О к о н ч а н и е

$\mathcal{A}_{6,\,19}$	$[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_1,e_5]=e_6$, $[e_2,e_3]=e_6$	**(B)** т. о. п. **(B)** $x_5=a_5=0$, $(a_6,x_6)\neq 0$, $a_4x_3\neq a_3x_4$ или $x_5=a_5=0$, $\exists\, j\in\{3,4\}:\ a_6x_j\neq a_jx_6$ **(C)** $a_6=x_6=0$, $\exists\, i,j\in\{3,4,5\}:\ a_ix_j\neq a_jx_i$	2 4 —	1, 3 1, 1 1, 1, 1, 3
$\mathcal{A}_{6,\,20}$	$[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_1,e_5]=e_6$, $[e_2,e_3]=e_5$, $[e_2,e_4]=e_6$	**(A)** т. о. п. **(B)** $a_6x_5=a_6x_5$, $\exists\, j\in\{3,4\}:\ a_6x_j\neq a_jx_6$ **(B)** $x_4=x_5=a_4=a_5=0$, $a_3x_6\neq a_6x_3$ или $a_6=x_6=0$, $\exists\, j\in\{3,4\}:\ a_5x_j\neq a_jx_5$ **(C)** $a_5=a_6=x_5=x_6=0$, $a_4x_3\neq a_3x_4$	— 2 4 —	1, 5 1, 3 1, 1 1, 1, 1, 3
$\mathcal{A}_{6,\,21}$	$[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_5]=e_6$, $[e_2,e_3]=e_4$, $[e_2,e_4]=e_5$, $[e_3,e_4]=e_6$	**(B)** т. о. п. **(C)** $a_6=x_6=0$, $\exists\, i,j\in\{3,4,5\}:\ a_ix_j\neq a_jx_i$	2 2 —	1, 3 1, 1, 1, 3
$\mathcal{A}_{6,\,22}$	$[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_3]=e_5$, $[e_1,e_5]=e_6$, $[e_2,e_3]=e_4$, $[e_2,e_4]=e_5$, $[e_3,e_4]=e_6$	**(A)** т. о. п. **(B)** $a_6x_5=a_6x_5$, $\exists\, j\in\{3,4\}:\ a_6x_j\neq a_jx_6$ **(B)** $a_6=x_6=0$, $\exists\, j\in\{3,4\}:\ a_5x_j\neq a_jx_5$ **(C)** $a_5=a_6=x_5=x_6=0$, $a_4x_3\neq a_3x_4$	— 2 4 —	1, 5 1, 3 1, 1 1, 1, 1, 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bolsinov A.V., Zhang P.* Jordan–Kronecker invariants of finite–dimensional Lie algebras // Transform. Groups. 2016. **21**. 51–86.
2. *Грознова А.Ю.* Инварианты Жордана–Кронекера для алгебр Ли малых размерностей // Фунд. и прикл. матем. 2021. **23**, № 4. 73–86.
3. *Короткевич А.А.* Интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли малой размерности // Матем. сб. 2009. **200**, № 12. 3–40.

Поступила в редакцию
01.03.2023

УДК 519.21

О МОМЕНТАХ ВЕТВЯЩЕГОСЯ БЛУЖДАНИЯ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ С ГУМБЕЛЕВСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В. А. Куценко[1]

Рассматривается ветвящееся случайное блуждание по многомерной решетке в случайной среде с непрерывным временем. В основе процесса лежит простое симметричное случайное блуждание. Случайная среда в каждой точке решетки определяется неотрицательными, независимыми и одинаково распределенными случайными интенсивностями деления и гибели частиц. Предполагается, что разность интенсивностей деления и гибели частиц имеет асимптотически гумбелевское распределение. Получены результаты о предельном поведении моментов, усредненных по среде.

Ключевые слова: случайные процессы, ветвящиеся случайные блуждания, случайная среда, перемежаемость.

A time-continuous branching random walk over a multidimensional lattice in a random medium is considered. Underlying random walk is considered to be simple and symmetric. The

[1] *Куценко Владимир Александрович* — асп. каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vlakutsenko@ya.ru.
Kutsenko Vladimir Aleksandrovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Probability Theory.

random medium at each point of the lattice is determined by non-negative, independent, and equally distributed random intensities of splitting and death of particles. It is assumed that the difference in the intensities of splitting and death of particles has an asymptotically Gumbelian distribution. The limiting behavior of the moments averaged over the medium is obtained.

