walks in homogeneous and non homogeneous random environments // Communs Stat. Simulation and Computation. 2012. **41**, N 7. 1232–1249.
6. *König W., Gün O., Sekulović O.* Moment asymptotics for branching random walks in random environment // Electron. J. Probab. 2013. **18**. 1–18.
7. *Butler R.W.* Saddlepoint approximations with applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

Поступила в редакцию 15.02.2023

УДК 514.763

ИНВАРИАНТНЫЕ СУММЫ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Ф. М. Малышев[1]

На основе предлагаемого способа решения так называемых (r, s)-систем линейных уравнений доказано, что порядки однородных инвариантных дифференциальных операторов n гладких вещественных функций одной переменной принимают значения от n до $\frac{n(n+1)}{2}$, а размерность пространства всех таких операторов не превосходит $n!$. Получена классификация инвариантных дифференциальных операторов порядка $n + s$ для $s = 1, 2, 3, 4$, а при $n = 4$ — для всех порядков от 4 до 10. Однородные инвариантные дифференциальные операторы самого маленького порядка n и самого большого порядка $\frac{n(n+1)}{2}$ представлены соответственно произведением n первых дифференциалов ($s = 0$) и вронскианом ($s = (n-1)n/2$). Доказано существование ненулевых однородных инвариантных дифференциальных операторов порядка $n + s$ для $s < \frac{1+\sqrt{5}}{2}(n - 1)$.

Ключевые слова: производная, дифференциал, система линейных уравнений, симплекс, инвариантный дифференциальный оператор.

Based on the method proposed for solving the so-called (r, s)-systems of linear equations, it is proved that the orders of homogeneous invariant differential operators n of smooth real

[1] *Малышев Фёдор Михайлович* — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. отдела дискретной математики Матем. ин-та РАН. e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru.

Malyshev Fedor Mikhailovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow, Department of Discrete Mathematics.

functions of one variable take values from n to $\frac{n(n+1)}{2}$, and the dimension of the space of all such operators does not exceed $n!$. A classification of invariant differential operators of order $n+s$ is obtained for $s=1,2,3,4$, and for $n=4$ for all orders from 4 to 10. Homogeneous invariant differential operators of the smallest order n and the largest order $\frac{n(n+1)}{2}$ are given, respectively, by the product of the n first differentials ($s=0$) and the Wronskian ($s=(n-1)n/2$). The existence of nonzero homogeneous invariant differential operators of order $n+s$ for $s<\frac{1+\sqrt{5}}{2}(n-1)$ is proved.

Key words: derivative, differential, system of linear equations, simplex, invariant differential operator.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-9

1. Из курса математического анализа хорошо известна теорема об инвариантности первого дифференциала. В настоящей работе рассматриваются инвариантные дифференциальные выражения в виде линейных комбинаций произведений дифференциалов первого и высших порядков n функций одной переменной. Пусть $\mathcal{F}$ — множество вещественных гладких функций $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, а $\mathcal{F}_k=\{f(dx)^k | f\in\mathcal{F}\}$ — пространство дифференциалов $f(dx)^k=h^{(k)}(dx)^k$ порядка k, где $k\in\mathbb{N}$, а $h\in\mathcal{F}$. Для $n\geqslant 1$ рассматриваем *полидифференциальные операторы* $D_n^{(k)}\colon \mathcal{F}^n\to\mathcal{F}_k$ порядка k, задаваемые конечными суммами вида

$$D_n^{(k)}(f_1,\dots,f_n)=\sum_{\substack{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}^n:\\ z_1+\dots+z_n=k}} c_{z_1,\dots,z_n} f_1^{(z_1)}\cdot\ldots\cdot f_n^{(z_n)}(dx)^k, \tag{1}$$

в которых $c_{z_1,\dots,z_n}$ — вещественные коэффициенты.

