Краткие сообщения

УДК 512.812

ИНВАРИАНТЫ ЖОРДАНА–КРОНЕКЕРА СИНГУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ ДЛЯ ШЕСТИМЕРНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Ф. И. Лобзин[1]

Вычислены инварианты Жордана–Кронекера сингулярных пучков для шестимерных нильпотентных алгебр Ли.

Ключевые слова: скобка Пуассона–Ли, скобка с замороженным аргументом, инварианты Жордана–Кронекера.

In this paper, we calculate the Jordan–Kronecker invariants of singular pencils for six-dimensional nilpotent Lie algebras.

Key words: Lie–Poison bracket, bracket with a frozen argument, Jordan–Kronecker invariants.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-7

Введение. В задаче о построении полных биинволютивных наборов полиномов для алгебр Ли большое значение имеют размеры жордановых и кронекеровых блоков в разложении пучков: $(\mathcal{A}_x - \lambda\mathcal{A}_a)_{ij} = \left(c_{ij}^k x_k - \lambda c_{ij}^k a_k\right)$, где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $(x_k), (a_k) \in \mathfrak{g}^*$. Подробнее о разложении Жордана–Кронекера и его роли в построении полных биинволютивных наборов можно прочитать в работе [1]. Во многих публикациях посчитаны эти инварианты для точек общего положения, однако в задаче о построении биинволютивных наборов большое значение имеют размеры жордановых и кронекеровых блоков в разложении пучков в других точках. Такие случаи для некоторых алгебр Ли были изучены в работе [2], но результаты, полученные для точек не общего положения в этой работе, неверны. Исправлению этих случаев и посвящена настоящая заметка. Хорошо известно, что множество, где ранг матрицы $(\mathcal{A}_x)_{ij} = c_{ij}^k x_k$ максимален, открыто в топологии Зарисского. Обозначим через Sing множество x, таких, что $\operatorname{rank}(\mathcal{A}_x(x))_{ij} \leqslant r-2$, где r — максимальный ранг. Через Sing$'$ обозначим множество x, таких, что $\operatorname{rank}(\mathcal{A}_x(x))_{ij} = r-4$. Мы будем рассматривать только шестимерные нильпотентные алгебры Ли, поэтому “более сингулярные” множества не встречаются. Кроме того, если $x \in \mathrm{Sing}'$, то $\mathcal{A}_x = 0$. Это означает, что случаи, которые задаются прямыми $x + \lambda a$, пересекающими Sing$'$, тривиальны в том смысле, что в них размеры жордановых и кронекеровых блоков полностью задаются рангом любой ненулевой матрицы пучка, а именно если $\operatorname{rank} A = r$, то “пучок” содержит r жордановых блоков размерности 2, а остальные блоки кронекеровы.

Пример. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}_{6,22}$, задаваемую структурным тензором:

$$\mathcal{A}_x(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_5 & 0 & x_6 & 0 \\ -x_3 & 0 & x_4 & x_5 & 0 & 0 \\ -x_5 & -x_4 & 0 & x_6 & 0 & 0 \\ 0 & -x_5 & -x_6 & 0 & 0 & 0 \\ -x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Максимальный ранг этой матрицы равен 4. Сингулярное множество $\mathrm{Sing}(\mathcal{A}_{6,22})$ задается системой уравнений $x_6 = 0, x_5 = 0$, множество Sing$'$ задается системой уравнений $x_6 = 0, x_5 = 0, x_4 = 0, x_3 = 0$. Далее разобраны все возможные нетривиальные случаи пучков для этой алгебры Ли. Соотношения на параметры пучков a_i, x_i выписаны из соображений принадлежности соответствующих пучков

[0] *Лобзин Фёдор Игоревич* — студ. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ; Моск. центр фунд. и прикл. матем., e-mail: fiadat@mail.ru.

Lobzin Fedor Igorevich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics.

к геометрическому классу, описанному отдельно в каждом случае, и с учетом того, что пучок не должен содержать 0.

(A) ($x+\lambda a$ не пересекает Sing); в этом случае пучок не содержит жордановых блоков, более того, это точки общего положения, поскольку коразмерность сингулярного множества равна двум. При этом существует вектор, лежащий в ядре всех элементов такого пучка, отвечающий тривиальному кронекерову блоку. Таким образом, в точках общего положения пучок содержит два кронекерова блока размера 5 и 1.

