# Механика

УДК 539.3

## ТОЧКА РАВНОВЕСИЯ И ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ ТИКСОТРОПНЫХ СРЕД, УЧИТЫВАЮЩЕЙ ЭВОЛЮЦИЮ СТРУКТУРЫ

**А. В. Хохлов**[1]

Продолжено системное аналитическое исследование математических свойств предложенной ранее автором нелинейной модели сдвигового течения тиксотропных вязкоупругопластических сред, учитывающей взаимовлияние процессов деформирования и эволюции структуры. При произвольных шести материальных параметрах и (возрастающей) материальной функции, управляющих моделью, аналитически изучен фазовый портрет нелинейной системы двух дифференциальных уравнений для безразмерных напряжения и степени сшитости, к которой сведена модель, в окрестности единственного положения равновесия системы. Доказано, что положение равновесия всегда устойчиво и возможны только три случая: положение равновесия — устойчивый узел, или вырожденный узел, или устойчивый фокус. Найдены критерии реализации каждого из случаев в виде явных ограничений на скорость сдвига, материальную функцию и материальные параметры модели.

*Ключевые слова:* тиксотропия, вязкоупругость, структурно-реологическая модель, полимерные системы, положение равновесия, фазовый портрет, устойчивый фокус, кривая течения, аномалия вязкости.

We continue the systematic analytical study of a nonlinear Maxwell-type constitutive equation for shear flow of thixotropic viscoelastic media accounting for interaction of deformation process and structure evolution, namely, the influence of the kinetics formation and breakage of chain cross-links, agglomerations of molecules and crystallites on viscosity and shear modulus and deformation influence on the kinetics. We formulated it in the previous article and reduced it to the set of two nonlinear autonomous differential equations for two unknown functions (namely, the stress and relative cross-links density). We examine the phase portrait of the system for arbitrary (increasing) material function and six (positive) material parameters governing the model and prove that the (unique) equilibrium point is stable and the only three cases are realized: the equilibrium point is a stable node or a degenerated stable node or a stable spiral point. We found criteria for every case in the form of explicit restrictions on the material function and parameters and shear rate.

*Key words:* thixotropy, viscoelasticity, rheological model, polymeric systems, equilibrium point, phase portrait, stable spiral point, flow curve, viscosity anomaly.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-5

**1. Введение.** Настоящая работа — прямое продолжение статьи [1], посвященной формулировке нелинейной модели изотермического сдвигового течения тиксотропных вязкоупругопластических сред с учетом взаимного влияния процессов деформирования и эволюции структуры (кинетики образования и разрушения межмолекулярных связей и ассоциатов макромолекул), ее сведению к системе двух нелинейных автономных дифференциальных уравнений и исследованию характера зависимости положения равновесия этой системы от скорости сдвига, всех (шести) материальных параметров (МП) и произвольной (неубывающей кусочно-гладкой) материальной функции (МФ). В [1] установлено, что все зависимости от МП монотонны, выведены уравнения кривой течения и кривой вязкости, доказано, что модель порождает возрастающую зависимость равновесного напряжения от скорости сдвига и убывающую кривую кажущейся вязкости, отражающие типичные свойства экспериментальных кривых течения псевопластических сред, но не может описать сверханомалию вязкости (наличие участка убывания у кривой течения). Основные задачи данной статьи: продолжение системного аналитического исследования общих математических свойств предложенной в [1]

[1] *Хохлов Андрей Владимирович* — канд. техн. наук, вед. науч. сотр. НИИ механики МГУ; вед. науч. сотр. СВФУ имени М. К. Аммосова; e-mail: andrey-khokhlov@ya.ru.

*Khokhlov Andrew Vladimirovich* — Candidate of Technical Sciences, Leading Scientific Researcher, Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics; Leading Scientific Researcher, North-Eastern Federal University.

модели при произвольных материальных параметрах и материальной функции; изучение фазового портрета нелинейной системы двух дифференциальных уравнений для безразмерных напряжения и степени сшитости $s(t)$ и $w(t)$, к которой сводится эта модель [1], в окрестности единственного положения равновесия; вывод критерия существования устойчивого фокуса, т.е. существования режимов деформирования с (затухающими) колебаниями напряжения и степени сшитости при выходе на стационарные значения при $t \to \infty$.

Построение определяющих соотношений (ОС) течения неньютоновских вязких жидкостей и вязкоупругопластических сред (например, суспензий, гелей, полимеров в вязкотекучем состоянии, расплавов и растворов, паст и т.п.) и адекватное описание нелинейных реологических эффектов важны для понимания закономерностей и моделирования огромного количества природных и технологических процессов [2–35]: движение магмы, поведение грунтов, сход селей и лавин, разработка модификаций битумов и асфальтобетонов, укладка дорожных покрытий, переработка полимеров и других материалов (экструзия волокон, прессование, сверхпластическая штамповка и т.п.), нефтедобыча (в частности, методом гидроразрыва пласта) и перекачка нефти, медицинская микрофлюидика, производство лаков, красок, масел, пищевых продуктов и т.п. Обоснование актуальности темы и литературный обзор приведены во введении статьи [1], поэтому отметим лишь, что только немногие из сотни известных ОС жидких сред учитывают не только их вязкость и пластичность, но и вязкоупругость (столь характерную, например, для расплавов и концентрированных растворов полимеров, для жидкостей-пропантоносителей и т.п.) и так или иначе эволюцию структуры; последняя в большинстве случаев описывается всего одним структурным параметром [4, 7–12, 16–21, 28–33]. Приложению сформулированного ОС к описанию конкретных экспериментальных данных и решению краевых задач практически никогда не предшествует системное аналитическое изучение математических следствий из ОС для произвольных МП и МФ, управляющих им, а также анализ, позволяющий описать круг реологических эффектов, которые ОС может или не может описывать, найти область и индикаторы применимости ОС, которые удобно проверять по данным испытаний (как это сделано в серии статей автора, посвященных качественному анализу ряда линейных и нелинейных ОС вязкоупругопластичности [36–44]). Несмотря на очевидное значение этого вопроса для химии и технологии полимеров, он изучен недостаточно. Учитывается в лучшем случае влияние изменения структуры на характер течения, но не влияние деформирования на кинетику изменения структуры. Представляется принципиально важным адекватно моделировать эволюцию структуры и влияние текущего напряжения на скорость разрушения структуры, конкуренцию и взаимосвязанность процессов, чтобы развивать методику обработки данных реометрических испытаний сложных жидкостей (текучих систем) и теорию процессов переработки материалов с учетом влияния всех важных факторов и выбрать важнейшие из них в разных режимах деформирования.