Оператор (1) является *инвариантным*, если он не зависит от используемой параметризации прямой — перестановочен с любым диффеоморфизмом $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Можно вначале произвести замену переменной $x=\varphi(t)$, а затем вычислять сумму (1) для функций $g_i(t)=f_i(\varphi(t))$, $i=1,\dots,n$, в условиях переменной t. Можно поступать иначе: вначале вычислять (1) для исходных функций от x, а затем в полученной сумме все x заменить на $\varphi(t)$. Ответы должны быть одинаковы. Формально это выражается равенством

$$\sum_{\substack{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}^n:\\ z_1+\dots+z_n=k}} c_{z_1,\dots,z_n} g_1^{(z_1)}\cdot\ldots\cdot g_n^{(z_n)}(dt)^k=\sum_{\substack{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}^n:\\ z_1+\dots+z_n=k}} c_{z_1,\dots,z_n} f_1^{(z_1)}(\varphi)\cdot\ldots\cdot f_n^{(z_n)}(\varphi)\dot\varphi^k(dt)^k.$$

Из теоремы об инвариантности первого дифференциала следует инвариантность однородных дифференциальных операторов порядка $k=n$, получаемых перемножением первых дифференциалов n функций: $D_n^{(n)}(f_1,\dots,f_n)=cf_1'\cdot\ldots\cdot f_n'(dx)^n,\ \ c\in\mathbb{R}$. Непосредственно проверяется инвариантность однородного дифференциального оператора порядка $k=\frac{n(n+1)}{2}$, предоставляемого *вронскианом*:

$$D_n^{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}(f_1,\dots,f_n)=\det\begin{vmatrix} f_1' & \dots & f_n'\\ \dots & \dots & \dots\\ f_1^{(n)} & \dots & f_n^{(n)}\end{vmatrix}(dx)^{\frac{n(n+1)}{2}}. \tag{2}$$

2. Обозначим символом $W_n^{(k)}$ векторное пространство, состоящее из инвариантных дифференциальных операторов $D_n^{(k)}$ вида (1). Коэффициенты $c_{z_1,\dots,z_n}$ являются координатами этих операторов.

Далее используются целые числа $a_{r,s}$, $r\geqslant 0$, $s\geqslant 0$, определяемые равенством

$$\psi_r(\tau)=\sum_{s\geqslant 0} a_{r,s}\tau^s=\prod_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{j} t^i=(1+\tau)(1+\tau+\tau^2)\dots(1+\tau+\ldots+\tau^r).$$

Теорема 1. *Для* $n\geqslant 1$, $k\geqslant n$ *имеем* $\dim W_n^{(k)}\leqslant a_{n-1,k-n}$ *и* $\sum_{k\geqslant n}\dim W_n^{(k)}\leqslant\psi_{n-1}(1)=n!$.

Данные оценки представлены в [1, с. 113]. Впервые они были получены в работе [2]. Из теоремы 1 следует, что порядки k ненулевых однородных инвариантных дифференциальных операторов (1), сокращенно (n,k)-*операторов*, могут меняться только в диапазоне от n до $\frac{n(n+1)}{2}$. Вронскиан (2) предоставляет (n,k)-оператор самого высокого порядка $k=\frac{n(n+1)}{2}$. Естественное предположение о равенствах в оценках теоремы 1 частично подтверждается следующей теоремой.

Теорема 2. *Для* $n \geqslant 1$ *и* $s < \frac{1+\sqrt{5}}{2}(n-1)$ *справедливы неравенства* $\dim W_n^{(n+s)} > 0$*, а для* $s \leqslant 4$ *и* $s \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$ *имеют место равенства* $\dim W_n^{(n+s)} = a_{n-1,s}$*, верные при* $n \leqslant 4$ *для всех* $s \geqslant 0$.

Область значений $s < \frac{n(n-1)}{2}$ с $\dim W_n^{(n+s)} > 0$ существенно расширяется благодаря ненулевым $(n, n+s)$-операторам, являющимся произведениями пар ненулевых (n_1, n_1+s_1)-операторов и (n_2, n_2+s_2)-операторов с $n = n_1 + n_2$ и $s = s_1 + s_2$ (зависящих от непересекающихся наборов функций) за счет $s_2 = \frac{n_2(n_2-1)}{2}$.