Key words: random processes, branching random walks, random medium, intermittency.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-8

1. Введение. В настоящей работе исследуется модель ветвящихся случайных блужданий (ВСБ) в случайной среде, впервые рассмотренная в [1]. Модель ВСБ в случайной среде была формализована в работе [2] и поэтому мы будем придерживаться терминологии, введенной там.

Рассмотрим целочисленную решетку $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, и непрерывное время $t \geqslant 0$. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в некоторой точке $x \in \mathbb{Z}^d$ находится одна частица. За малое время эта частица может остаться на месте, переместиться в соседний узел решетки, разделиться надвое или погибнуть. Эволюция ее потомков происходит по тому же закону независимо друга от друга и от всей предыстории. Этот процесс объединяет ветвление и блуждание частиц, потому его называют ветвящимся случайным блужданием (см., например, [3, 4]). Опишем формально механизмы ветвления и блуждания.

Перемещение частиц по решетке задается простым симметричным случайным блужданием, как в [2–4]. Это значит, что частица, находящаяся в любой точке решетки, ждет время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром $\varkappa > 0$, а затем равновероятно перемещается в одну из соседних точек решетки.

Для каждой частицы задан ветвящийся процесс, в течение которого частица может разделиться надвое или погибнуть. Интенсивности ветвления зависят от положения точки на решетке и для каждой координаты $x \in \mathbb{Z}^d$ являются случайными величинами, не зависящими от времени. Через $V^+(x, \omega)$ обозначается интенсивность деления частицы надвое, а через $V^-(x, \omega)$ — интенсивность ее гибели. Переменная ω определена на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\Omega = \mathbb{R}_+^2 \hat{\ } \mathbb{Z}^d$. Вычисленное по Ω математическое ожидание мы будем обозначать угловыми скобками $\langle \cdot \rangle$. Переменная ω подчеркивает случайность величин и соответствует конкретной реализации пар интенсивностей. Предполагается, что пары интенсивностей в различных точках решетки независимы и одинаково распределены.

Введенные пары интенсивностей можно понимать как случайную среду на $\mathbb{Z}^d$, которая управляет процессом ветвления. Еще раз подчеркнем, что случайная среда стационарна и поведение процесса при $t \geqslant 0$ определяется конкретной реализацией пар $(V^+(x, \omega), V^-(x, \omega))$, $x \in \mathbb{Z}^d$. Конкретное значение ω будем называть "замороженной средой" [2, 3], подразумевая под этим фиксированную реализацию пар $(V^+(x, \omega), V^-(x, \omega))$.

Соединив механизмы ветвления и блуждания, опишем эволюцию частицы в ВСБ в случайной среде. Для удобства введем случайную величину $\tau(x, \omega)$, которая есть среднее время ожидания в произвольной точке $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$\tau(x, \omega) := \frac{1}{\varkappa + V^+(x, \omega) + V^-(x, \omega)}.$$

Эволюция частицы, находящейся в точке x, выглядит следующим образом. Частица ждет время, которое имеет экспоненциальное распределение с параметром $\tau(x, \omega)^{-1}$, а затем мгновенно умирает, делится надвое или перемещается равновероятно в одну из соседних точек решетки. Выбор одного из этих трех событий производится с соответствующими вероятностями $V^-(x, \omega)\tau(x, \omega)$, $V^+(x, \omega)\tau(x, \omega)$ и $\varkappa\tau(x, \omega)$.

В замороженной среде ω ВСБ в момент времени t есть система частиц на $\mathbb{Z}^d$, а значит, полностью описывается набором численностей частиц в точках решетки. Численность частиц в точке $y \in \mathbb{Z}^d$ в момент времени t обозначается $\mu_t(y, \omega)$. В наших предположениях в начальный момент времени наблюдается ровно одна частица в точке x, поэтому $\mu_0(y, \omega) = \delta(x, y)$, где x — начальное положение первой частицы, а $\delta(\cdot, \cdot)$ — символ Кронекера.