(B) ($x + \lambda a$ пересекает Sing, но не содержится в нем); пересечение сингулярного множества означает, что для некоторого λ_0 верно $x_5 + \lambda_0 a_5 = 0, x_6 + \lambda_0 a_6 = 0$. Здесь возможны два случая:

1) (ядро пучка одномерно); $a_6 x_5 = a_6 x_5$, существует $j \in \{3, 4\} : a_6 x_j \neq a_j x_6$. Кронекеров блок размера 1 только один, при этом есть хотя бы один жорданов блок (так как есть пересечение с сингулярным множеством). Значит, в этих точках пучок содержит один жорданов блок размера 2 и два кронекерова блока размера $1, 3$;

2) (ядро пучка двумерно); $a_6 = x_6 = 0$, существует $j \in \{3, 4\} : a_5 x_j \neq a_j x_5$. В таких случаях векторы e_5, e_6 лежат в ядре всего пучка и им соответствуют два кронекерова блока размера 1, при этом пересечение $x + \lambda a$ с Sing единственно, значит, жорданов блок только один. Таким образом, в этих точках пучок содержит один жорданов блок размера 4 и два кронекерова блока размера 1;

(C) ($x + \lambda a$ лежит в Sing); $a_5 = a_6 = x_5 = x_6 = 0$, $a_4 x_3 \neq a_3 x_4$. Ранг всех элементов таких пучков равен двум, при этом постоянен, следовательно, разложение состоит из четырех кронекеровых блоков размера $1, 1, 1, 3$.

Результаты.

Теорема. *Инварианты Жордана–Кронекера всех пучков* $\left(c_{ij}^k x_k - \lambda c_{ij}^k a_k\right)$ *в случае вещественных* 6*-мерных нильпотентных алгебр Ли представлены в таблице.*

Комментарии к таблице. В первых двух столбцах таблицы выписаны алгебры Ли (в обозначениях статьи [3]) и их структурные константы. В третьем столбце выписаны все содержательные случаи совместного расположения прямой, задающей пучок, и сингулярных множеств, определенных ранее, обозначенных аналогично примеру. Через т. о. п. обозначены точки общего положения, Ж и К — жордановы и кронекеровы блоки соответственно. В четвертом и пятом столбцах выписаны размеры жордановых и кронекеровых блоков соответственно для каждого пучка. Важно отметить, что в таблице не представлены случаи, когда пучок содержит нулевую форму, поскольку, как было показано выше, в этом случае задача тривиальна.

Инварианты Жордана–Кронекера для пучков $\left(c_{ij}^k x_k - \lambda c_{ij}^k a_k\right)$

Алгебра Ли		Случаи	Блоки	
			Ж	К
$\mathcal{A}_{6,1}$	$[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_1, e_5] = e_6$	**(A)** т. о. п.	–	$1, 1, 1, 3$
$\mathcal{A}_{6,2}$	$[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_5$, $[e_1, e_5] = e_6$	**(A)** т. о. п.	–	$1, 1, 1, 3$
$\mathcal{A}_{6,3}$	$[e_1, e_2] = e_6$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_2, e_3] = e_5$	**(A)** т. о. п.	–	$1, 1, 1, 3$
$\mathcal{A}_{6,4}$	$[e_1, e_2] = e_5$, $[e_1, e_3] = e_6$, $[e_2, e_4] = e_6$	**(B)** т. о. п.	4	$1, 1$
$\mathcal{A}_{6,5}$	$[e_1, e_3] = e_5$, $[e_1, e_4] = e_6$, $[e_2, e_3] = \pm e_6$, $[e_2, e_4] = e_5$	**(B)** т. о. п.	$2, 2$	$1, 1$
$\mathcal{A}_{6,6}$	$[e_1, e_2] = e_6$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_5$, $[e_2, e_3] = e_5$	**(B)** т. о. п. **(C)** $x_5 = a_5 = 0$, $a_4 x_6 \neq a_6 x_4$	4 –	$1, 1$ $1, 1, 1, 3$

