

- during creep using a nonlinear Maxwell-type viscoelastoplasticity model // Russ. Metallurgy (Metally). 2019. N 10. 956–963 (DOI: 10.1134/S0036029519100136).
42. *Khokhlov A.V., Shaporev A.V., Stolyarov O.N.* Loading-unloading-recovery curves for polyester yarns and identification of the nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model // Mech. Compos. Materials. 2023. **59**, N 1. 129–146 (DOI: 10.1007/s11029-023-10086-x).
43. *Khokhlov A.V.* Two-sided estimates for the relaxation function of the linear theory of heredity via the relaxation curves during the ramp-deformation and the methodology of identification // Mech. Solids. 2018. **53**, N 3. 307–328 (DOI: 10.3103/S0025654418070105).
44. *Khokhlov A.V.* Properties of the set of strain diagrams produced by Rabotnov nonlinear equation for rheonomous materials // Mech. Solids. 2019. **54**, N 3. 384–399 (DOI: 10.3103/S002565441902002X).
45. *Zhilayev A.P., Pshenichnyuk A.I.* Superplasticity and grain boundaries in ultrafine-grained materials. Cambridge: Cambridge Int. Sci. Publ., 2010.
46. *Ovid'ko I.A., Valiev R.Z., Zhu Y.T.* Review on superior strength and enhanced ductility of metallic nanomaterials // Progress Materials Sci. 2018. **94**. 462–540.
47. *Mikhaylovskaya A.V., Kishchik A.A., Kotov A.D., et al.* Precipitation behavior and high strain rate superplasticity in a novel fine-grained aluminium based alloy // Mater. Sci. Eng. A. 2019. **760**. 37–46.
48. *Mochugovskiy A.G., Mosleh A.O., Kotov A.D., Khokhlov A.V., Kaplanskaya L.Y., Mikhaylovskaya A.V.* Microstructure evolution, constitutive modelling, and superplastic forming of experimental 6XXX-type alloys processed with different thermomechanical treatments // Materials. 2023. **16**, N 1. 445. 1–18 (DOI: 10.3390/ma16010445).

Поступила в редакцию
24.06.2022

После доработки
28.03.2023

УДК 539.376

КВАЗИАВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

В. А. Банько¹, Д. В. Георгиевский²

Исследуются начально-краевые задачи о разгоне из состояния покоя двухконстантной вязкопластической среды (тело Бингама) в полуплоскости при задании на границе касательного напряжения как кусочно-непрерывной, монотонно неубывающей функции времени. В качестве дополнительного условия на неизвестной границе раздела между увеличивающейся со временем по толщине зоны течения и неподвижной полубесконечной жесткой зоны выбирается требование, чтобы решение задачи при стремлении к нулю предела текучести материала в каждой точке и в каждый момент времени стремилось к решению соответствующей задачи вязкого течения, известной как обобщенная задача о диффузии вихревого слоя. Находятся точные аналитические решения для профилей касательного напряжения и скорости при нестационарном одномерном течении. Выделяются случаи автомодельности и так называемой квазиавтомодельности. Особый интерес представляет характер стремления при $t \rightarrow \infty$ толщины слоя, в котором реализуется сдвиг, к бесконечности.

Ключевые слова: вязкопластическая среда, сдвиг, касательное напряжение, жесткая зона, диффузия вихревого слоя, полуплоскость, предел текучести, вязкость.

The initial-boundary value problems of acceleration from a state of rest of a two-constant viscoplastic medium (Bingham body) in a half-plane is investigated when the tangential stress

¹Банько Владислав Александрович — асп. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mr.banko.vlad@mail.ru.
Banko Vladislav Alexandrovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Elasticity Theory.

²Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: georgiev@mech.math.msu.su.

Georgievskii Dimitri Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Head of the Chair of Elasticity Theory.

is given at the boundary as a piecewise continuous monotonically non-decreasing function of time. As an additional condition at an unknown interface between a flow zone that increases with time in thickness and a stationary semi-infinite rigid zone, the requirement is chosen that the solution of this problem with a tendency to zero of the yield strength of the material at each point and at each moment of time tends to the solution of the corresponding viscous flow problem known as the generalized vortex layer diffusion problem. The exact analytical solutions are found for tangential stress and velocity profiles in nonstationary one-dimensional flow. The cases of self-similarity and so-called quasi-self-similarity are distinguished. The nature of the tendency at $t \rightarrow \infty$ of the thickness of the layer, in which the shear is realized, to infinity is of particular interest.