В замороженной среде ω эволюция частиц — это стохастический процесс, а потому численность частиц в каждой точке $\mu_t(y, \omega)$ есть случайная величина. Численность частиц принято изучать не напрямую, а через ее моменты [2–4]. Для замороженной среды ω моменты численности частиц в точке $y \in \mathbb{Z}^d$ при условии старта процесса в точке x называются "замороженными" (quenched moments [2]) и вычисляются усреднением по реализациям ВСБ в этой среде:

$$m_n(t, x, y, \omega) = \mathbb{E}_x \mu_t^n(y, \omega), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Каждой замороженной среде ω соответствует свой набор замороженных моментов $m_n(t,x,y,\omega)$. Замороженная среда как функция от ω есть случайная величина, поэтому замороженные моменты как функции от ω тоже суть случайные величины. Такие случайные величины сложно изучать напрямую и поэтому изучаются их моменты. Моменты получаются усреднением естественным образом — по вероятностному пространству, на котором определена переменная ω и которое, напомним, обозначается через угловые скобки. По устоявшейся терминологии моменты, полученные усреднением замороженных моментов, называются "отожженными" (annealed moments [2]). Отожженный момент p-го порядка, взятый от n-го замороженного момента, по определению выглядит следующим образом: $\langle m_n^p(t,x,y)\rangle$, $n\in\mathbb{N}$, $p\geqslant 1$. В [4] подробно описаны тонкости рассмотрения замороженных и отожженных моментов, в частности условия их существования.

2. Постановка задачи. Исследовать поведение $\langle m_n^p(t,x,y)\rangle$ на конечных временах в общем случае, по-видимому, невозможно. В связи с этим исследуется асимптотическое поведение $m_n^p(t,x,y)\rangle$ при $t\to\infty$ и фиксированных точках решетки x и y. В [2] получено поведение моментов при больших временах для численности частиц ВСБ на всей решетке в случае произвольного распределения разности $V^+(x,\omega)-V^-(x,\omega)$. Величина $V(x,\omega)=V^+(x,\omega)-V^-(x,\omega)$ называется случайным потенциалом и отражает поведение процесса ветвления в точке $x\in\mathbb{Z}^d$. В [3] исследовано асимптотическое поведение отожженных моментов $\langle m_n^p(t,x,y)\rangle$ в случае, когда распределение потенциала $V(x,\omega)$ имеет асимптотически вейбулловский хвост, т.е. если его функция распределения $F(z)$ подчиняется следующему условию:

$$\ln\left(1-F(z)\right)\sim -cz^{\alpha},\quad c>0,\quad \alpha>1.$$

Здесь и далее выражение $f(x)\sim g(x)$ означает, что $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)=1$.

В [5] показано, что асимптотическое поведение отожженных моментов $\langle m_1(t,x,y)\rangle$ может быть исследовано и в случае, когда потенциал $V(x,\omega)$ имеет асимптотически гумбелевский хвост, т.е. если его функция распределения подчиняется следующему условию:

$$\ln\left(1-F(z)\right)\sim -ce^{z\alpha},\quad c>0,\quad \alpha>1.$$

В деталях исследование первого отожженного момента для гумбелевского потенциала проведено в [4]. В настоящей работе будет показано, что в случае асимптотически гумбелевских хвостов может быть описано и асимптотическое поведение старших моментов $\langle m_n^p(t,x,y)\rangle$, $n\in\mathbb{N}$, $p\geqslant 1$.

Отдельно заметим, что в [6] асимптотическое поведение $\langle m_n^p(t,x,y)\rangle$ описано в общем случае, который включает потенциалы и с асимптотически вейбулловским, и с асимптотически гумбелевским хвостом. Однако для доказательства этого результата необходимо применение достаточно сложной техники из теории ветвящихся случайных процессов — так называемой леммы "многие-к-немногим" (many-to-few) — и последующей полной переформулировки задачи исследования ВСБ в требуемых для леммы терминах. В [4] и в настоящей работе показано, что можно поступить проще — использовать результаты из [3] и асимптотический анализ интегралов методом Лапласа [7].

3. Результаты для асимптотически гумбелевского потенциала. Результаты [3] обобщаются на случай гумбелевского семейства случайных потенциалов путем доказательства аналогов лемм 6.2–6.4 из работы [3].