3. В работе [3] оператору (1) ставится в соответствие многочлен

$$P(X_1, \dots, X_n) = \sum\nolimits_{\substack{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}^n: \\ z_1+\dots+z_n=k}} c_{z_1,\dots,z_n} X_1^{z_1} \dots X_n^{z_n}. \tag{3}$$

Инвариантность оператора (1), как показано в [3], равносильна равенствам

$$\sum\nolimits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i(\partial_{X_i})^{p+1} P(X_1, \dots, X_n) = 0 \text{ для всех } p \geqslant 1. \tag{4}$$

Множество индексов суммирования в (1), обозначаемое символом Δ_s^r, $r = n-1$, $s = k-n$, называем *целочисленным симплексом.* Здесь r — размерность соответствующего континуального симплекса, а $s = k-n$ — длина его ребра, на котором содержится $k-n+1$ точек из Δ_{k-n}^{n-1}. Предложенный в [2] способ решения системы линейных уравнений (4) относительно неизвестных $c_{z_1,\dots,z_n}$, $(z_1, \dots, z_n) \in \Delta_{k-n}^{n-1}$, является конструктивным. Для всех порядков $n+s$ с $s \geqslant 0$ строятся подмножества

$$A_{n-1,s} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \Delta_{k-n}^{n-1} | \, z_i \leqslant i, \, i = 1, \dots, n\}$$

мощности $a_{n-1,s}$ номеров $(z_1, \dots, z_n)$ неизвестных $c_{z_1,\dots,z_n}$, через которые явным образом линейно выражаются остальные неизвестные $c_{z_1,\dots,z_n}$, $(z_1, \dots, z_n) \in \Delta_{k-n}^{n-1}$. В результате при справедливости равенства $\dim W_n^{(n+s)} = a_{n-1,s}$, $s \geqslant 0$, автоматически получается исчерпывающая классификация инвариантных дифференциальных операторов (1) порядка $n+s$ от n функций. Они будут находиться в естественной биекции с элементами векторного пространства, натянутого на точки множества $A_{n-1,s}$.

В доказательстве теоремы 2 используется следующая теорема.

Теорема 3. *Все равенства* (4) *следуют из двух равенств* (4)*, отвечающих* $p = 1$ *и* $p = 2$.

4. Наряду с (1) в работе [3] рассматриваются, в частности, дифференциальные операторы

$$\mathcal{D}_n(f_1(dx)^{\lambda_1}, \dots, f_n(dx)^{\lambda_n}) = \sum_{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}_0^n} c_{z_1,\dots,z_n} f_1^{(z_1)} \cdot \ldots \cdot f_n^{(z_n)} (dx)^{\lambda_1+\dots+\lambda_n+z_1+\dots+z_n},$$

где $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{N}_0^n$, а $\mathbb{N}_0 = \{0\} \sqcup \mathbb{N}$. При замене переменной $x = \varphi(t)$ дифференциал $f(dx)^k$ записывается в виде $f(\varphi)(d\varphi)^k = f(\varphi)(\dot\varphi dt)^k = f(\varphi)\dot\varphi^k (dt)^k = g(dt)^k$, где $g = f(\varphi)\dot\varphi^k$. Для заданных $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{N}_0^n$ инвариантность оператора $\mathcal{D}_n$ равносильна (см. [3]) системе уравнений

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} (X_i(\partial_{X_i})^{p+1} + \lambda_i(p+1)(\partial_{X_i})^p) P(X_1, \dots, X_n) = 0 \text{ для всех } p \geqslant 1 \tag{5}$$

относительно многочленов (3), в которых суммирование производится по всем $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{N}_0^n$.

Теорема 4. *При любых значениях параметров* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{N}_0^n$ *размерность пространства решений системы уравнений* (5) *не превосходит* $(n+1)!$

При $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ теоремой 1 предоставляется верхняя оценка $[en!]$, которая меньше $(n+1)!$ для $n > 1$. Теорема 4 независимо формулировалась в [2, 3] для произвольных $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. В работе [3] приведена только общая схема доказательства теоремы 4. При доказательстве теоремы 1 используется специальный базис в пространстве многочленов $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, кратных $X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$: $\frac{X_1^{z_1}}{(z_1-1)!} \cdot \ldots \cdot \frac{X_n^{z_n}}{(z_n-1)!}$, $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{N}^n$. В ходе доказательства теоремы 4 используется другой базис пространства $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$: $\frac{(X_1-1)^{z_1}}{z_1!} \cdot \ldots \cdot \frac{(X_n-1)^{z_n}}{z_n!}$, $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{N}_0^n$. В этих базисах доказательства приведенных теорем сводятся к решению так называемых (r,s)-*систем* линейных уравнений.