П р о д о л ж е н и е

$\mathcal{A}_{6,7}$	$[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_2,e_3]=e_6$	**(B)** т. о. п. **(C)** $a_5=x_5=0,\ a_4x_6\neq a_6x_4$ или $a_6=x_6=0,\ a_4x_5\neq a_5x_4$	$2,2$ —	$1,1$ $1,1,1,3$
$\mathcal{A}_{6,8}$	$[e_1,e_2]=e_3+e_5$, $[e_1,e_3]=e_4$, $[e_2,e_5]=e_6$	**(B)** т. о. п. **(C)** $a_4=x_4=0,\ (a_3+a_5)x_6\neq a_6(x_3+x_5)$ или $a_6=x_6=0,\ (a_3+a_5)x_4\neq a_4(x_3+x_5)$	$2,2$ —	$1,1$ $1,1,1,3$
$\mathcal{A}_{6,9}$	$[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_5]=e_6$, $[e_2,e_3]=e_6$	**(B)** т. о. п. **(C)** $a_6=x_6=0,\ a_4x_3\neq a_3x_4$	4 —	$1,1$ $1,1,1,3$
$\mathcal{A}^+_{6,10}$	$[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_3]=e_5$, $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_2,e_3]=e_6$, $[e_2,e_4]=e_5$	**(B)** т. о. п. **(C)** $a_5-a_6=x_5-x_6=0,\ a_5x_3\neq a_3x_5$ или $a_5+a_6=x_5+x_6=0,\ a_5x_3\neq a_3x_5$	$2,2$ —	$1,1$ $1,1,1,3$
$\mathcal{A}^-_{6,10}$	$[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_3]=e_5$, $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_2,e_3]=-e_6$, $[e_2,e_4]=e_5$	**(B)** т. о. п.	$2,2$	$1,1$
$\mathcal{A}_{6,11}$	$[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_2,e_3]=e_6$	**(B)** т. о. п. **(C)** $a_5=x_5=0,\ \exists\, i,j\in\{3,4,6\}:\ a_ix_j\neq a_jx_i$ или $a_6=x_6=0,\ \exists\, i,j\in\{3,4,5\}:\ a_ix_j\neq a_jx_i$	$2,2$ —	$1,1$ $1,1,1,3$
$\mathcal{A}_{6,12}$	$[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_2,e_5]=e_6$	**(B)** т. о. п.	2	$1,3$
$\mathcal{A}_{6,13}$	$[e_1,e_2]=e_5$, $[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_2,e_5]=e_6$	**(B)** т. о. п. **(B)** $a_4=x_4=0,\ a_6x_5\neq a_5x_6$ **(C)** $a_6=x_6=0,\ a_5x_4\neq a_4x_5$	2 4 —	$1,3$ $1,1$ $1,1,1,3$
$\mathcal{A}_{6,14}$	$[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_2,e_3]=e_5$, $[e_2,e_5]=\alpha e_6,\ \alpha\neq 0$	**(B)** т. о. п. **(C)** $a_6=x_6=0,\ a_5x_4\neq a_4x_5$	2 —	$1,3$ $1,1,1,3$
$\mathcal{A}_{6,15}$	$[e_1,e_2]=e_3+e_5$, $[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_2,e_5]=e_6$	**(B)** т. о. п. **(B)** $a_4=x_4=0,\ (a_3+a_5)x_6\neq a_6(x_3+x_5)$ **(C)** $a_6=x_6=0,\ (a_3+a_5)x_4\neq a_4(x_3+x_5)$	2 4 —	$1,3$ $1,1$ $1,1,1,3$
$\mathcal{A}_{6,16}$	$[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_1,e_5]=e_6$, $[e_2,e_3]=e_5$, $[e_2,e_4]=e_6$	**(A)** т. о. п. **(B)** $a_6x_5=a_5x_6,\ a_6x_4\neq a_4x_6$ **(B)** $a_6=x_6=0,\ a_5x_4\neq a_4x_5$	— 2 4	$1,5$ $1,3$ $1,1$
$\mathcal{A}_{6,17}$	$[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_2,e_5]=e_6$	**(B)** т. о. п. **(B)** $a_4=x_4=0,\ a_3x_6\neq a_6x_3$ **(C)** $a_6=x_6=0,\ a_3x_4\neq a_4x_3$	2 4 —	$1,3$ $1,1$ $1,1,1,3$
$\mathcal{A}_{6,18}$	$[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_2,e_3]=e_5$, $[e_2,e_5]=\alpha e_6,\ \alpha\neq 0$	**(B)** т. о. п. **(B)** $x_4=x_5=a_4=a_5=0,\ a_3x_6\neq a_6x_3$ **(C)** $a_6=x_6=0,\ \exists\, i,j\in\{3,4,5\}:\ a_ix_j\neq a_jx_i$	2 4 —	$1,3$ $1,1$ $1,1,1,3$