Кратко напомним, что в лемме 6.2 [3] утверждается следующее: если функция распределения некоторой случайной величины асимптотически вейбулловская, то производящая функция кумулянтов имеет асимптотически степенной вид. В случае, когда вместо вейбулловского распределения рассматривается гумбелевское, в лемме 3 [4] показано, что производящая функция кумулянтов имеет асимптотически степенно-логарифмический вид. В лемме 6.3 [3] утверждается, что логарифм свертки двух функций, логарифм каждой из которых имеет степенной вид, также имеет степенной вид. Если же рассматривать функции с логарифмом степенно-логарифмического вида, то, согласно лемме 4 из [4], логарифм свертки этих функций будет иметь степенно-логарифмический вид. Наконец, лемма 6.4 [3] — это обобщение леммы 6.3 [3] для случая многомерной свертки. Следующая лемма есть обобщение леммы 4 [4] на случай многомерной свертки.

Лемма. *Пусть* $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$ *— непрерывные функции, такие, что* $\ln f_i(t)\sim at\ln t$, $t\to\infty$, $i=1,2$. *Тогда для следующего интеграла:*

$$W^{(p)}(t):=\int\limits_0^t\cdots\int\limits_0^t f_1\left(s_1+\ldots+s_p\right)f_2\left(pt-s_1-\ldots-s_p\right)ds_1\ldots ds_p$$

верно асимптотическое равенство

$$\ln W^{(p)}(t)\sim apt\ln t,\quad t\to\infty.$$

Доказательство. Запишем функции $\ln f_i(t)$ в следующей форме:

$$\ln f_i(t) = at\ln t + \varphi_i(t), \quad i = 1, 2.$$

Согласно предположениям леммы для любого $\varepsilon > 0$ существует число $K = K(\varepsilon) > 0$, такое, что

$$|\varphi_i(t)| \leqslant K + \varepsilon t \ln t, \quad i = 1, 2. \tag{1}$$

Эти оценки подсказывают, что свертка $W^{(p)}(t)$ должна асимптотически зависеть от главной части асимптотики, т.е. от $at\ln t$. Обозначим через $W_0^{(p)}(t)$ интеграл, который соответствует свертке главных частей асимптотик:

$$W_0^{(p)}(t) = \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t e^{aS\ln S + a(pt-S)\ln(pt-S)} ds_1 \ldots ds_p,$$

где $S := s_1 + \ldots + s_p$.

В силу (1) интеграл $W^{(p)}(t)$ можно оценить следующим образом:

$$W_0^{(p)}(t) \cdot e^{-2K-2\varepsilon t\ln t} \leqslant W^{(p)}(t) \leqslant W_0^{(p)}(t) \cdot e^{2K+2\varepsilon t\ln t}.$$

Взяв логарифм, получим

$$\ln W_0^{(p)}(t) - 2K - 2\varepsilon t\ln t \leqslant \ln W^{(p)}(t) \leqslant \ln W_0^{(p)}(t) + 2K + 2\varepsilon t\ln t. \tag{2}$$

Исследуем асимптотическое поведение $W_0^{(p)}(t)$ при $t \to \infty$. Обычно подобные задачи решаются методом Лапласа (см., например, [7]). Для его применения необходимо избавиться от переменного предела интегрирования. Сделаем замену переменных $s_1 := tv_1, \ldots, s_p = tv_p$ и обозначим $V := \frac{1}{p}(v_1 + \ldots + v_p)$. Тогда $S = ptV$ и $W_0^{(p)}(t)$ принимает следующий вид:

$$W_0^{(p)}(t) = t^p \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 e^{aptV\ln(ptV) + a(pt-ptV)\ln(pt-ptV)} dv_1 \ldots dv_p. \tag{3}$$

Упростим выражение в экспоненте:

$$aptV\ln(ptV) + a(pt-ptV)\ln(pt-ptV) = apt\big(V\ln(ptV) + (1-V)\ln\{pt(1-V)\}\big) =$$

$$= apt\ln(pt) + apt\left(V\ln V + (1-V)\ln(1-V)\right). \tag{4}$$

Подставим полученное выражение (4) обратно в формулу (3):

$$W_0^{(p)}(t) = t^p e^{apt\ln(pt)} \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 e^{apt(V\ln V + (1-V)\ln(1-V))} dv_1 \ldots dv_p. \tag{5}$$

Мы находимся в условиях применения метода Лапласа. Согласно этому методу интеграл в (5) при больших t близок к значению своей подынтегральной функции в точке максимума. Функция $V\ln V + (1-V)\ln(1-V)$ достигает максимума в точках $V = 0$ и $V = 1$, и он равен нулю. Поэтому при больших t интеграл из выражения (5) асимптотически равен единице. Тем самым

$$W_0^{(p)}(t) \sim t^p e^{apt\ln(pt)}, \quad \ln W_0^{(p)}(t) \sim apt\ln t, \quad t \to \infty.$$

Полученное выражение, подставленное в неравенство (2), влечет утверждение леммы.