5. Вещественные неизвестные (r,s)-системы линейных уравнений параметризуются (нумеруются) точками $z \in \Delta_s^r$. Символами u_z для $z \in \Delta_s^r$ обозначаем сами неизвестные. Число неизвестных равно числу точек в симплексе Δ_s^r, равному $|\Delta_s^r| = \binom{r+s}{s}$. Вершины $B_1, \ldots, B_{r+1}$ симплекса Δ_s^r нумеруем так, что для всех $i = 1, \ldots, r+1$ координата с номером i самая большая у вершины B_i. Уравнения в (r,s)-системе параметризуются содержащимися в симплексе Δ_s^r симплексами Δ_p^r для всех $p = 1, \ldots, s$. Вершины $b_1, \ldots, b_{r+1}$ симплексов Δ_p^r нумеруем так, что при гомотетии с коэффициентом гомотетии больше 1, переводящей один в другой континуальные симплексы, соответствующие Δ_p^r и Δ_s^r, вершина b_i переходит в вершину B_i для всех $i = 1, \ldots, r+1$. Коэффициенты при неизвестных в уравнениях (r,s)-системы задаются функциями $\varphi_i\colon \Delta_s^r \to \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} | \, x > 0\}$, где $i = 1, \ldots, r+1$. Отвечающее симплексу $\Delta_p^r = [b_1, \ldots, b_{r+1}]$ уравнение (r,s)-системы записывается в виде

$$\sum\nolimits_{1\leqslant i\leqslant r+1} \quad \varphi_i(b_i)u_{b_i} = 0. \tag{6}$$

Число уравнений в (r,s)-системе, отвечающих конкретному значению $p \in \{1, \ldots, s\}$, равно числу подсимплексов Δ_p^r в симплексе Δ_s^r, находящихся (благодаря параллельным переносам) в естественном взаимно однозначном соответствии с точками симплекса Δ_{s-p}^r. Всего в (r,s)-системе имеется $\binom{r+s}{r+1}$ уравнений. Они параметризуются наборами $(p, y_1, \ldots, y_{r+1})$, $p = 1, \ldots, s$, $(y_1, \ldots, y_{r+1}) \in \Delta_{s-p}^r$, и образуют симплекс

$$\Delta_{s-1}^{r+1} = \bigsqcup\nolimits_{1\leqslant p\leqslant s} \Delta_{s-p}^r = \Delta_{s-1}^r \sqcup \Delta_{s-2}^r \sqcup \ldots \sqcup \Delta_1^r \sqcup \Delta_0^r.$$

Доказательства теорем 1 и 4 следуют соответственно из двух нижеприведенных теорем.

Теорема 5. *Размерность пространства решений (r,s)-системы с $r \geqslant 1$ и $s \geqslant 0$ не превосходит $a_{r,s}$.*

Теорема 6. *Если из (r,s)-системы исключить все уравнения с параметром $p = 1$, оставив уравнения с $p = 2, \ldots, s$, то размерность пространства решений не превзойдет $a_{r+1,s}$.*

6. Идею решения (r,s)-системы линейных уравнений продемонстрируем при $r = 2$ и $s \geqslant 3$ (см. рис. 1). Левую часть уравнения (6), отвечающего симплексу $\Delta = \Delta_p^r$ с вершинами $b_1, \ldots, b_{r+1}$, обозначаем одним из трех символов $\mathcal{L}_\Delta = \mathcal{L}_{\Delta_p^r} = \mathcal{L}_{[b_1,\ldots,b_{r+1}]}$. Пусть $c \in \Delta_s^2$ — произвольная внутренняя точка, через которую проведены отрезки, параллельные сторонам симплекса Δ_s^2. В соответствии с уравнениями (6) имеем

$$0 = \mathcal{L}_{[B_1,B_2,B_3]} - \mathcal{L}_{[B_1,c_2,b_1]} - \mathcal{L}_{[c_1,B_2,a_1]} - \mathcal{L}_{[b_2,a_2,B_3]} + \mathcal{L}_{[c_1,c_2,c]} + \mathcal{L}_{[c,a_2,a_1]} + \mathcal{L}_{[b_2,c,b_1]} = (\varphi_3(c) + \varphi_1(c) + \varphi_2(c))u_c.$$