Key words: viscoplastic medium, shear, tangent stress, rigid zone, diffusion of vortex layer, half-plane, yield stress, viscosity.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-6

1. Рассмотрим неустановившееся плоскопараллельное сдвиговое течение однородной несжимаемой сплошной среды плотности ρ в полуплоскости

$$\Omega = \{-\infty < x_1 < \infty, x_2 > 0\}, \quad \partial\Omega = \{-\infty < x_1 < \infty, x_2 = 0\}. \quad (1)$$

Декартову координату x_2 для краткости в дальнейшем будем обозначать x .

Примем тензорно-линейные определяющие соотношения

$$s_{ij} = \frac{\sigma_u(v_u)}{v_u} v_{ij}, \quad v_u > 0, \quad (2)$$

где s_{ij} и v_{ij} — декартовы компоненты девиатора напряжений ($s_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}$) и тензора скоростей деформаций, совпадающего в силу несжимаемости со своим девиатором; p — давление; $v_u = \sqrt{v_{kl}v_{kl}}$ — интенсивность скоростей деформаций; $\sigma_u = \sqrt{s_{kl}s_{kl}}$ — интенсивность напряжений. Примем также зависимость $\sigma_u(v_u)$, входящую в (2) и задающую скалярное определяющее соотношение среды, в виде двухконстантной вязкопластической модели Бингама:

$$\sigma_u = \sigma_s + 2\mu v_u \quad (3)$$

с пределом текучести $\sigma_s \geq 0$ и динамической вязкостью $\mu > 0$.

Кинематика и напряженное состояние при нестационарном одномерном сдвиге (плоская деформация) характеризуются единственной отличной от нуля компонентой скорости $v_1(x_2, t) \equiv v(x, t)$, единственными ненулевыми компонентами тензора скоростей деформаций $v_{12}(x_2, t) = (1/2)\partial v/\partial x$ и девиатора напряжений $s_{12}(x_2, t) \equiv \sigma(x, t)$, давлением $-\sigma_{11} = -\sigma_{22} = -\sigma_{33} \equiv p(x, t)$, которое в силу отсутствия массовой нагрузки постоянно в Ω и равно $p|_{x=0} = p_0$, а также интенсивностями $v_u = |\partial v/\partial x|/\sqrt{2}$ и $\sigma_u = \sqrt{2}|\sigma|$.

При $t < 0$ среда покоилась ($v \equiv 0, \sigma \equiv 0$), а при $t \geq 0$ на границе $\partial\Omega$ действует заданное касательное напряжение

$$\sigma(0, t) = S(t), \quad (4)$$

где $S(t)$ — кусочно-непрерывная, монотонно неубывающая функция, ограниченная в любой конечный момент времени. Благодаря сцеплению вязких элементарных слоев это действие передается в глубь области Ω вплоть до бесконечности.

Как известно (см., например, [1]), сдвиговое течение вязкопластической среды с соотношениями (2) и (3) реализуется не во всей области (1), а лишь в заранее неизвестной подобласти $\Omega_f \subset \Omega$,

такой, что в ней $\sigma_u(x, t) > \sigma_s$. Остальная часть занята жесткой зоной $\Omega_r \subset \Omega$, в которой $v_u \equiv 0$ и $\sigma_u \leq \sigma_s$. В случае одномерного плоскопараллельного сдвига с касательным напряжением $S(t)$ (4) на границе $x = 0$ подобласть Ω_f представляет собой расширяющийся со временем слой

$$\Omega_f = \{-\infty < x_1 < \infty, 0 < x < x^*(t)\},$$

где $x^*(t)$ — заранее неизвестная монотонно возрастающая функция. Она становится положительной начиная с момента времени $t_0 \geq 0$, в который $|S(t_0)|$ достигает значения $\sigma_s/\sqrt{2} = \tau_s$, называемого пределом текучести при сдвиге. Естественно, положим $t_0 < \infty$.

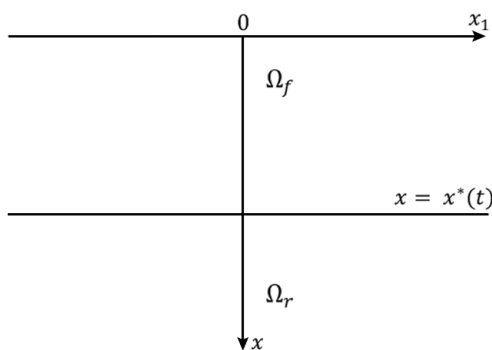


Рис. 1

Остальная часть области Ω — неподвижная полуплоскость (жесткая зона)

$$\Omega_r = \{-\infty < x_1 < \infty, x > x^*(t)\},$$

в которой $|\sigma(x, t)| \equiv \tau_s$ вплоть до бесконечности по x (рис. 1). В координатах (x, t) проекции подобластей Ω_f и Ω_r на ось x , а также разделяющая их граница $x^*(t)$ изображены на рис. 2.

Итак, в области сдвигового течения $t > t_0, 0 < x < x^*(t)$ из системы уравнений

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \sigma = \tau_s \operatorname{sign} \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (5)$$

являющейся следствием уравнения движения и определяющих соотношений (2) и (3), и граничных условий

$$\sigma(0, t) = S(t), \quad |\sigma(x^*(t), t)| = \tau_s \quad (6)$$

необходимо найти функции $\sigma(x, t)$ и $v(x, t)$. Начальных условий ставить не требуется, поскольку в момент начала сдвигового течения $t = t_0$ толщина области сдвига равна нулю, т.е. $\lim_{t \rightarrow t_0+0} x^*(t) = 0$.

В жесткой зоне $t > t_0, x \geq x^*(t)$ вместо уравнений (5) справедлива система

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

с одним граничным условием $\lim_{x \rightarrow \infty} v = 0$. Из него и системы (7) фактически следует неподвижность жесткой полуплоскости и равенство $|\sigma| = \tau_s$ всюду в ней.

Как и в любой задаче с неизвестной подвижной границей, необходимо представить замыкающее постановку дополнительное условие. Не останавливаясь здесь на возможностях задания этого условия и на подробностях теории задач Стефана [2, 3], сформулируем его так. Решение задачи вязкопластического течения при любых фиксированных x и t должно стремиться к решению соответствующей задаче вязкого течения в пределе $\tau_s \rightarrow 0$.

Разыскиваются касательное напряжение $\sigma(x, t)$, непрерывное при $x > 0$, и скорость $v(x, t)$, непрерывно дифференцируемая по x при $x > 0$, удовлетворяющие уравнениям (5)–(7) и сформулированному выше (пока словесно) условию предельного перехода при $\tau_s \rightarrow 0$. В процессе решения находится также подвижная граница $x^*(t)$.

В постановке предельной при $\tau_s \rightarrow 0$ задачи вязкого течения жесткие зоны отсутствуют, $t_0 = 0$ и функция $x^*(t)$ формально равна бесконечности при любом $t > 0$. Сдвиговое течение реализуется во всем квадранте $t > 0, x > 0$ на рис. 2. Таким образом,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \sigma = \mu \frac{\partial v}{\partial x}, \quad t > 0, \quad x > 0; \quad (8)$$

$$\sigma(0, t) = S(t), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma(x, t) = 0, \quad t > 0; \quad (9)$$

$$\sigma(x, 0) = 0, \quad x > 0. \quad (10)$$

2. Остановимся прежде всего на частном случае задания касательного напряжения на границе:

$$S(t) = S_0 h(t), \quad (11)$$

где $h(t)$ — функция Хевисайда. Данный случай примечателен тем, что допускает автомодельные решения с безразмерной переменной $\xi = x/(2\sqrt{\nu t})$, где $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость.

Рассмотрим сначала постановку (8)–(10) для ньютоновской вязкой среды. Исключим v из (8):

$$\nu \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (12)$$

и выпишем точное решение параболической задачи (9), (10), (12) с учетом (11):

$$\sigma(x, t) = S_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\eta^2} d\eta \right) \equiv S_0 (1 - \operatorname{erf} \xi) \equiv S_0 \operatorname{erfc} \xi, \quad (13)$$

где $\operatorname{erf} \xi$ и $\operatorname{erfc} \xi$ — функция ошибок и дополнительная функция ошибок соответственно.

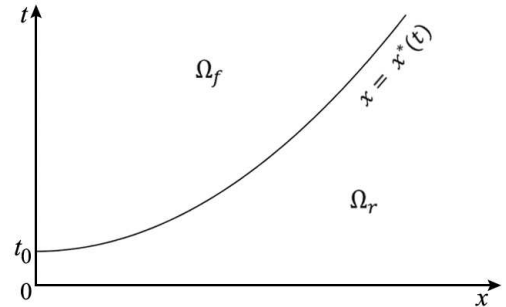


Рис. 2

Так как

$$S_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \sigma(x, t) \neq \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \sigma(x, t) = 0,$$

т.е. начальное (10) и граничное (11) условия взаимно не согласованы, решение (13) не имеет предела при стремлении к угловой точке $t = 0$, $x = 0$ на рис. 2. В то же время в сколь угодно близкой к углу внутренней точке квадранта решение (13) бесконечно дифференцируемо. Это носит известное название диффузии вихревого слоя на границе полуплоскости.

Из выражения (13) для σ восстанавливается профиль скорости. Его можно представить одним из следующих способов:

$$v(x, t) = \frac{S_0}{\mu} \left(x \operatorname{erfc} \xi - 2 \sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} e^{-\xi^2} \right) = \frac{2S_0}{\mu} \sqrt{\nu t} \left(\xi \operatorname{erfc} \xi - \frac{e^{-\xi^2}}{\sqrt{\pi}} \right), \quad (14)$$

$$v(0, t) = -\frac{2S_0}{\mu} \sqrt{\frac{\nu t}{\pi}}. \quad (15)$$

Видно, что выражения (14) уже не автомодельны, а из (15) следует, что скорость границы при задании разрывного касательного усилия (11) непрерывна по t и растет как \sqrt{t} .

Расход $Q(t) = \int_0^\infty v(x, t) dx$ через луч $x > 0$ проще всего найти, интегрируя первое уравнение (8) по x от нуля до бесконечности. Получим линейный рост расхода во времени:

$$Q(t) = -\frac{S_0}{\rho} t. \quad (16)$$

Обратимся теперь к вязкопластической среде с положительным пределом текучести при сдвиге τ_s . Из второго соотношения (5) следует, что в области сдвига $\operatorname{sign} \sigma = \operatorname{sign} (\partial v / \partial x)$. Поскольку в настоящей работе затрагиваются только монотонные процессы (разгон среды в одном направлении) и $\operatorname{sign} \sigma$ с течением времени не меняется, достаточно для определенности выбрать, например, $\operatorname{sign} \sigma = 1$, т.е. $S(t) > 0$, $S_0 > 0$. При этом можно считать, что $S_0 > \tau_s$ (иначе деформирования в Ω не будет), и тогда $t_0 = 0$.

Как и в случае вязкой среды, исключим v из системы (5) и опять придем к параболическому уравнению (12) для σ , но выполненному лишь в расширяющемся слое $0 < x < x^*(t)$, $t > 0$. Точное решение этого уравнения с граничными условиями (6) и требованием стремления к распределению (13) при $\tau_s \rightarrow 0$ зависит, как и ранее, от автомодельной переменной ξ . Имеем

$$\sigma(x, t) = S_0 \operatorname{erfc} \xi, \quad t > 0, \quad 0 < x < x^*(t) = 2\xi^* \sqrt{\nu t},$$

где постоянная величина ξ^* находится из уравнения

$$\operatorname{erfc} \xi^* = \gamma, \quad \gamma = \frac{\tau_s}{S_0} < 1.$$

В неподвижной жесткой полуплоскости $x > x^*(t) = 2\xi^* \sqrt{\nu t}$ касательное напряжение равно τ_s . Отметим, что в случае ступеньки Хевисайда (11) толщина зоны течения Ω_f растет пропорционально \sqrt{t} .

Интегрируя уравнение (5), которое с надлежащим выбором знака записывается в виде $\partial v / \partial x = (\sigma - \tau_s) / \mu$, с граничным условием $v(x^*(t), t) = 0$, найдем скорость сдвигового течения:

$$v(x, t) = \frac{2S_0}{\mu} \sqrt{\nu t} \left[\xi (\operatorname{erfc} \xi - \gamma) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} (e^{-\xi^2} - e^{-\xi^{*2}}) \right], \quad t > 0, \quad 0 < x < x^*(t); \quad (17)$$

$$v(0, t) = -\frac{2S_0}{\mu} \sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} (1 - e^{-\xi^{*2}}). \quad (18)$$

Расход $Q(t)$ через удлиняющийся со временем отрезок $0 < x < x^*(t)$ вычисляется после интегрирования по x от нуля до $x^*(t)$ обеих частей уравнения движения (5). Учитывая граничные условия (6) и (11) для σ , а также правило дифференцирования по времени интеграла по подвижному объему

$$\frac{d}{dt} \int_0^{x^*(t)} v(x, t) dx = \int_0^{x^*(t)} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) dx + \dot{x}^* v(x^*(t), t),$$

получим

$$Q(t) = -(1 - \gamma) \frac{S_0}{\rho} t. \tag{19}$$

Сравнение уравнений (14) с (17), (15) с (18) и (16) с (19), т.е. кинематических характеристик вязкого и вязкопластического течений, свидетельствует о замедлении течения и сокращении массопереноса вдоль оси x_1 при появлении предела текучести. На этот факт обращалось внимание и в других задачах [4, 5], где в определяющих соотношениях учитывалась нелинейная вязкость в виде произвольной монотонной функции упрочнения.

3. Точные решения $\sigma(x, t)$ параболических задач (5), (6) и (8)–(10) можно выписать и для более общего задания граничного условия при $x = 0$, чем в (11). В случае ньютоновской вязкой среды для любой кусочно-непрерывной функции $S(t)$ решение задачи (12), (9), (10) записывается в виде интеграла Стильтеса:

$$\sigma(x, t) = \int_0^t \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/[2\sqrt{\nu(t-\tau)}]} e^{-\eta^2} d\eta \right) dS(\tau), \tag{20}$$

где $dS(t) = \dot{S}(t) dt$ в точках непрерывности и $dS(t) = [S]_j \delta(t - t_j) dt$ в точках разрыва t_j . Выражение (20) формально уже не зависит, как, например, (13), от автономной переменной ξ , поэтому решения такого типа иногда называют квазиавтономными.

Порядок интегрирования по заштрихованной на рис. 3 области в двойном интеграле (20) можно поменять и прийти к однократному интегралу

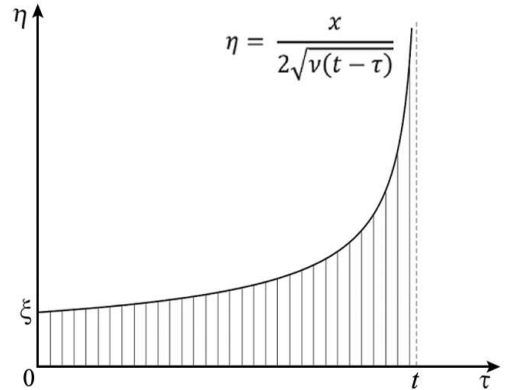


Рис. 3

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= S(t) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} \int_{t-x^2/(4\nu\eta^2)}^t e^{-\eta^2} dS(\tau) d\eta - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \int_0^t e^{-\eta^2} dS(\tau) d\eta = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} e^{-\eta^2} S\left(t - \frac{x^2}{4\nu\eta^2}\right) d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} e^{-\eta^2} S\left(\left(1 - \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)t\right) d\eta. \end{aligned} \tag{21}$$

Вычислим скорость сдвигового течения в случае $t > 0$, $x > 0$:

$$v(x, t) = \frac{2}{\mu\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_{y/(2\sqrt{\nu t})}^{\infty} e^{-\eta^2} S\left(t - \frac{y^2}{4\nu\eta^2}\right) d\eta dy + V(t), \tag{22}$$

где функция $V(t)$ находится из условия на бесконечности $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x, t) = 0$. Изменим порядок интегрирования по заштрихованной на рис. 4 области в двойном интеграле (22):

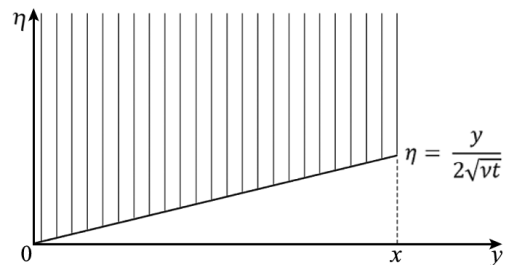


Рис. 4

$$v(x, t) = \frac{2}{\mu\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\infty} \int_0^x - \int_0^{x/(2\sqrt{\nu t})} \int_{2\eta\sqrt{\nu t}}^x \right) e^{-\eta^2} S\left(t - \frac{y^2}{4\nu\eta^2}\right) dy d\eta + V(t).$$

После преобразований окончательно запишем

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{2}{\mu\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} e^{-\eta^2} \int_{2\eta\sqrt{\nu t}}^x S\left(t - \frac{y^2}{4\nu\eta^2}\right) dy d\eta, \\ v(0, t) &= -\frac{2}{\mu\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} \int_0^{2\eta\sqrt{\nu t}} S\left(t - \frac{y^2}{4\nu\eta^2}\right) dy d\eta = -\frac{2}{\mu} \sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} \int_0^1 S\left((1 - z^2)t\right) dz. \end{aligned} \tag{23}$$

Пусть заданное касательное напряжение растет, например, степенным образом: $S(t) = at^\alpha$, $\alpha \geq 0$, $a = \text{const}$. Тогда скорость (23) границы полуплоскости Ω следующая:

$$v(0, t) = -\frac{2a}{\mu} C_\alpha t^\alpha \sqrt{\frac{\nu t}{\pi}}, \quad C_\alpha = \int_0^1 (1 - z^2)^\alpha dz.$$

Она растет со временем также по степенному закону, но пропорционально $t^{\alpha+1/2}$.

Вычисляя, как и в (16), расход $Q(t)$ через луч $x > 0$, найдем

$$Q(t) = -\frac{1}{\rho} \int_0^t S(\tau) d\tau. \tag{24}$$

Так, для рассмотренного выше степенного закона $S(t)$ расход (24) пропорционален $t^{\alpha+1}$.

Основываясь на выражении (21) для касательного напряжения $\sigma(x, t)$, запишем неявное уравнение границы $x^*(t)$ неподвижной жесткой зоны Ω_r в случае, когда у среды появляется положительный предел текучести при сдвиге τ_s :

$$\int_{x^*(t)/(2\sqrt{\nu t})}^\infty e^{-\eta^2} S\left(t - \frac{x^{*2}(t)}{4\nu\eta^2}\right) d\eta = \frac{\sqrt{\pi}\tau_s}{2}. \tag{25}$$

В некоторых частных случаях задания $S(t)$ (например, если $S(t)$ — многочлен, монотонно возрастающий при $t > 0$) левая часть тождества по t (25) допускает аналитические упрощения. Покажем это на примере линейного $S(t) = a_1 t$ и квадратичного $S(t) = a_2 t^2$ законов.

Для линейного закона, проводя в (25) интегрирование по частям, приходим к зависимости $t(\xi^*)$:

$$t = \frac{\sqrt{\pi}\tau_s}{2a_1} \left[(1 + 2\xi^{*2}) \int_{\xi^*}^\infty e^{-\eta^2} d\eta - \xi^* e^{-\xi^{*2}} \right]^{-1}, \tag{26}$$

где $\xi^*(t)$, в отличие от автомодельного случая, не постоянная величина, а функция времени. Зависимость (26) можно обратить (рис. 5, кривая 1) и, домножив ее на $2\sqrt{\nu t}$, найти искомую движущуюся границу $x^*(t)$. Деформирование происходит начиная с момента $t_0 = \tau_s/a_1$, когда касательное напряжение на границе $x = 0$ достигает предела текучести при сдвиге.

Пользуясь разложением при $\xi^* \rightarrow \infty$ [6, с. 298]

$$\int_{\xi^*}^\infty e^{-\eta^2} d\eta = \frac{e^{-\xi^{*2}}}{2\xi^*} \left(1 - \frac{1}{2\xi^{*2}} + \frac{3}{4\xi^{*4}} - \frac{15}{8\xi^{*6}} + \frac{105}{16\xi^{*8}} - O\left(\frac{1}{\xi^{*10}}\right) \right), \tag{27}$$

можно установить характер стремления к бесконечности функции t/t_0 в (26) при $\xi^* \rightarrow \infty$:

$$\frac{t}{t_0} = \sqrt{\pi} \xi^{*3} e^{\xi^{*2}} \left(1 - O\left(\frac{1}{\xi^{*2}}\right) \right). \tag{28}$$

Из (28) следует, что кривая 1 на рис. 5 на бесконечности растет чрезвычайно медленно (например, медленнее $\sqrt{\ln(t/t_0)}$), так что размерная функция $x^*(t)$, описывающая границу неподвижной жесткой зоны, растет чуть быстрее $\sqrt{2\nu t}$, $t \rightarrow \infty$.

Для квадратичного закона $S(t) = a_2 t^2$ интегрирование по частям в (25) приводит к следующей зависимости $t(\xi^*)$:

$$t^2 = \frac{\sqrt{\pi}\tau_s}{2a_2} \left[\left(1 + 4\xi^{*2} + \frac{4}{3}\xi^{*4} \right) \int_{\xi^*}^\infty e^{-\eta^2} d\eta - \frac{\xi^*}{3} (5 + 2\xi^{*2}) e^{-\xi^{*2}} \right]^{-1}. \tag{29}$$

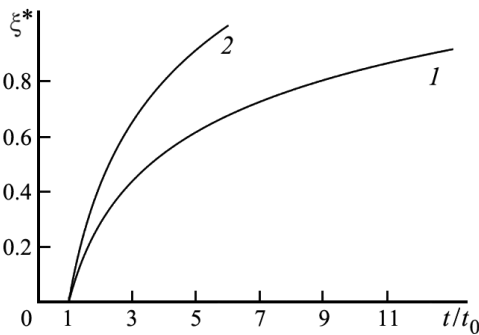


Рис. 5

Обратная к (29) функция $\xi^*(t)$ изображена на рис. 5 (кривая 2). Сдвиговое течение в полуплоскости начинается в момент времени $t_0 = \sqrt{\tau_s/a_2}$.

Опять же используя разложение (27) при $\xi^* \rightarrow \infty$, выведем асимптотику стремления к бесконечности функции t/t_0 в (29):

$$\left(\frac{t}{t_0}\right)^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi^{*5} e^{\xi^{*2}} \left(1 - O\left(\frac{1}{\xi^{*2}}\right)\right),$$

откуда следует, что кривая 2 на рис. 5 растет быстрее кривой 1, но медленнее, например, чем $\sqrt{2 \ln(t/t_0)}$.

Таким образом, задание при $x = 0$ растущего со временем касательного напряжения по линейному и даже квадратичному законам не приводит к значительному продвижению зоны течения в глубь полуплоскости по сравнению с его заданием в виде ступеньки Хевисайда.

Работа выполнена при поддержке РФФ, грант № 22–21–00077.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х.* Нестационарные движения вязкопластичных сред. М.: Изд-во МГУ, 1977.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004.
3. *Мейрманов А.М.* Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986.
4. *Georgievskii D.V.* Finite perturbations by yield stress of the constitutive relations of nonlinear viscous media // Russ. J. Math. Phys. 2022. **29**, N 4. 494–499.
5. *Георгиевский Д.В.* Влияние предела текучести на расход в одномерных сдвиговых течениях нелинейно-вязких сред // Прикл. механ. и техн. физ. 2023. **64**, № 2. 201–207.
6. *Abramowitz M., Stegun I.A.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. National Bureau of Standards. Applied Mathematics. Ser. 55. Tenth Printing. N.Y., 1972.

Поступила в редакцию
03.02.2023