**2. Нелинейная модель сдвигового течения тиксотропных вязкоупругих сред, учитывающая взаимное влияние эволюции структуры и процесса деформирования.** Примем для описания сдвигового деформирования полимеров в вязкотекучем состоянии и в виде расплавов и концентрированных растворов и гелей при постоянной температуре модель Максвелла

$$\dot{\gamma} = \dot{\tau}/G + \tau/\eta, \tag{1}$$

в которой $\tau$ — касательное напряжение, $\dot{\gamma}$ — скорость сдвига, а материальные параметры зависят от изменения структуры полимера под влиянием деформирования: будем считать, что модуль сдвига $G$ и динамическая вязкость $\eta$ зависят от одного безразмерного структурного параметра $w(t)$. Скорость (простого) сдвига $\dot{\gamma} = \nu$ (в настоящей работе) будем считать постоянной (заданным кинематическим параметром), а в качестве $w(t)$ примем степень сшитости полимера $w$, т.е. отношение концентрации надмолекулярных или межмолекулярных связей (зацеплений, водородных связей, химических сшивок и т.п.) в текущий момент времени к некоторому максимально возможному значению концентрации связей для данной температуры: $G = G(w)$, $\eta = \eta(w)$, $w(t) \in [0, 1]$, $w(0) = w_0$, $w_0 \in [0, 1)$. Текущую структуру полимера будем описывать только одним параметром $w(t)$, не различая механизмы влияния разных элементов (над)молекулярной структуры на вязкость; пока будет важно лишь то, что материал имеет структуру, которая разрушается под действием сдвиговых напряжений и может восстанавливаться. В дальнейшем модель будет обобщена введением второго структурного параметра, учитывающего механизм ориентирования и распрямления макромолекул (гибкоцепных) полимеров при одноосном деформировании.

Конечно, модуль сдвига $G$ и динамическая вязкость $\eta$ зависят не только от $w$ (и других структурных параметров), но и от температуры, давления и скорости сдвига $\nu$ (градиента скорости или напряжения $\tau$), но в настоящей работе температуру, давление и скорость сдвига мы считаем постоянными (рассматриваем изотермический процесс и сдвиговое течение с постоянной скоростью $\nu$). Величины $G = G(w)$ и $\eta = \eta(w)$ должны быть возрастающими функциями от степени сшитости, поэтому примем, что

$$\eta(w) = \eta_0 e^{\alpha w}, \quad G(w) = G_0 e^{\beta w}, \quad \eta_0, G_0 > 0, \quad 0 \leqslant \beta < \alpha \tag{2}$$

(следуя традициям кинетики, выберем эти функции экспоненциальными, а в последующих работах рассмотрим и степенные функции с вещественными показателями). Вязкость обычно сильнее зависит от степени сшитости (и от температуры), чем модуль сдвига, поэтому предполагаем, что $\beta < \alpha$ (и можно положить $\beta = 0$, пренебрегая зависимостью модуля сдвига от $w$). Время релаксации $T = \eta/G$ модели Максвелла (1) выражается формулой $T(w) = T_0 e^{(\alpha-\beta)w}$, $T_0 = \eta_0/G_0$, и увеличивается с ростом $w$. МП $G_0$ и $\eta_0$ в (2) характеризуют модуль сдвига и динамическую вязкость в начальный момент (при $t = 0$), когда $w(0) = w_0$ (относительную концентрацию сшивок в начальный момент времени $w_0 \in [0, 1)$ можно рассматривать как дополнительный параметр модели).

В уравнение (1) входят две неизвестные функции времени $\tau(t)$ и $w(t)$, и следует добавить некоторое кинетическое уравнение, описывающее эволюцию степени сшитости полимера во времени и учитывающее влияние на нее напряжения (процесса деформирования). Изменение числа сшивок в процессе деформирования происходит в результате наложения двух конкурирующих процессов — разрушения имеющихся сшивок и образования новых. При увеличении напряжения разрушение (т.е. убывание $w(t)$) ускоряется (соответственно вязкость падает), а скорость образования новых сшивок можем считать постоянной (при фиксированной температуре) и пропорциональной плотности вакансий $(1 - w)$. Поэтому кинетическое уравнение для степени сшитости можно принять в виде

$$\dot{w} = k_1(1 - w) - k_2 g(s) w, \tag{3}$$

где $k_1$, $k_2 > 0$ — МП (вообще говоря, зависящие от температуры), задающие скорости образования и разрушения сшивок (их размерность $\text{с}^{-1}$); $g(s)$, $s \geqslant 0$, — неотрицательная возрастающая (нестрого) функция (с начальным значением $g(0) = 1$), задающая зависимость скорости разрушения сшивок от безразмерного напряжения $s = \tau/\tau_c$ ($\tau_c$ — некоторое характерное касательное напряжение: пороговое, предельное или просто $\tau_c = G_0$). Например, можно взять МФ $g(s) = e^{\kappa s}$, $\kappa > 0$.

Модель (1)–(3) учитывает кинетику взаимосвязанного протекания двух сопряженных процессов — сдвигового течения и структурных изменений в материале. Вязкость и модуль упругости в уравнении (1) зависят от структурного параметра (характеристики второго процесса), а скорости разрушения и восстановления структуры в уравнении (2) — от напряжения (характеристики первого процесса). Построенная модель управляется одной МФ $g(s)$ и шестью МП: $k_1, k_2, \eta_0, G_0, \alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$.

В дополнение к безразмерному напряжению $s = \tau/\tau_c$ введем безразмерное время $\bar{t} = t/T_0$, где $T_0 = \eta_0 G_0^{-1}$ — минимальное время релаксации модели Максвелла (при $w = 0$), и заменим аргумент в искомых функциях $s(t)$ и $w(t)$ системы (1), (3) по формулам $Y(\bar{t}) = y(\bar{t}T_0)$ и $Y'(\bar{t}) = T_0 \dot{y}(\bar{t}T_0)$. Тогда, упростив обозначения (заменив $\bar{t}$ на $t$, штрих на точку в обозначении дифференцирования, прописные буквы $S, W$ в обозначении функций от $\bar{t}$ на строчные), получим уравнения модели (1)–(3) в безразмерном виде (при $\dot{\gamma} = \nu$):

$$\dot{s} = a e^{\beta w} - s e^{(\beta-\alpha)w}, \tag{4}$$

$$\dot{w} = c[1 - w(1 + b g(s))]. \tag{5}$$

Это автономная система двух нелинейных дифференциальных уравнений для $s(t)$ и $w(t)$; $t$ — безразмерное время; $a = \nu\eta_0/\tau_c = \nu T_0 G_0/\tau_c$ — безразмерный параметр, зависящий от заданной скорости сдвига $\nu$ и начальной вязкости (или времени релаксации); $b = k_2/k_1$ и $c = k_1 T_0$ — безразмерные МП, характеризующие борьбу процессов образования и разрушения сшивок и соотношение их скоростей с минимальным временем релаксации модели (1) (с начальными вязкостью и модулем сдвига материала). Система (4), (5) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решений задачи Коши, если МФ $g(s)$ непрерывно дифференцируема при $s > 0$.