Окончание

$\mathcal{A}_{6,\,19}$	$[e_1,e_2]=e_3,$ $[e_1,e_3]=e_4,$ $[e_1,e_4]=e_5,$ $[e_1,e_5]=e_6,$ $[e_2,e_3]=e_6$	**(B)** т. о. п. **(B)** $x_5=a_5=0,\ (a_6,x_6)\neq 0,\ a_4x_3\neq a_3x_4$ или $x_5=a_5=0,\ \exists\, j\in\{3,4\}:\ a_6x_j\neq a_jx_6$ **(C)** $a_6=x_6=0,\ \exists\, i,j\in\{3,4,5\}:\ a_ix_j\neq a_jx_i$	2 4 —	$1,3$ $1,1$ $1,1,1,3$
$\mathcal{A}_{6,\,20}$	$[e_1,e_2]=e_3,$ $[e_1,e_3]=e_4,$ $[e_1,e_4]=e_5,$ $[e_1,e_5]=e_6,$ $[e_2,e_3]=e_5,$ $[e_2,e_4]=e_6$	**(A)** т. о. п. **(B)** $a_6x_5=a_6x_5,\ \exists\, j\in\{3,4\}:\ a_6x_j\neq a_jx_6$ **(B)** $x_4=x_5=a_4=a_5=0,\ a_3x_6\neq a_6x_3$ или $a_6=x_6=0,\ \exists\, j\in\{3,4\}:\ a_5x_j\neq a_jx_5$ **(C)** $a_5=a_6=x_5=x_6=0,\ a_4x_3\neq a_3x_4$	— 2 4 —	$1,5$ $1,3$ $1,1$ $1,1,1,3$
$\mathcal{A}_{6,\,21}$	$[e_1,e_2]=e_3,$ $[e_1,e_5]=e_6,$ $[e_2,e_3]=e_4,$ $[e_2,e_4]=e_5,$ $[e_3,e_4]=e_6$	**(B)** т. о. п. **(C)** $a_6=x_6=0,\ \exists\, i,j\in\{3,4,5\}:\ a_ix_j\neq a_jx_i$	2 2 —	$1,3$ $1,1,1,3$
$\mathcal{A}_{6,\,22}$	$[e_1,e_2]=e_3,$ $[e_1,e_3]=e_5,$ $[e_1,e_5]=e_6,$ $[e_2,e_3]=e_4,$ $[e_2,e_4]=e_5,$ $[e_3,e_4]=e_6$	**(A)** т. о. п. **(B)** $a_6x_5=a_6x_5,\ \exists\, j\in\{3,4\}:\ a_6x_j\neq a_jx_6$ **(B)** $a_6=x_6=0,\ \exists\, j\in\{3,4\}:\ a_5x_j\neq a_jx_5$ **(C)** $a_5=a_6=x_5=x_6=0,\ a_4x_3\neq a_3x_4$	— 2 4 —	$1,5$ $1,3$ $1,1$ $1,1,1,3$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bolsinov A.V., Zhang P.* Jordan–Kronecker invariants of finite–dimensional Lie algebras // Transform. Groups. 2016. **21**. 51–86.
2. *Грознова А.Ю.* Инварианты Жордана–Кронекера для алгебр Ли малых размерностей // Фунд. и прикл. матем. 2021. **23**, № 4. 73–86.
3. *Короткевич А.А.* Интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли малой размерности // Матем. сб. 2009. **200**, № 12. 3–40.

Поступила в редакцию
01.03.2023

УДК 519.21

О МОМЕНТАХ ВЕТВЯЩЕГОСЯ БЛУЖДАНИЯ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ С ГУМБЕЛЕВСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В. А. Куценко[1]

Рассматривается ветвящееся случайное блуждание по многомерной решетке в случайной среде с непрерывным временем. В основе процесса лежит простое симметричное случайное блуждание. Случайная среда в каждой точке решетки определяется неотрицательными, независимыми и одинаково распределенными случайными интенсивностями деления и гибели частиц. Предполагается, что разность интенсивностей деления и гибели частиц имеет асимптотически гумбелевское распределение. Получены результаты о предельном поведении моментов, усредненных по среде.

Ключевые слова: случайные процессы, ветвящиеся случайные блуждания, случайная среда, перемежаемость.

A time-continuous branching random walk over a multidimensional lattice in a random medium is considered. Underlying random walk is considered to be simple and symmetric. The

[1] *Куценко Владимир Александрович* — асп. каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vlakutsenko@ya.ru.
Kutsenko Vladimir Aleksandrovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Probability Theory.