На основе доказанной леммы, применяя леммы 3, 4 [4] и схему доказательства теоремы 6.1 [3], получаем следующую теорему.

Теорема. *Пусть дана модель ВСБ на многомерной решетке* $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, *с непрерывным временем в случайной среде со стационарным, пространственно независимым и однородным потенциалом* $V(x, \omega)$, $x \in \mathbb{Z}^d$. *Пусть для его функции распределения* $F(z)$ *выполнено условие*

$$\ln(1 - F(z)) \sim -ce^{z\alpha}, \quad c > 0, \quad \alpha > 1, \quad z \to \infty.$$

Тогда при фиксированных $x, y \in \mathbb{Z}^d$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\ln \langle m_n^p(t, x, y) \rangle \sim \alpha^{-1} pnt \ln t, \quad t \to \infty.$$

Автор приносит благодарность проф. Е. Б. Яровой и проф. С. А. Молчанову за обсуждение задачи.

Работа автора поддержана фондом БАЗИС, договор № 22–8–3–36–1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Перемежаемость пассивных полей в случайных средах // Журн. эксперимент. и теор. физ. 1985. **89**, № 6. 2061–2072.
2. *Gärtner J., Molchanov S.* Parabolic problems for the Anderson model // Communs Math. Phys. 1990. **132**, N 3. 613–655.
3. *Albeverio S.A., Bogachev L.V., Molchanov S.A., Yarovaya E.B.* Annealed moment Lyapunov exponents for a branching random walk in a homogeneous random branching environment // Markov Processes Relat. Fields. 2000. **6**. 473–516.
4. *Куценко В.А., Соколов Д.Д., Яровая Е.Б.* Неустойчивости в случайных средах и режимы с обострением // Журн. эксперимент. и теор. физ. 2023. **163**, № 4. 561–573.
5. *Yarovaya E.* Symmetric branching walks in homogeneous and non homogeneous random environments // Communs Stat. Simulation and Computation. 2012. **41**, N 7. 1232–1249.
6. *König W., Gün O., Sekulović O.* Moment asymptotics for branching random walks in random environment // Electron. J. Probab. 2013. **18**. 1–18.
7. *Butler R.W.* Saddlepoint approximations with applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

Поступила в редакцию
15.02.2023

УДК 514.763

ИНВАРИАНТНЫЕ СУММЫ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Ф. М. Малышев[1]

На основе предлагаемого способа решения так называемых (r, s)-систем линейных уравнений доказано, что порядки однородных инвариантных дифференциальных операторов n гладких вещественных функций одной переменной принимают значения от n до $\frac{n(n+1)}{2}$, а размерность пространства всех таких операторов не превосходит $n!$. Получена классификация инвариантных дифференциальных операторов порядка $n + s$ для $s = 1, 2, 3, 4$, а при $n = 4$ — для всех порядков от 4 до 10. Однородные инвариантные дифференциальные операторы самого маленького порядка n и самого большого порядка $\frac{n(n+1)}{2}$ представлены соответственно произведением n первых дифференциалов ($s = 0$) и вронскианом ($s = (n-1)n/2$). Доказано существование ненулевых однородных инвариантных дифференциальных операторов порядка $n + s$ для $s < \frac{1+\sqrt{5}}{2}(n - 1)$.

Ключевые слова: производная, дифференциал, система линейных уравнений, симплекс, инвариантный дифференциальный оператор.

Based on the method proposed for solving the so-called (r, s)-systems of linear equations, it is proved that the orders of homogeneous invariant differential operators n of smooth real

[1] *Малышев Фёдор Михайлович* — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. отдела дискретной математики Матем. ин-та РАН. e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru.

Malyshev Fedor Mikhailovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow, Department of Discrete Mathematics.