Знаки $\pm$ при $\mathcal{L}_\Delta$ в этой сумме на рис. 1 указаны внутри соответствующих треугольников. Отличные от u_c неизвестные в сумме встречаются по два раза с одинаковыми по модулю коэффициентами, отличающимися знаком, поэтому сокращаются. В результате $u_c = 0$, так как $\varphi_3(c) + \varphi_1(c) + \varphi_2(c) \neq 0$.

Этим способом неизвестные u_c определяются для внутренних точек $c \in \Delta_s^2$ даже тогда, когда правые части в (6) ненулевые. Этот прием распространяется на все размерности $r \geqslant 1$ привлечением $r+1$ гиперплоскостей, параллельных $(r-1)$-мерным граням симплекса Δ_s^r и проходящих через его внутренние точки.

Граничные точки симплекса Δ_s^r разбиваются на подмножества T_i, $i = 1, \ldots, r+1$. Если Γ_i — множество точек на грани, противоположной вершине B_i, то $T_i = \Gamma_i \setminus \bigcup_{j=i+1}^{r+1} \Gamma_j$. Полагаем T_0 множеством внутренних точек. Для $r = 3$ и $s = 5$ на рис. 2 указаны все 52 граничные точки симплекса Δ_5^3 (темные кружочки — на видимых гранях, светлые — на невидимых). На рис. 2 имеем $T_1 = [H, G, F]$, $T_2 = [C, E, D]$, $T_3 = [A, K, B_4]$, $T_4 = [B_1, B_2, B_3]$. Для граничных $c \in \Delta_s^r$ неизвестные u_c определяются последовательно для $c \in T_i$, $i = 1, \ldots, r+1$, в условиях на единицу меньшей размерности также начиная с внутренних точек в $T_i = \Delta_{s-r-1+i}^{r-1}$. Правые части соответствующих $(r-1, s-r-1+i)$-систем зависят каждый раз от уже определенных неизвестных u_c, $c \in \coprod_{j=0}^{i-1} T_j$.

7. При $n = 4$ и $s = 5$ равенство $\dim W_4^{(9)} = 3$ в теореме 2 доказывается особо. На рис. 2 имеем $A_{3,5} = \{S, P, F\}$. Положив $u_S = 1$, $u_P = u_F = 0$, сразу же получаем $u_z = 0$, $z \in T_1$. Для $z \in T_2$ неизвестные u_z находятся решением $(2,3)$-системы. После этого из соображений симметрии заключаем, что $u_{\sigma_1(z)} = u_z$, $u_{\sigma_{1,i}(z)} = -u_z$, $z \in \Delta_5^3$, где σ_i — поворот симплекса Δ_5^3 вокруг высоты, исходящей из B_i; $\sigma_{i,j}$ — зеркальная симметрия с неподвижными вершинами B_i, B_j. Этим определяется решение u_z, $z \in \Delta_5^3$.