**3. Единственность положения равновесия автономной системы (4), (5) и анализ его зависимостей от материальных параметров и скорости сдвига.** Положения равновесия системы (4), (5) — решения системы уравнений

$$s = a e^{\alpha w}, \quad w = (1 + b g(s))^{-1} \tag{6}$$

(от параметров $G_0$, $\beta$ в (2) и $c$ в (5) положения равновесия не зависят) [1]. Так как из первого уравнения $w = \alpha^{-1}\ \ln\ s/a$ — возрастающая функция $s$ при $s > 0$, а второе уравнение в (6) задает убывающую функцию $w(s)$ (для любой возрастающей МФ $g(s)$), то система (6) имеет не более одного решения. Решение ровно одно (существует), поскольку область значений непрерывной функции $\alpha^{-1}\ln s/a$, $s \geqslant a$, совпадает с полуосью $[0; +\infty)$. Обозначим точку равновесия (равновесные напряжение и степень сшитости) через $(s_*, w_*)$, $s_* = s_*(a, b, \alpha)$, $w_* = w_*(a, b, \alpha)$. Из (6) следуют уравнения для определения $s_*$ и $w_*$:

$$\ln s_*/a = \alpha(1 + bg(s_*))^{-1}, \tag{7}$$

$$w_* = (1 + bg(s_*))^{-1}. \tag{8}$$

Очевидно, при любых МП и МФ $s_* > a > 0$, $w_* \in (0; 1)$. В работе [1] доказаны следующие утверждения о зависимости положения равновесия $(s_*, w_*)$ от материальных параметров.

**Теорема 1.** *Пусть* $a, b, \alpha, c, \eta_0, G_0 > 0, \beta \geqslant 0$ *и МФ* $g(s)$ *кусочно-дифференцируема и непрерывна при* $s \geqslant 0$, *не убывает и* $g(0) = 1$. *Тогда система двух нелинейных дифференциальных уравнений* (4), (5) *имеет единственное положение равновесия* $(s_*, w_*)$ *в области* $w \in (0; 1)$, $s > 0$, *оно является решением системы уравнений* (7), (8), *зависит лишь от трех параметров* $\alpha$, $a = \nu\eta_0/\tau_c = \nu T_0 G_0/\tau_c$ *и* $b = k_2/k_1$ *(и не зависит от параметров* $G_0, \beta$ *и* $c$*), а функции* $s_*(a, b, \alpha)$ *и* $w_*(a, b, \alpha)$, $a, b, \alpha > 0$, *обладают следующими свойствами:*

1) $s_* > a > 0$, *пределы при* $a \to +0$ *и* $a \to \infty$ *(т.е. при* $\nu \to +0$ *и* $\nu \to \infty$*) равны*
$s_*(0+) = 0, \quad w_*(0+) = (1 + b)^{-1}, \quad s_*(+\infty) = +\infty, \quad w_*(+\infty) = 0,$ *если* $g(+\infty) = +\infty$;

2) *функции* $s_*(a, b, \alpha)$ *и* $w_*(a, b, \alpha)$ *строго монотонны по каждому из трех аргументов в области* $a, b, \alpha > 0$;

3) $s_*$ *и* $w_*$ *убывают по параметру* $b$, *производная* $s_{*_b} = -\alpha s_* g(s_*) w_*^2 [1 + \alpha b w_*^2 s_* g'(s_*)]^{-1}$;

4) *функция* $s_*(a, b, \alpha)$ *возрастает по* $\alpha$ *на интервале* $\alpha > 0$, *а* $w_*(a, b, \alpha)$ *убывает по* $\alpha$;

$$s_{*_\alpha}/s_* = w_*[1 + \alpha b w_*^2 s_* g'(s_*)]^{-1}, \quad w_{*_\alpha} = -(1 + bg(s_*))^{-2} bg'(s_*) s_{*_\alpha} = -bw_*^2 g'(s_*) y_\alpha, \tag{9}$$

$\operatorname{sgn} w_{*_\alpha} = -\operatorname{sgn} s_{*_\alpha}, \quad 0 < s_{*_\alpha}/s_* < w_* < 1;$

5) *равновесное напряжение* $s_*$ — *возрастающая функция параметра* $a$ *(и скорости сдвига* $\nu$, *и МП* $\eta_0$*) на интервале* $a > 0$, *равновесная степень сшитости* $w_*$ *убывает по* $a$ *и по* $\nu$, *и производные* $s_*$ *и* $w_*$ *по* $a$ *выражаются формулами*

$$s_{*_a} = s_* a^{-1}[1 + \alpha b s_*(1 + bg(s_*))^{-2} g'(s_*)]^{-1}, \quad w_{*_a} = -bw_*^2 g'(s_*) s_{*_a}. \tag{10}$$

Из (7) следует зависимость (установившейся) кажущейся вязкости $\mu = \tau_*/\nu = \eta_0 s_*/a$ от равновесного напряжения $s_* = \tau_*/\tau_c$ (а также от скорости сдвига $\nu$ или степени сшитости $w_*$), порождаемая построенной моделью (с любыми МП и любой МФ $g(s)$) при рассматриваемом режиме деформирования:

$$\mu = \eta_0 e^{\alpha/[1+bg(s_*)]}, \quad \text{или} \quad \mu = \eta(w_*) = \eta_0 e^{\alpha w_*} \tag{11}$$

(формулу (11) можно получить и подстановкой $w = w_*$ в (2)). При фиксированной скорости сдвига, когда меняются лишь параметры $b$ и $\alpha$, связь $\ln\mu$ и $\ln s_*$ линейна: $\ln\mu = \ln s_* - \ln a + \ln\eta_0$. Характер зависимости $\mu$ от параметра $a$ (от скорости сдвига $\nu$) полностью определяется зависимостью $w_*$ от $a$ (или $s_*$ от $a$), т.е. формулой (10). В силу связи $\ln\mu = \ln s_* - \ln a + \ln\eta_0$ производные $\ln\mu$ и $\ln s_*$ по любому из параметров $b$ и $\alpha$ совпадают: $\mu'/\mu = s_*'/s$. Поэтому совпадают знаки производных и интервалы монотонности величин $\mu$ и $s_*$ по $b$ или по $\alpha$.

**Теорема 2.** *В предположениях теоремы* 1 *равновесная кажущаяся вязкость* $\mu = \tau_*/\nu = \eta_0 s_*/a$ *выражается по формулам* (11) *и обладает следующими свойствами:*

1) *при любых МП и МФ кажущаяся вязкость* $\mu(a, b, \alpha)$ *монотонно убывает по параметру* $b$, $\mu_b/\mu = s_{*_b}/s_* = -\alpha g(s_*) w_*^2 [1 + \alpha b w_*^2 s_* g'(s_*)]^{-1}$;

2) $\mu$ *возрастает по* $\alpha$, $\mu_\alpha/\mu = s_{*_\alpha}/s$, *т.е. производная* $\mu_\alpha/\mu$ *вычисляется по формуле* (9), *и справедливы оценки* $0 < \mu_\alpha/\mu < w_* < 1$, $0 < \mu_\alpha < w_*\mu = w_*\eta_0 e^{\alpha w_*} < w_*\eta_0 e^\alpha$;

3) $\mu$ *убывает по* $a$ *(и по* $\eta_0$, *и с ростом скорости сдвига* $\nu$*), ее производная по* $a$ *выражается формулами* $\mu'/\mu = \alpha w_*' = -\alpha b w_*^2 g'(s_*) s_*'$, $\mu' = \eta_0 \alpha e^{\alpha w_*} w_*'$;

4) *пределы равновесных кажущейся вязкости* (11), *производных напряжения и степени сшитости при* $a \to +0$ *и* $a \to \infty$ *(т.е. при* $\nu \to +0$ *и* $\nu \to \infty$*) и начальный угол наклона* $s_*'(0+)$

*реологической кривой $s_*(a)$ выражаются формулами*

$$\begin{gathered}\mu_0 = \eta_0 Q, \quad \mu_\infty = \eta_0 > 0, \quad \mu_0/\mu_\infty = Q;\\ s'_*(0+) = Q, \quad w'_*(0+) = -Qb(1+b)^{-2}g'(0), \quad \mu'(0+)/w'_*(0+) = \alpha\eta_0 Q,\end{gathered} \tag{12}$$

*где $Q = e^{\alpha/[1+bg(0)]} = e^{\alpha/(1+b)} \in (1, e^\alpha)$ (при условии $g(+\infty) = +\infty$ для пределов при $a \to \infty$);*

5) *если $g'(0) = 0$ , то $w'_*(0+) = 0$ и $\mu'(0+) = 0$ при любых МП.*

Все утверждения теоремы 2 доказаны в [1]. Таким образом, модель описывает возрастание реологической кривой $s_*(a)$, убывание кривой вязкости $\mu(\nu)$ и существование конечных пределов вязкости при $\nu \to +0$ и $\nu \to \infty$, т.е. важнейшие качественные свойства типичных кривых вязкости, наблюдаемых для разных псевдопластических жидкостей [2–25]. Очевидно, из (12) при любых положительных значениях МП и любой МФ следует, что $0 < \mu_\infty < \mu_0$ и $\mu_\infty > e^{-\alpha}\mu_0$, отношение $\mu_0/\mu_\infty$ совпадает с начальным углом наклона $s'_*(0+)$ реологической кривой $s_*(a)$, зависит лишь от параметров $\alpha, b$ (и не зависит от МФ $g(s)$, от $\eta_0$ и других МП модели (1)–(3)). Таким образом, модель описывает общее свойство $\mu_\infty < \mu_0$ типичных кривых вязкости, наблюдаемых для разных псевдопластических жидкостей (часть эффекта тиксотропии).

Теоретическое равенство $\mu_0/\mu_\infty = s'_*(0+)$ не зависит от измеряемых величин, и проверка его выполнения по данным испытаний может служить удобным индикатором применимости модели (1)–(3) к конкретному полимеру (твердообразному материалу, раствору, расплаву, суспензии и т.п.). Равенства (12) удобны и для идентификации параметров $\alpha, b, \eta_0$.

**4. Линеаризация системы (4), (5) с произвольной МФ $g(s)$ в окрестности точки равновесия и ее фазовый портрет.** Линеаризация системы (4), (5) в окрестности точки равновесия (7), (8) дает линейную систему $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $x_1 = s - s_*$, $x_2 = w - w_*$, $\mathbf{A} = \mathbf{J}(s_*, w_*)$ — матрица Якоби отображения $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$, задающего поле скоростей системы (4), (5), в точке $(s_*, w_*)$ . Вычисление частных производных поля скоростей системы (4), (5) приводит к матрице $\mathbf{A}$ с элементами

$$\begin{gathered}a_{11} = -e^{(\beta-\alpha)w_*}, \quad a_{12} = a\beta e^{\beta w_*} - (\beta-\alpha)s_* e^{(\beta-\alpha)w_*},\\ a_{21} = -cbw_* g'(s_*), \quad a_{22} = -c/w_*,\end{gathered} \tag{13}$$

где $s_* = ae^{\alpha w_*}$, $w_* = (1 + bg(s_*))^{-1}$ согласно (6), и потому $a_{12} = e^{\beta w_*}[a\beta - (\beta-\alpha)s_* e^{-\alpha w_*}] = e^{\beta w_*}[a\beta - (\beta-\alpha)a] = a\alpha e^{\beta w_*}$.

Фазовый портрет системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ (и исходной системы), как известно, определяется собственными значениями и собственными векторами матрицы $\mathbf{A}$, поэтому найдем собственные значения и условия, при которых они являются комплексными или действительными, простыми или кратными, исследуем знаки их действительных частей.

Характеристическое уравнение для собственных значений имеет вид

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0, \tag{14}$$

где $I_1 = a_{11} + a_{22}$, $I_2 = \det\mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ — инварианты оператора $\mathbf{A}$. Вычислим их и дискриминант характеристического уравнения с помощью (13):

$$I_1 = -e^{(\beta-\alpha)w_*} - cw_*^{-1}, \quad I_2 = ce^{(\beta-\alpha)w_*}w_*^{-1} + abc\alpha w_* g'(s_*)e^{\beta w_*}, \tag{15}$$

$$D = [e^{(\beta-\alpha)w_*} + cw_*^{-1}]^2 - 4ce^{(\beta-\alpha)w_*}w_*^{-1} - 4abc\alpha w_* g'(s_*)e^{\beta w_*}, \quad \text{или}$$

$$D = I_1^2 - 4I_2 = [cw_*^{-1} - e^{(\beta-\alpha)w_*}]^2 - 4abc\alpha w_* g'(s_*)e^{\beta w_*}, \tag{16}$$

где $cb = k_2 T_0$. Вследствие условия $g'(s) \geqslant 0$ и положительности $s_*, w_*$ и всех материальных параметров всегда выполнены неравенства $I_1 < 0$, $I_2 > 0$ и $D < I_1^2$, а из (15), (16) и условий $w_* \in (0,1)$ и $\beta < \alpha$ получаем $e^{\beta-\alpha} < e^{(\beta-\alpha)w_*} < 1$ и более точные оценки:

$$\begin{gathered}-1 - cw_*^{-1} < I_1 < -cw_*^{-1} < -c, \quad I_1 < -e^{(\beta-\alpha)} - c;\\ I_2 \geqslant ce^{(\beta-\alpha)w_*}w_*^{-1} > ce^{(\beta-\alpha)w_*} > ce^{\beta-\alpha},\end{gathered} \tag{17}$$

$$[cw_*^{-1} - 1]^2 - 4abc\alpha e^{\beta w_*}w_* g'(s_*) < D < c^2 w_*^{-2} - 4abc\alpha w_* g'(s_*).$$

Поэтому все коэффициенты уравнения (14) положительны при всех значениях МП и любой МФ $g(s)$, следовательно, у него нет положительных действительных корней и положение равновесия не может быть седлом (уравнение (14) не может иметь вещественные корни разного знака). Корни характеристического уравнения (14) вычисляются по формуле

$$2\lambda = I_1 \pm \sqrt{D} = -e^{-(\alpha-\beta)w_*} - cw_*^{-1} \pm [(cw_*^{-1} - e^{-(\alpha-\beta)w_*})^2 - 4abc\alpha w_* g'(s_*)e^{\beta w_*}]^{1/2}. \quad (18)$$

Положение равновесия является невырожденным узлом, когда уравнение (14) имеет два разных вещественных корня, и критерий этого — неравенство $D > 0$, т.е.

$$[cw_*^{-1} - e^{(\alpha-\beta)w_*}]^2 > 4abc\alpha w_* g'(s_*)e^{\beta w_*}. \quad (19)$$

В этом случае общее решение линеаризованной системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ представляется в виде

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{a_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{a_2}, \quad (20)$$

где $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ — собственные векторы оператора $\mathbf{A}$, и фазовые траектории монотонно приближаются к положению равновесия (устойчивый узел при $\lambda_1, \lambda_2 < 0$) или удаляются от него (если $\lambda_1, \lambda_2 > 0$), а решения системы — монотонные функции времени или имеют одну точку экстремума. В нашем случае из (18) следует, что при $D > 0$ всегда оба корня отрицательны, ибо $I_1 < 0$ и $D < I_1^2$. Поэтому (19) — *критерий того, что положение равновесия системы* (4), (5) — *устойчивый узел.*

В случае одинаковых (вещественных) корней, т.е. в случае $D = 0$, или

$$[cw_*^{-1} - e^{-(\alpha-\beta)w_*}]^2 = 4abc\alpha w_* g'(s_*)e^{\beta w_*}, \quad (21)$$

получается устойчивый вырожденный узел и монотонность $s(t)$ и $w(t)$ может нарушаться (ясно, что условие в виде равенства (21) не является грубым и легко нарушается из-за малейшего возмущения параметров). В этом случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5I_1 = -0.5(e^{(\beta-\alpha)w_*} - cw_*^{-1})$, в силу (17) для собственного значения справедливы оценки

$$-cw_*^{-1} < -0.5 - 0.5cw_*^{-1} < \lambda < -0.5\max\{cw_*^{-1}; 1 + e^{\beta-\alpha}\}.$$

В случае $D = 0$ пространство собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ одномерно (т.е. он недиагонализируем), поскольку из $a_{12} = a\alpha e^{\beta w_*} \neq 0$ следует, что $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$; собственные векторы — решения уравнения $[cw_*^{-1} - e^{-(\alpha-\beta)w_*}]x_1 + 2a\alpha e^{\beta w_*}x_2 = 0$.

Наконец, в случае $D < 0$ уравнение (14) имеет комплексные сопряженные корни $\lambda = u \pm iv$ и положение равновесия является фокусом при $\mathrm{Re}\lambda \neq 0$ или центром при $\mathrm{Re}\lambda = 0$ (случай периодических решений у линеаризованной системы). Фокус неустойчив, если $\mathrm{Re}\lambda > 0$, а при $\mathrm{Re}\lambda < 0$ положение равновесия — устойчивый фокус. В нашем случае из (18) следует, что при $D < 0$ всегда $\mathrm{Re}\lambda < 0$, поскольку $2\lambda = I_1 \pm i\sqrt{|D|}$ и $\mathrm{Re}\lambda = 0.5I_1 < 0$. Таким образом, условие $D < 0$, т.е. *неравенство*

$$[cw_*^{-1} - e^{-(\alpha-\beta)w_*}]^2 < 4abc\alpha w_* g'(s_*)e^{\beta w_*}, \quad (22)$$

*где* $s_* = ae^{\alpha w_*}$, $w_* = (1 + bg(s_*))^{-1}$, $abc = k_2 T_0 \nu\eta_0/\tau_*$, *— это критерий наличия устойчивого фокуса у системы* (4), (5) *с произвольной МФ* $g(s)$. Существование устойчивого фокуса у системы (4), (5) означает немонотонность ее решений $s(t)$, $w(t)$ и *существование режима деформирования с (затухающими) колебаниями напряжения и степени сшитости при выходе на стационарные значения* $s_*$, $w_*$ *при* $t \to \infty$.

Отметим, что *положение равновесия* (7), (8) *не зависит от параметров* $G_0$, $\beta$ *в* (2) *и* $c$ *из* (5), *но тип точки равновесия* (*фазовый портрет системы* (4), (5)) *зависит от них*, поскольку $\beta$ и $c$ входят в критерии (19), (21), (22).

При $\alpha = 0$ (вырожденный случай, когда вязкость не зависит от $w_*$) $D = [cw_*^{-1} - e^{\beta w_*}]^2 = [cw_*^{-1} - 1]^2$, так как $\beta = 0$. Положение равновесия не может быть фокусом ($D \geqslant 0$), система (7), (8)для положения равновесия имеет решение $s_* = a$, $w_* = (1 + bg(a))^{-1}$, и потому $D = (c + bcg(a) - 1)^2$ и $D = 0$ тогда и только тогда, когда $bg(a) = (1-c)/c$. При этом система дифференциальных уравнений (4), (5) тоже легко решается: $\dot{s} = a - s$, $s = a(1 - e^{-t})$, $\dot{w} + c(1 + bg(a - ae^{-t}))w = c$ — линейное уравнение первого порядка.

Если $g(s) = \mathrm{const}$ (в модели нет МФ, учитывающей влияние напряжения на скорость разрыва связей), т.е. $g'(s) \equiv 0$, то выполнение критерия наличия фокуса (22) невозможно ($D \geqslant 0$) и для положения равновесия (7), (8) всегда справедливо условие (19) или (21). Если выполнено равенство (21) с $g'(s_*) = 0$, т.е. $e^{(\beta-\alpha)w_*} = cw_*^{-1}$, то $w_* = ce^{(\alpha-\beta)w_*} \geqslant c$ (поскольку $\beta \leqslant \alpha$). При $c \geqslant 1$

это противоречит исходному ограничению $w_* < 1$, следовательно, в случае $c \geqslant 1$ равенство (21) выполняться не может. Поэтому в случае $g(s) = \text{const}$ и $c \geqslant 1$ всегда справедливо неравенство (19), положение равновесия $s_* = ae^{\alpha/(1+b)}, w_* = (1+b)^{-1}$ — устойчивый узел, собственные значения вещественны и различны и согласно (18)

$$2\lambda = I_1 \pm \sqrt{D} = -e^{(\beta-\alpha)/(1+b)} - c(1+b) \pm |e^{(\beta-\alpha)/(1+b)} - c(1+b)|,$$

$$\lambda_1 = -c(1+b) < -c, \quad \lambda_2 = -e^{(\beta-\alpha)/(1+b)} > -1.$$

Общее решение линеаризованной системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ при этом имеет вид (20), а *существование режима деформирования с колебаниями напряжения и степени сшитости при выходе на стационарные значения невозможно.*

**5. Дальнейшие направления развития базовой модели и ее приложения.** Модель (1)–(3) (после аккуратной формулировки в трехмерном случае, дальнейшего исследования, детального сопоставления с данными экспериментов и необходимых модификаций и обобщения, в частности учета влияния тепловыделения и теплообмена [22, 28–30] и, возможно, введения нескольких структурных параметров и дополнительных уравнений с целью описания кинетики основных физико-химических процессов) будет применяться для моделирования поведения битумов и их модификаций минеральными и эластомерными наполнителями, расплавов термопластов (полиэтиленов, полиамидов, полифениленсульфида и др.), углеродно-кремниевых паст для печати и для решения краевых задач в технологиях переработки полимеров (в частности, твердофазной плунжерной экструзии, формования нитей методом экструзии расплава и вытяжки), задач ползучести с описанием накопления (и залечивания) поврежденности и кинетики химических превращений под влиянием агрессивной среды и задач моделирования сверхпластического деформирования металлов и сплавов с учетом эволюции нескольких параметров структуры (среднего размера, формы и ориентации зерен, плотности дисперсоидов, степени сегрегации на границах зерен легирующих элементов, облегчающих зернограничное скольжение, и т.п.) [34, 45–48].

Отметим, что модель (1)–(3) родственна физически нелинейному ОС типа Максвелла

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2}\varepsilon(t)\sigma(t)^{-1}[\sigma_{ij}(t) - \sigma_0(t)\delta_{ij}] + \frac{1}{3}\theta(t)\delta_{ij}, \quad \varepsilon(t) = \mathbf{M}\sigma, \quad \theta(t) = \mathbf{M}_0\sigma_0, \tag{23}$$

$$\mathbf{M}\sigma = E^{-1}F(\sigma(t)) + \eta^{-1}\int_0^t V(\sigma(\tau))\,d\tau, \quad \mathbf{M}_0\sigma_0 = E_0^{-1}F_0(\sigma(t)) + \eta_0^{-1}\int_0^t V_0(\sigma_0(\tau))\,d\tau$$

с четырьмя произвольными (возрастающими) МФ $F(x), V(x), F_0(x), V_0(x)$ и параметрами $E, \eta, E_0, \eta_0 > 0$. Это ОС исследовано в цикле статей [36–42] и др. Оно связывает истории изменения тензоров деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ и напряжений $\boldsymbol{\sigma}(t)$ в точке тела в предположении отсутствия взаимного влияния шаровых и девиаторных частей тензоров $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_0\mathbf{I}$ и $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0\mathbf{I}$ (независимости объемной деформации $\theta(t)$ от касательных напряжений и интенсивности напряжений $\sigma = (1.5s_{ij}s_{ij})^{0.5}$, а деформаций сдвига и интенсивности деформаций $\varepsilon = (e_{ij}e_{ij}/1.5)^{0.5}$ — от среднего напряжения $\sigma_0(t)$) и пренебрежения влиянием третьих инвариантов тензоров. Одномерный прототип ОС получается из классической модели Максвелла заменой линейных упругого и вязкого элементов на нелинейные, управляемые МФ $F(x)$ и $V(x)$ соответственно, т.е. опирается на разложение полной деформации в сумму упругой и вязкопластической компонент.

ОС (23) обобщает (включает) классические степенные модели вязкого течения и ползучести, реологические модели Гершеля–Балкли и Шведова–Бингама и частный случай модели Соколовского–Малверна (обзор и библиографию по этим темам см. в работах [35, 37, 38]). Нелинейные интегральные операторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}_0$ управляют процессами формоизменения и развития объемной деформации (не влияющими друг на друга). Модули упругости $E$, $E_0$ и коэффициенты вязкости $\eta$, $\eta_0$ выделены из МФ для удобства учета влияния температуры в форме $E = E(T), \eta = \eta(T), E_0 = E_0(T), \eta_0 = \eta_0(T)$ [35] и обезразмеривания времени с помощью параметра $\tau_r = \eta/E$. В столь общей форме ОС (23) еще не исследовалось до выхода статей [34–39]. В них доказано, что ОС (23) хорошо описывает более десятка базовых эффектов (см. список в [35, 37, 38]), типичных для вязкоупругопластических твердых тел (а не только для жидких вязкоупругих сред), в частности пригодно для описаний кривых нагружения и разгрузки, циклического нагружения, рэтчетинга, различных эффектов при ползучести и сверхпластическом деформировании. Обнаруженные в [36–42] свойства и возможности ОС (23) служат ориентирами для дальнейшего исследования свойств модели (1)–(3)

(в частности, семейств кривых деформирования, релаксации и ползучести, которые она порождает) и ее обобщений с целью расширения круга описываемых эффектов.

**6. Заключение**. В работе продолжено системное аналитическое исследование предложенной в [1] нелинейной структурно-реологической модели сдвигового течения тиксотропных вязкоупругопластических сред (1)–(3) (для описания сдвигового деформирования полимеров в вязкотекучем состоянии и в виде вязкоупругих расплавов и концентрированных растворов и эмульсий), учитывающей взаимовлияние процессов деформирования и эволюции структуры (кинетики образования и разрушения межмолекулярных связей и ассоциатов макромолекул). В качестве основы этой модели выбрано нелинейное ОС типа Максвелла (1), в котором вязкость и модуль сдвига зависят от изменения структуры полимера (характеризуемой параметром $w(t)$, имеющим смысл степени сшитости полимера) под влиянием деформирования, а скорость изменения параметра $w(t)$ связана с напряжением $\tau(t)$ специальной материальной функцией $g(s)$. Модель сведена к системе двух нелинейных автономных дифференциальных уравнений (4), (5) для безразмерных напряжения $s(t)$ и степени сшитости $w(t)$ и управляется шестью материальными параметрами и одной (возрастающей) материальной функцией. Доказана единственность положения равновесия $(s_*, w_*)$ этой системы, в общем виде исследованы (неявные) зависимости его координат (7), (8) от всех шести материальных параметров и от скорости сдвига при произвольной (неубывающей кусочно-гладкой) материальной функции $g(s)$ (теоремы 1 и 2), доказано, что все зависимости монотонны. Выведены уравнения кривой течения и кривой вязкости, установлено, что модель порождает возрастающую зависимость равновесного напряжения от скорости сдвига и убывающую кривую кажущейся вязкости (теорема 2), отражающие типичные свойства экспериментальных кривых течения псевдопластических сред, но она не может описать сверханомалию вязкости (наличие участка убывания у кривой течения).

Аналитически изучен фазовый портрет системы дифференциальных уравнений (4), (5) в окрестности единственного положения равновесия при произвольных шести материальных параметрах и (возрастающей) материальной функции $g(s)$, управляющих моделью. Анализ собственных значений матрицы (13) линеаризованной в окрестности точки равновесия системы уравнений позволил доказать, что положение равновесия $(s_*, w_*)$ всегда устойчиво и возможны ровно три случая:

1) положение равновесия — узел;
2) положение равновесия — вырожденный узел;
3) положение равновесия — фокус.

Найдены критерии реализации каждого из случаев в виде неравенств (19), (21), (22) на скорость сдвига, материальные параметры и материальную функцию. Существование устойчивого фокуса у системы дифференциальных уравнений (4), (5) означает немонотонность ее решений $s(t), w(t)$ и существование режимов деформирования с (затухающими) колебаниями напряжения и степени сшитости при выходе на стационарные значения $s_*, w_*$ при $t \to \infty$.

Автор приносит благодарность проф. А.М. Столину, сформулировавшему прототип модели (1)–(3) с фиксированной (экспоненциальной) материальной функцией и четырьмя материальными параметрами, обобщение которого было исследовано в настоящей статье, за предложение выяснить, при каких условиях модель обладает осциллирующими решениями.

Исследование поддержано грантом Российского научного фонда № 22–13–20056.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stolin A.M., Khokhlov A.V.* Nonlinear model of shear flow of thixotropic viscoelastoplastic continua taking into account the evolution of the structure and its analysis // Moscow Univ. Mech. Bull. 2022. **77**, N 5. 127–135 (DOI: 10.3103/S0027133022050065).
2. *Bingham E.C.* Fluidity and Plasticity. N.Y., 1922.
3. *Reiner M.* Rheology // Encyclopedia of Physics. Vol. 6. Berlin; Heidelberg: Springer, 1958. 434–550.
4. *Ребиндер П.А.* Поверхностные явления в дисперсных системах. Коллоидная химия. Избранные труды. М.: Наука, 1978.
5. *Coleman B.D., Makrovitz A., Noll W.* Viscometric Flows of non-Newtonian Fluids. Theory and Experiment. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1966.
6. *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975.
7. *Виноградов Г.В., Малкин А.Я.* Реология полимеров. М.: Химия, 1977.
8. *Бибик Е.Е.* Реология дисперсных систем. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1981.
9. *Бартенев Г.М., Зеленев Ю.В.* Физика и механика полимеров. М.: Высшая школа, 1983.
10. *Larson R.G.* Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions. Boston: Butterworth, 1988.

11. *Урьев Н.Б.* Физико-химические основы технологии дисперсных систем и материалов. М., 1988.
12. *Leonov A.I., Prokunin A.N.* Non-linear Phenomena in Flows of Viscoelastic Polymer Fluids. London: Chapman and Hall, 1994.
13. *Macosko C.* Rheology: Principles, Measurements and Applications. N.Y.: VCH, 1994.
14. *Schramm G.* A Practical Approach to Rheology and Rheometry. Karlsruhe: Gebrueder Haake GmbH, 1994.
15. *Rohn C.L.* Analytical Polymer Rheology. Munich: Hanser Publishers, 1995.
16. *Larson R.G.* Structure and Rheology of Complex Fluids. N.Y.: Oxford Press, 1999.
17. *Gupta R.K.* Polymer and Composite Rheology. N.Y.: Marcel Dekker, 2000.
18. *Tanner R.I.* Engineering Rheology. Oxford: Oxford University Press, 2000.
19. *Malkin A.Y., Isayev A.I.* Rheology: Conceptions, Methods, Applications (2nd ed.). Toronto: ChemTec Publishing, 2012.
20. *Vlachopoulos J., Polychronopoulos N.* Basic Concepts in Polymer Melt Rheology and Their Importance in Processing // Applied Polymer Rheology: Polymeric Fluids with Industrial Applications. First ed. / Ed. by M. Kontopoulou. John Wiley and Sons, Inc. 2012 (DOI: 10.1002/9781118140611.ch1).
21. *Кирсанов Е.А., Матвеенко В.Н.* Неньютоновское поведение структурированных систем. М.: Техносфера, 2016.
22. *Столин А.М., Малкин А.Я., Мержанов А.Г.* Неизотермические процессы и методы исследования в химии и механике полимеров // Успехи химии. 1979. **48**, вып. 8. 1492–1517.
23. *Прокунин А.Н.* О нелинейных определяющих соотношениях максвелловского типа для описания движения полимерных жидкостей // Прикл. матем. и механ. 1984. **48**, № 6. 957–965.
24. *Leonov A.I.* Constitutive equations for viscoelastic liquids: Formulation, analysis and comparison with data // Rheology Series. 1999. **8**. 519–575.
25. *Stickel J.J., Powell R.L.* Fluid mechanics and rheology of dense suspensions // Ann. Rev. Fluid Mech. 2005. **37**. 129–149.
26. *Mueller S., Llewellin E.W., Mader H.M.* The rheology of suspensions of solid particles // Proc. Roy. Soc. A. 2010. **466**, N 2116. 1201–1228.
27. *Malkin A.Ya., Patlazhan S.A.* Wall slip for complex liquids — Phenomenon and its causes // Adv. Colloid and Interface Sci. 2018. **257**. 42–57.
28. *Столин А.М., Худяев С.И., Бучацкий Л.М.* К теории сверханомалии вязкости структурированных систем // Докл. АН СССР. 1978. **243**, № 26. 430–433.
29. *Столин А.М., Иржак В.И.* Структурно-неоднородные режимы течения в процессе формования полимерных волокон // Высокомолекул. соединения. Б. Кратк. сообщения. 1993. **35**, № 7. 902–904.
30. *Беляева Н.А., Столин А.М., Стельмах Л.С.* Режимы твердофазной экструзии вязкоупругих структурированных систем // Инж. физ. 2009. № 1. 10–16.
31. *Brady J.F., Morris J.F.* Microstructure of strongly sheared suspensions and its impact on rheology and diffusion // J. Fluid Mech. 1997. **348**. 103–139.
32. *Tucker C.L., Moldenaers P.* Microstructural evolution in polymer blends // Annu. Rev. Fluid Mech. 2002. **34**. 177–210.
33. *Малкин А.Я., Куличихин В.Г.* Структура и реологические свойства высококонцентрированных эмульсий. Современный взгляд // Успехи химии. 2015. **84**, № 8. 803–825.
34. *Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U.* Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
35. *Эглит М.Э., Якубенко А.Е., Зайко Ю.С.* Математическое моделирование склоновых потоков с учетом неньютоновских свойств движущейся среды // Тр. Матем. ин-та РАН. 2018. **300**. 229–239.
36. *Khokhlov A.V.* Properties of a nonlinear viscoelastoplastic model of Maxwell type with two material functions // Moscow Univ. Mech. Bull. 2016. **71**, N 6. 132–136 (DOI: 10.3103/S0027133016060029).
37. *Хохлов А.В.* Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: моделирование влияния температуры на кривые деформирования, релаксации и ползучести // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. **21**, № 1. 160–179 (DOI: 10.14498/vsgtu1524).
38. *Khokhlov A.V.* A nonlinear Maxwell-type model for rheonomic materials: stability under symmetric cyclic loadings // Moscow Univ. Mech. Bull. 2018. **73**, N 2. 39–42 (DOI: 10.3103/S0027133018020036).
39. *Хохлов А.В.* Индикаторы применимости и методики идентификации нелинейной модели типа Максвелла для реономных материалов по кривым ползучести при ступенчатых нагружениях // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2018. № 6. 92–112 (DOI: 10.18698/1812-3368-2018-6-92-112).
40. *Khokhlov A.V.* Applicability indicators and identification techniques for a nonlinear Maxwell-type elastoviscoplastic model using loading–unloading curves // Mech. Compos. Materials. 2019. **55**, N 2. 195–210 (DOI: 10.1007/s11029-019-09809-w).
41. *Khokhlov A.V.* Possibility to describe the alternating and non-monotonic time dependence of Poisson's ratio

during creep using a nonlinear Maxwell-type viscoelastoplasticity model // Russ. Metallurgy (Metally). 2019. N 10. 956–963 (DOI: 10.1134/S0036029519100136).

42. *Khokhlov A.V., Shaporev A.V., Stolyarov O.N.* Loading-unloading-recovery curves for polyester yarns and identification of the nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model // Mech. Compos. Materials. 2023. **59**, N 1. 129–146 (DOI: 10.1007/s11029-023-10086-x).
43. *Khokhlov A.V.* Two-sided estimates for the relaxation function of the linear theory of heredity via the relaxation curves during the ramp-deformation and the methodology of identification // Mech. Solids. 2018. **53**, N 3. 307–328 (DOI: 10.3103/S0025654418070105).
44. *Khokhlov A.V.* Properties of the set of strain diagrams produced by Rabotnov nonlinear equation for rheonomous materials // Mech. Solids. 2019. **54**, N 3. 384–399 (DOI: 10.3103/S002565441902002X).
45. *Zhilayev A.P., Pshenichnyuk A.I.* Superplasticity and grain boundaries in ultrafine-grained materials. Cambridge: Cambridge Int. Sci. Publ., 2010.
46. *Ovid'ko I.A., Valiev R.Z., Zhu Y.T.* Review on superior strength and enhanced ductility of metallic nanomaterials // Progress Materials Sci. 2018. **94**. 462–540.
47. *Mikhaylovskaya A.V., Kishchik A.A., Kotov A.D., et al.* Precipitation behavior and high strain rate superplasticity in a novel fine-grained aluminium based alloy // Mater. Sci. Eng. A. 2019. **760**. 37–46.
48. *Mochugovskiy A.G., Mosleh A.O., Kotov A.D., Khokhlov A.V., Kaplanskaya L.Y., Mikhaylovskaya A.V.* Microstructure evolution, constitutive modelling, and superplastic forming of experimental 6XXX-type alloys processed with different thermomechanical treatments // Materials. 2023. **16**, N 1. 445. 1–18 (DOI: 10.3390/ma16010445).

Поступила в редакцию
24.06.2022
После доработки
28.03.2023

---

УДК 539.376

# КВАЗИАВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

**В. А. Банько[1], Д. В. Георгиевский[2]**

Исследуются начально-краевые задачи о разгоне из состояния покоя двухконстантной вязкопластической среды (тело Бингама) в полуплоскости при задании на границе касательного напряжения как кусочно-непрерывной, монотонно неубывающей функции времени. В качестве дополнительного условия на неизвестной границе раздела между увеличивающейся со временем по толщине зоны течения и неподвижной полубесконечной жесткой зоны выбирается требование, чтобы решение задачи при стремлении к нулю предела текучести материала в каждой точке и в каждый момент времени стремилось к решению соответствующей задачи вязкого течения, известной как обобщенная задача о диффузии вихревого слоя. Находятся точные аналитические решения для профилей касательного напряжения и скорости при нестационарном одномерном течении. Выделяются случаи автомодельности и так называемой квазиавтомодельности. Особый интерес представляет характер стремления при $t \to \infty$ толщины слоя, в котором реализуется сдвиг, к бесконечности.

*Ключевые слова:* вязкопластическая среда, сдвиг, касательное напряжение, жесткая зона, диффузия вихревого слоя, полуплоскость, предел текучести, вязкость.

The initial-boundary value problems of acceleration from a state of rest of a two-constant viscoplastic medium (Bingham body) in a half-plane is investigated when the tangential stress

[1] *Банько Владислав Александрович* — асп. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mr.banko.vlad@mail.ru.
*Banko Vladislav Alexandrovich* — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Elasticity Theory.

[2] *Георгиевский Дмитрий Владимирович* — доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: georgiev@mech.math.msu.su.
*Georgievskii Dimitri Vladimirovich* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Head of the Chair of Elasticity Theory.