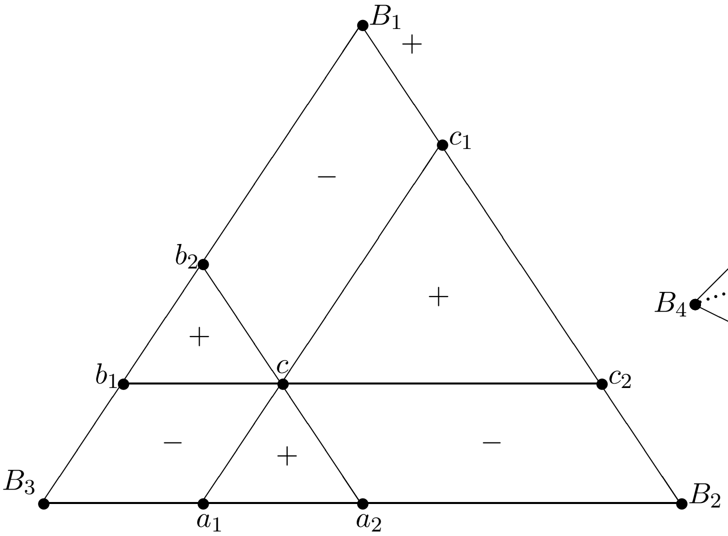

Рис. 1

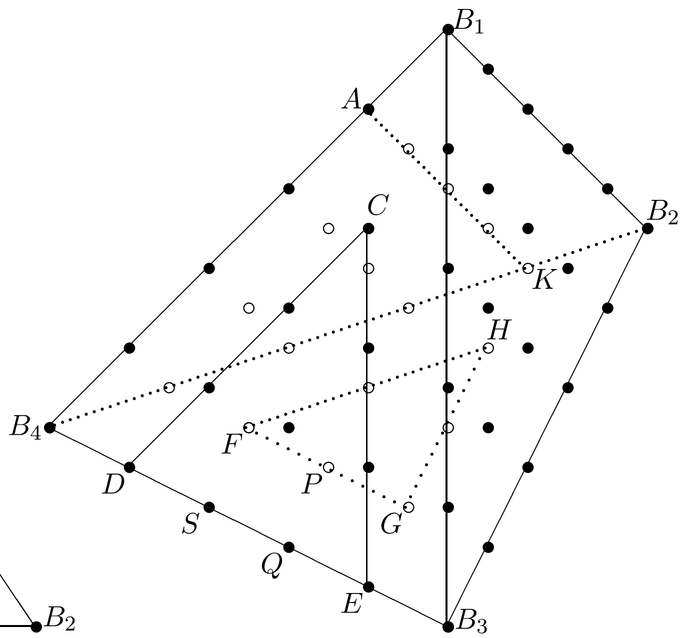

Рис. 2

Поворотами σ_2, σ_2^{-1} получаем три (вместе с найденным) линейно независимых решения $(3,5)$-системы. Здесь вместо $A_{3,5}$ классифицирующим множеством могут служить вершины кубооктаэдра с координатами $(1,4,2,2)$, переставляемыми всеми 12 способами. К вершинам кубооктаэдра z произвольно приписываем вещественные числа u_z, но так, что сумма при вершинах каждой грани равна нулю. Векторное пространство возможностей трехмерно, так как числами при любых трех вершинах любой прямоугольной грани определяются однозначно, без нарушения общего правила числа при остальных вершинах кубооктаэдра. Другие (ненулевые) компоненты u_z решений будут для вершин z трех усеченных тетраэдров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1999.
2. *Малышев Ф.М.* Симплициальные системы линейных уравнений // Алгебра. М.: Изд-во МГУ, 1980. 53–56.
3. *Кириллов А.А.* Инвариантные операторы над геометрическими величинами // Итоги науки и техники. Т. 16. М.: ВИНИТИ, 1980. 3–29.

Поступила в редакцию
19.04.2023

УДК 511

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА ПОЛУПРЯМОЙ ПО НАПЕРЕД ЗАДАННОМУ СУЩЕСТВЕННОМУ СПЕКТРУ

Г. А. Агафонкин[1]

В статье рассматривается класс операторов Шрёдингера в $L^2([0,+\infty))$ с потенциалом вида $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\delta_{x_k}$, где $x_k>0$ и $a_k\in\mathbb{R}$. Приведено конструктивное доказательство того, что всякое замкнутое полуограниченное множество $S\subset\mathbb{R}$ может являться существенным спектром такого оператора.

[1] *Агафонкин Григорий Андреевич* — студ. каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ; Моск. центр фунд. и прикл. матем., e-mail: agafgr.an@yandex.ru.

Agafonkin Grigoriy Andreevich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Functions and Functional Analysis; Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics.