8. *Сергеев И.Н.* Исследование свойств перроновской и ляпуновской устойчивости по первому приближению // Дифференц. уравнения. 2020. **56**, № 1. 84–93.
9. *Сергеев И.Н.* Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. **55**, № 5. 636–646.
10. *Сергеев И.Н.* Зависимость и независимость свойств перроновской и ляпуновской устойчивости от фазовой области системы // Дифференц. уравнения. 2019. **55**, № 10. 1338–1346.
11. *Sergeev I.N.* First approximation study of Lyapunov, Perron and upper-limit stability or instability // Mem. Diff. Equat. and Math. Phys. 2022. **87**. 165–176.
12. *Миллионщиков В.М.* Системы с интегральной разделенностью всюду плотны в множестве всех линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. **5**, № 7. 1167–1170.

Поступила в редакцию
10.01.2023

УДК 517.518+517.982

ОРТОРЕКУРСИВНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПО МОДИФИКАЦИИ СИСТЕМЫ ФАБЕРА–ШАУДЕРА

П. С. Степанянц[1], А. К. Паунов[2]

Рассмотрены орторекурсивные разложения по модификации системы Фабера–Шаудера. Доказана равномерная сходимость разложения к разлагаемой непрерывной функции. Также доказана сходимость разложения к разлагаемой функции в пространствах L_p.

Ключевые слова: орторекурсивное разложение, сходимость, система Фабера–Шаудера, система сжатий и сдвигов.

We consider orthorecursive expansions with respect to modified Faber–Schauder System and demonstrate their uniform convergence to expanded functions in C-space and convergence in Lebesgue spaces.

Key words: orthorecursive expansion, convergence, Faber–Schauder System, system of translates and dilates.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-3

Орторекурсивные разложения являются обобщением ортогональных разложений, сохраняющим основные свойства ортогональных разложений. Орторекурсивные разложения были предложены Т. П. Лукашенко в работах [1, 2]. Приведем определение и основные свойства орторекурсивных разложений [2].

Пусть H — линейное пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — конечная или счетная система ненулевых элементов H.

Определение 1. *Орторекурсивное разложение* элемента $f \in H$ по последовательности элементов $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ осуществляется следующим образом. Положим $r_0 = f$. Если заданы остаток приближения $r_{k-1} \in H$, $k \in \mathbb{N}$, и элемент e_k, то положим $\hat{f}_k = (r_{k-1}, e_k)\|e_k\|^{-2}$, $r_k = r_{k-1} - \hat{f}_k e_k$.

Назовем $\hat{f}_k$ *орторекурсивным коэффициентом Фурье* элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Ряд $\sigma(f) = \sum\limits_k \hat{f}_k e_k$ назовем *орторекурсивным рядом Фурье* элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, а сумму $S_n(f) = \sum\limits_{k\leqslant n} \hat{f}_k e_k$ — *n-й частичной суммой орторекурсивного ряда Фурье.* Вместо термина "орторекурсивный ряд Фурье" будем иногда использовать термин "орторекурсивное разложение".

---

[1] *Степанянц Петр Суренович* — асп. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: petstep18@gmail.com.

Stepanyants Petr Surenovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis.

[0] *Паунов Александр Константинович* — канд. физ.-мат. наук, инженер-разработчик, WorldQuant, e-mail: paunov.msu@gmail.com.

Paunov Alexander Konstantinovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Quantitative Engineer, WorldQuant.

Утверждение. *Для орторекурсивного разложения справедливы аналог тождества Бесселя* $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2 + \|r_n(f)\|^2$ *и аналог неравенства Бесселя* $\|f\|^2 \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2$. *Равенство* $f = \sum_n \hat{f}_n e_n$ *в* H *имеет место тогда и только тогда, когда выполняется аналог равенства Парсеваля* $\|f\|^2 = \sum_n |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2$.

В случае, когда система $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является ортогональной системой, орторекурсивные коэффициенты Фурье $\hat{f}_k$ совпадают с обычными коэффициентами Фурье $(f, e_k)||e_k||^{-2}$ и орторекурсивный ряд Фурье совпадает с обычным рядом Фурье. Однако интересны разложения по неортогональным, в частности переполненным, системам. Разложения по таким системам абсолютно устойчивы к погрешностям в вычислении коэффициентов, а также абсолютно устойчивы к малым изменениям системы [3]. В приложениях активно используются системы сжатий и сдвигов. Далее будут более подробно описаны орторекурсивные разложения по данным системам.

Определение 2. Пусть функция ϕ определена на отрезке $[0; 1]$. Доопределим функцию ϕ на $\mathbb{R}$ нулем вне отрезка $[0; 1]$. Для всех $n \in \mathbb{Z}^+$ и $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$ определим $\phi_k^n = C_k^n \phi(2^n x - k + 1)$, где C_k^n — ненулевая константа. Систему $\{\phi_k^n\}_{n,k}$ будем называть *системой (двоичных) сжатий и сдвигов* функции ϕ.

В. И. Филиппов и П. Освальд [4] показали, что система сжатий и сдвигов функции с ненулевым средним $\phi \in L_p[0; 1]$ является системой представления в $L_p[0; 1]$, т.е. для любой функции $f \in L_p[0; 1]$ существуют коэффициенты $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, такие, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$ сходится к f в L_p.

А. Ю. Кудрявцев [5] и А. В. Политов [6] установили, что в случае $L_2[0; 1]$ при определенном условии на интегральный модуль непрерывности в $L_2[0; 1]$ функции ϕ коэффициенты разложения можно отыскать с помощью орторекурсивного разложения по системе сжатий и сдвигов функции ϕ.

Система Фабера–Шаудера является системой сжатий и сдвигов кусочно-линейной функции

$$e(x) = \begin{cases} 2x, \text{ если } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]; \\ 2 - 2x, \text{ если } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], \end{cases}$$

с добавлением двух функций — тождественной единицы и функции $y = x$ на отрезке $[0; 1]$.

Классическая система Фабера–Шаудера примечательна тем, что она является базисом в пространстве $C[0; 1]$ (см. [7, гл. 6, § 1]). Кроме того, она как система сжатий и сдвигов является системой разложения в $L_2[0; 1]$. Однако необходимо отметить, что коэффициенты разложения непрерывной функции по базису Фабера–Шаудера, вообще говоря, не равны орторекурсивным коэффициентам Фурье при орторекурсивном разложении этой функции по системе Фабера–Шаудера в $L_2[0; 1]$, поэтому в общем случае орторекурсивный ряд Фурье по системе Фабера–Шаудера для непрерывной функции не сходится равномерно к этой функции.

В настоящей работе рассматривается модификация системы Фабера–Шаудера, подобная модификации, предложенной Т. П. Лукашенко в [1]. Модифицированная система Фабера–Шаудера уже не будет системой сжатий и сдвигов в чистом виде, однако данная система является системой разложения в C и в L_p для $1 \leqslant p \leqslant \infty$, для которой коэффициенты могут быть получены с помощью орторекурсивного разложения.

Будем рассматривать модификацию системы Фабера–Шаудера на одномерном торе S^1 со стандартной топологией и борелевской σ-алгеброй с $\mu(S^1) = 1$. Для задания модификации системы Фабера–Шаудера S^1 будем рассматривать как отрезок $[0; 1]$, в котором отождествили точки 0 и 1, операции взяты по $\bmod 1$.

Определение 3. Пусть функция ϕ определена на отрезке $[0; 1]$. Доопределим функцию ϕ на $\mathbb{R}$ нулем вне отрезка $[0; 1]$. Для всех $n \in \mathbb{Z}^+$ и $k \in \{1, \ldots, 2^{n+1}\}$ определим $\phi_k^n = C_k^n \phi(2^n x - \frac{k}{2} + 1)$, где C_k^n — ненулевая константа. Систему $\{\phi_k^n\}_{n,k}$ будем называть *системой с половинными сдвигами* функции ϕ.

Данная система содержит подсистему сжатий и сдвигов, а также “половинные сдвиги”, так что носители функций с индексами $\binom{n}{k}$ и $\binom{n}{k+1}$ пересекаются по отрезку длины $\frac{1}{2^{n+1}}$. *Пачкой* назовем набор $\{\phi_k^n\}_k$ функций с носителями длиной $\frac{1}{2^n}$. Число n назовем *номером пачки.*

Определение 4. *Модифицированной системой Фабера–Шаудера* назовем систему $\{e_k^n\}_{n,k}$ с половинными сдвигами введенной выше функции $e(x)$. Константы C_k^n полагаются равными $\sqrt{3}\cdot 2^{\frac{n}{2}}$, так что $\|e_k^n\|_{L_2}=1$.

Перейдем непосредственно к формулировкам основных результатов.

Теорема 1. *Пусть f — непрерывная функция на S^1. Тогда ее орторекурсивный ряд Фурье по модифицированной системе Фабера–Шаудера сходится к f равномерно на S^1.*

Теорема 2. *Пусть f принадлежит лебегову пространству $L_1(S^1)$. Тогда ее орторекурсивный ряд Фурье по модифицированной системе Фабера–Шаудера сходится к f в L_1.*

Теорема 3. *Пусть $1<p\leqslant\infty$ и f принадлежит лебегову пространству $L_p(S^1)$. Тогда ее орторекурсивный ряд Фурье по модифицированной системе Фабера–Шаудера сходится к f в L_p.*

Таким образом, модификация системы Фабера–Шаудера является системой разложения в $C(S^1)$ и в $L_p(S^1)$. При этом коэффициенты разложения можно находить с помощью орторекурсивного разложения.

Для доказательства данных теорем потребуется ввести некоторые обозначения, а также доказать ряд лемм. Пусть $x_k^n=\frac{k-1}{2^{n+1}}$ — точка максимума функции $e_k^n(x)$. Для фиксированного n набор $\{x_k^n\}_{k=1}^{2^{n+1}}$ из 2^{n+1} точек будем называть *двоично-рациональными точками порядка n*. Обозначим отрезок-носитель $\left[\frac{k-2}{2^{n+1}};\frac{k}{2^{n+1}}\right]$ функции $e_k^n(x)$ через Δ_k^n.

Пусть D^n — пространство ломаных с вершинами в двоично-рациональных точках порядка n. Заметим, что для фиксированного n набор $\{e_k^n\}_{k=1}^{2^{n+1}}$ функций n-й пачки является базисом в пространстве D^n. Для функций из одной пачки $(e_k^n,e_j^n)=0$, если $j\notin\{k-1,k,k+1\}$, и $(e_k^n,e_{k+1}^n)=\frac{1}{4}$. Из данного факта вытекает следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть l является ломаной с вершинами в двоично-рациональных точках порядка n для некоторого n и проводится орторекурсивное разложение l по модифицированной системе Фабера–Шаудера. Тогда для всех натуральных $N>n$ при разложении l по N-й пачке C-норма остатка не увеличивается. При этом каждая пачка уменьшает C-норму остатка как минимум вдвое.*

Доказательство. Так как $l\in D^n$, остаток на j-м шаге по N-й пачке является ломаной с вершинами в двоично-рациональных точках порядка N, т.е. $r_j^N\in D^N$ и $r_j^N=\sum d_k e_k^N$. Для получения следующего остатка r_{j+1}^N коэффициент d_{j+1} заменяется на половину среднего от соседних, взятых с противоположным знаком. Значит, $\|r_{j+1}^N\|_C\leqslant\|r_j^N\|_C$. При этом после прохождения всей пачки каждый исходный коэффициент d_j заменился на число, по модулю не превосходящее половины нормы остатка r_0^N. Это означает, что $\|r_0^N\|_C\geqslant 2\|r_{2^{N+1}}^N\|_C$. Лемма доказана.

Частичная сумма на k-м шаге прохождения по n-й пачке является ломаной с вершинами в двоично-рациональных точках порядка n, т.е. $S_k^n(x)\in D^n$ и $S_k^n(x)=\sum\limits_{j=1}^{2^{n+1}}c_j\binom{n}{k}e_j^n(x)$, где $c_j\binom{n}{k}$ — некоторые коэффициенты. Таким образом, каждой частичной сумме S_k^n поставлен в соответствие набор $\{c_j\binom{n}{k}\}_{j=1}^{2^{n+1}}$ из 2^{n+1} чисел.

Индуктивно определим изменение набора коэффициентов $\{c_j\binom{n}{k}\}$ при орторекурсивном разложении f по модифицированной системе Фабера–Шаудера.

1. Положим $c_j\binom{0}{0}=0$, $j=1,2$.

2. Если определен набор $\{c_j\binom{n}{k}\}$ для $k\neq 2^{n+1}$, то положим $c_j\binom{n}{k+1}=c_j\binom{n}{k}$ при $j\neq k+1$ и $c_{k+1}\binom{n}{k+1}=(f,e_{k+1}^n)-\frac{1}{4}c_k\binom{n}{k}-\frac{1}{4}c_{k+2}\binom{n}{k}$.

3. Если определен набор $\{c_j\binom{n}{2^{n+1}}\}$, то положим для нечетных индексов $c_{2j-1}\binom{n+1}{0}=\frac{1}{\sqrt{2}}c_j\binom{n}{2^{n+1}}$ и для четных индексов $c_{2j}\binom{n+1}{0}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[c_j\binom{n}{2^{n+1}}+c_{j+1}\binom{n}{2^{n+1}}\right]$.

Данный процесс полностью определяет орторекурсивное разложение по модифицированной системе Фабера–Шаудера. Под п. 2 подразумевается шаг внутри одной пачки, а под п. 3 — переход от одной пачки к следующей.

Вынесем нормировочный множитель $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и получим, что коэффициент $c_j\binom{n}{k}$ представим в виде суммы $\sum\limits_{m=0}^{n}\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-m}}\cdot\sum\limits_{i=1}^{2^{m+1}}\lambda_{ij}^m(f,e_i^m)$, где $\lambda_{ij}^m=\lambda_{ij}^m\binom{n}{k}$ — некоторые числовые коэффициенты, зависящие от шага разложения с номером $\binom{n}{k}$. Иными словами, $c_j\binom{n}{k}$ является линейной комбинацией скалярных произведений (f,e_i^m).

При доказательстве теорем будут использованы оценки коэффициентов λ_{ij}^m. Выразим эти оценки в виде лемм. Лемма 2 потребуется для доказательства равномерной сходимости, лемма 3 — для доказательства сходимости в L_1, леммы 4, 5 — в L_p для остальных p.

Лемма 2. *При орторекурсивном разложении f по модифицированной системе Фабера–Шаудера для каждого коэффициента c_j сумма модулей числовых коэффициентов λ_{ij}^m, стоящих при скалярных произведениях f с функциями m-й пачки, убывает как $O\left(\frac{1}{2^n}\right)$, где n — номер пачки разложения. Иными словами, для всех $j = 1, 2, \ldots, 2^{n+1}$ выполнено $\sum\limits_{i=1}^{2^{m+1}} \left|\lambda_{ij}^m\right| < 2^{m-n+1}$.*

Доказательство. Непосредственной проверкой нетрудно установить, что при прохождении пачки с номером n для коэффициентов λ_{ij}^n, стоящих при скалярных произведениях f с функциями n-й пачки, выполнено $\sum\limits_{i=1}^{2^{n+1}} \left|\lambda_{ij}^n\right| < 2$. На k-м шаге по n-й пачке коэффициент λ_{ik}^m, где $m < n$, заменяется на $-\frac{1}{4}(\lambda_{i,k-1}^m + \lambda_{i,k+1}^m)$. Отсюда видно, что после прохождения всей пачки $\max\limits_{j=1,\ldots,2^{m+1}} \sum\limits_{i=1}^{2^{m+1}} \left|\lambda_{ij}^m\right|$ уменьшается как минимум вдвое. Переход от одной пачки к другой не изменяет оценку сумм $\sum\limits_{i=1}^{2^{m+1}} \left|\lambda_{ij}^m\right|$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Для непрерывной функции f рассмотрим частичную сумму $S_k^n(f;x) = \sum\limits_{j=1}^{2^{n+1}} c_j \binom{n}{k} e_k^n(x)$, где $c_j \binom{n}{k} = c_j = \sum\limits_{m=0}^{n} 2^{-\frac{1}{2}(n-m)} \cdot \sum\limits_{i=1}^{2^{m+1}} \lambda_{ij}^m \left(f, e_i^m\right)$.

По неравенству Гёльдера (см. [8, §22]) имеем $|(f, e_i^m)| \leqslant \|f\|_{L_\infty} \cdot \|e_i^m\|_{L_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2^{-\frac{m}{2}} \|f\|_C$. По лемме 2 оценим коэффициент c_j:

$$|c_j| < \sum_{m=0}^{n} 2^{-\frac{1}{2}(n-m)} \cdot \sum_{i=1}^{2^{m+1}} \left|\lambda_{ij}^m\right| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2^{-\frac{m}{2}} \|f\|_C < \sqrt{3} \cdot 2^{-\frac{3}{2}n+1} \cdot \|f\|_C \sum_{m=0}^{n} 2^m < 2^{-\frac{n}{2}+2} \cdot \sqrt{3} \cdot \|f\|_C.$$

Значит, для произвольной функции $f \in C(S^1)$ выполнено

$$\|S_k^n(f;x)\|_C < \max_{1 \leqslant j \leqslant 2^{n+1}} |c_j| \cdot \sqrt{3} \cdot 2^{\frac{n}{2}} < 12\|f\|_C.$$

Пространство ломаных $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D^n$ с вершинами в точках $\{x_k^n\}$ всюду плотно в пространстве $C(S^1)$. Используем этот факт и лемму 1 для завершения доказательства теоремы.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для некоторого N существует ломаная $l \in D^N$, такая, что $\|f - l\|_C < \varepsilon$. Тогда существует число $M > N$, такое, что для всех $n > M$ и для всех k при всех $x \in S^1$ выполнено неравенство $|l(x) - S_k^n(l;x)| < \varepsilon$. Получим, что при всех $x \in S^1$ имеет место оценка

$$|f(x) - S_k^n(f;x)| < |f(x) - l(x)| + |S_k^n(f - l;x)| + |l(x) - S_k^n(l;x)| < 14\varepsilon.$$

Теорема 1 доказана.

Лемма 3. *При орторекурсивном разложении f по модифицированной системе Фабера–Шаудера для каждой функции e_i^m сумма (по j) модулей числовых коэффициентов λ_{ij}^m, стоящих при скалярных произведениях f с функцией e_i^m в коэффициенте c_j, ограничена. Иными словами, для всех $i = 1, 2, \ldots, 2^{m+1}$ выполнено $\sum\limits_{j=1}^{2^{n+1}} \left|\lambda_{ij}^m\right| < 8$.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 2 будем рассматривать $\max\limits_{i=1,\ldots,2^{m+1}} \sum\limits_{j=1}^{2^{n+1}} \left|\lambda_{ij}^m\right|$.

При прохождении пачки с номером n выполнено $\sum\limits_{j=1}^{2^{n+1}} \left|\lambda_{ij}^n\right| < 2$. Для $m < n$ матрица $L\binom{n}{k}$ коэффициентов λ_{ij}^m после прохождения пачки изменяется так: $L\binom{n}{2^{n+1}} = L\binom{n}{0} \cdot G$, где

$$G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{-1}{64} & \dots & \frac{1}{4^{2^{n+1}-2}} & \frac{-1}{4^{2^{n+1}-1}} & \frac{1}{4^{2^{n+1}}}+\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{16} & \dots & \frac{-1}{4^{2^{n+1}-3}} & \frac{1}{4^{2^{n+1}-2}} & \frac{-1}{4^{2^{n+1}-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{-1}{64} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{-1}{64} & \dots & \frac{1}{4^{2^{n+1}-2}} & \frac{-1}{4^{2^{n+1}-1}}-\frac{1}{4} & \frac{1}{16}+\frac{1}{4^{2^{n+1}}}+\frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при прохождении пачки $\max\limits_{i=1,\dots,2^{m+1}}\sum\limits_{j=1}^{2^{n+1}}\left|\lambda_{ij}^m\right|$ может увеличиться не более чем вдвое, а после прохождения всей пачки $\sum\limits_{j=1}^{2^{n+1}}\left|\lambda_{ij}^m\binom{n}{2^{n+1}}\right|\leqslant\sum\limits_{j=1}^{2^{n+1}}\left|\lambda_{ij}^m\binom{n}{0}\right|\cdot\|G_j\|$, где $\|G_j\|$ — норма l_1 (манхаттанская) j-й строки матрицы G ($\|x\|_{l_1}=\sum|x_i|$). Используя также тот факт, что

$$\lambda_{i,2j}^m\binom{n}{0}=\frac{1}{2}\left(\lambda_{ij}^m\binom{n-1}{2^n}+\lambda_{i,j+1}^m\binom{n-1}{2^n}\right)\text{ и }\lambda_{i,2j-1}^m\binom{n}{0}=\lambda_{ij}^m\binom{n-1}{2^n},$$

получаем

$$\sum_{j=1}^{2^{n+1}}\left|\lambda_{ij}^m\binom{n}{2^{n+1}}\right|\leqslant\|G_2\|\cdot\left|\lambda_{i,2}^m\binom{n}{0}\right|+\sum_{j=3}^{2^{n+1}-1}\|G_j\|\cdot\left|\lambda_{i,j}^m\binom{n}{0}\right|+\|G_{2^{n+1}}\|\cdot\left|\lambda_{i,2^{n+1}}^m\binom{n}{0}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{4}+\frac{17}{48}\right)\left|\lambda_{i,1}^m\binom{n-1}{2^n}\right|+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\left|\lambda_{i,2}^m\binom{n-1}{2^n}\right|+\sum_{j=3}^{2^{n+1}-1}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)\left|\lambda_{i,j}^m\binom{n-1}{2^n}\right|+$$

$$+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{17}{48}\right)\left|\lambda_{i,2^n}^m\binom{n-1}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2}\max_{i=1,\dots,2^{m+1}}\sum_{j=1}^{2^{n+1}}\left|\lambda_{ij}^m\binom{n}{0}\right|.$$

Отсюда заключаем, что после прохождения пачки $\max\limits_{i=1,\dots,2^{m+1}}\sum\limits_{j=1}^{2^n}\left|\lambda_{ij}^m\binom{n-1}{2^n}\right|$ уменьшается минимум вдвое, а при переходе к следующей увеличивается вдвое. Значит, $\max\limits_{i=1,\dots,2^{m+1}}\sum\limits_{j=1}^{2^{n+1}}\left|\lambda_{ij}^m\binom{n}{0}\right|<8$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим частичную сумму $S_k^n(f;x)=\sum\limits_{j=1}^{2^{n+1}}c_j\binom{n}{k}e_k^n(x)$ для f из L_1, где $c_j=c_j\binom{n}{k}=\sum\limits_{m=0}^{n}2^{-\frac{1}{2}(n-m)}\sum\limits_{i=1}^{2^{m+1}}\lambda_{ij}^m(f,e_i^m)$.

По лемме 3 справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^{2^{n+1}}|c_j|\leqslant\sum_{m=0}^{n}2^{-\frac{1}{2}(n-m)}\sum_{i=1}^{2^{m+1}}(|f|,e_i^m)\sum_{j=1}^{2^{n+1}}|\lambda_{ij}^m|<2^{\frac{n}{2}+4}\cdot\sqrt{3}\cdot\|f\|_{L_1}.$$

Значит, для произвольной функции $f\in L_1(S^1)$ выполнено неравенство

$$\|S_k^n(f)\|_{L_1}\leqslant\sum_{j=1}^{2^{n+1}}|c_j|\int\limits_{S^1}|e_j^n|dx\leqslant 24\|f\|_{L_1}.$$

Пространство ломаных $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}D^n$ с вершинами в точках $\{x_k^n\}$ всюду плотно в пространстве $L_1(S^1)$. Используем этот факт и лемму 1 для завершения доказательства теоремы.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для некоторого N существует ломаная $l \in D^N$, такая, что $\|f - l\|_{L_1} < \varepsilon$. Существует число $M > N$, такое, что для всех $n > M$ и для всех k при всех $x \in S^1$ выполнено неравенство $|l(x) - S_k^n(l;x)| < \varepsilon$, а следовательно, и $\|l - S_k^n(l)\|_{L_1} < \varepsilon$. Тогда $\|f - S_k^n(f)\|_{L_1} \leqslant \|(f-l)\|_{L_1} + \|S_k^n(f-l)\|_{L_1} + \|l - S_k^n(l)\|_{L_1} < 26\varepsilon$. Теорема 2 доказана.

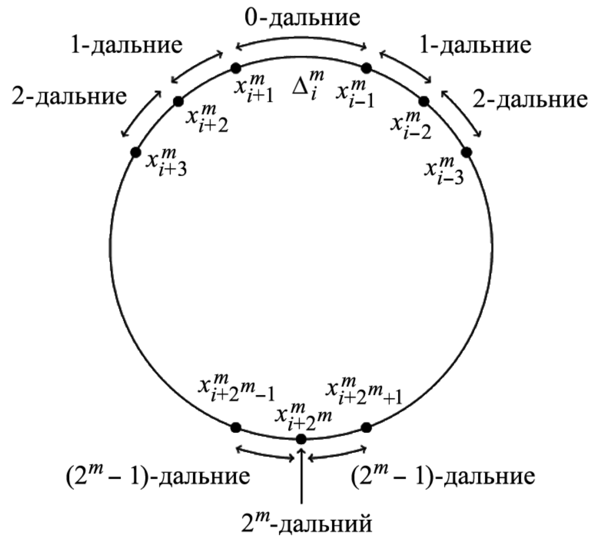

Рис. 1. Зависимость α-дальности $\lambda_{ij}^m\binom{n}{k}$ от отрезка, в который попадет соответствующая точка x_j^n

Теперь заметим, что для фиксированной точки x все функции из n-й пачки, за исключением не более чем двух функций, обращаются в нуль в этой точке.

Обозначим индексом $\binom{n}{k(x)}$ ту из двух функций, для которой x принадлежит отрезку ее возрастания. Получаем $|S_k^n(x)| \leqslant \left|c_{k(x)}\binom{n}{k}\right| e_{k(x)}^n(x) + \left|c_{k(x)+1}\binom{n}{k}\right| e_{k(x)+1}^n(x)$. Оценим коэффициент λ_{ij}^m в зависимости от расстояния от точки x_j^n до носителя, соответствующего e_i^m. Для этого введем сначала определение.

Определение 5. Будем говорить, что коэффициент $\lambda_{ij}^m\binom{n}{k}$ имеет *α-дальность* от Δ_i^m, $\alpha \in \{1,\ldots,2^m\}$, если $\rho(x_j^n;\Delta_i^m) \in \left[\frac{\alpha-1}{2^{m+1}};\frac{\alpha}{2^{m+1}}\right)$ и $x_j^n \notin \operatorname{int}\Delta_i^m$; будем считать, что $\lambda_{ij}^m\binom{n}{k}$ имеет 0-дальность ($\alpha = 0$) от Δ_i^m, если $x_j^n \in \operatorname{int}\Delta_i^m$ (см. рис. 1).

Лемма 4. *Для коэффициента $\lambda_{ij}^m\binom{n}{k}$, α-дальнего от Δ_i^m, выполнено неравенство*

$$\left|\lambda_{ij}^m\right| \leqslant \left(\frac{7}{8}\right)^{n-m-1}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-\alpha}\right), \tag{1}$$

а для индекса $\binom{n}{2^n+1}$ — неравенство

$$\left|\lambda_{ij}^m\right| \leqslant \left(\frac{7}{8}\right)^{n-m}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-\alpha}\right). \tag{2}$$

Доказательство. По индукции. Нетрудно проверить, что для $\binom{n}{k} \leqslant \binom{m}{2^{m+1}}$ неравенство (2) выполнено. Пусть теперь шагом является переход от n-й к $(n+1)$-й пачке. Тогда при переходе от индекса $\binom{n}{2^{n+1}}$ к $\binom{n+1}{0}$ имеем $\lambda_{i,2j-1}^m\binom{n+1}{0} = \lambda_{ij}^m\binom{n}{2^{n+1}}$ и $\lambda_{i,2j}^m\binom{n+1}{0} = \frac{1}{2}\left(\lambda_{i,j}^m\binom{n}{2^{n+1}} + \lambda_{i,j+1}^m\binom{n}{2^{n+1}}\right)$. Неравенство (1) проверяется непосредственным рассмотрением случаев нечетного и четного индекса j, причем для четного индекса j также необходимо рассмотреть подслучаи, когда оба соседних имеют одинаковую дальность и когда соседние имеют разную дальность.

Пусть теперь шагом индукции является шаг внутри пачки. При переходе от $\binom{n}{k}$ к $\binom{n}{k+1}$ изменяются только $\lambda_{i,k+1}^m$: $\lambda_{i,k+1}^m\binom{n}{k+1} = \frac{1}{4}\lambda_{i,k}^m\binom{n}{k} + \frac{1}{4}\lambda_{i,k+2}^m\binom{n}{k}$. Аналогично проводится проверка случаев, когда соседние λ_{ij}^m имеют одинаковые или разные дальности, а при разных дальностях рассматриваются подслучаи, когда проверяемый коэффициент λ имеет дальность, большую или меньшую из двух. Случай 2^m-дальности проверяется отдельно. Лемма доказана.

В лемме 4 получена некоторая оценка λ_{ij}^m. Дадим количественную характеристику сумм, связанных с полученной оценкой и с определением α-дальности. Сформулируем этот результат в виде леммы, которая потребуется в дальнейшем при доказательстве теоремы 3.

Для удобства записи для каждого $\lambda_{i,j}^m\binom{n}{k}$ введем величину $\theta_i(\lambda_{i,j}^m)$ следующим образом: если $\lambda_{i,j}^m\binom{n}{k}$ имеет α-дальность от Δ_i^m, то θ_i положим равной $\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-\alpha}\right)\cdot\frac{\alpha+3}{2^{m+1}}$.

Лемма 5. *Имеем* $\sum\limits_{i=1}^{2^{m+1}}\theta_i < \frac{12}{2^{m+1}}$.

Доказательство. Для $c_j\binom{n}{k}$, $n \geqslant m$, в наборе $\{\lambda_{ij}^m\}_{i=1}^{2^{m+1}}$ содержатся максимум два 0-дальних элемента от Δ_i^m, по два α-дальних элемента от Δ_i^m для $\alpha = 1,\ldots,2^m-1$ и максимум один 2^m-дальний элемент от Δ_i^m. Легко проверить, что $T = \sum\limits_{\alpha=0}^{2^m}\frac{\alpha+3}{2^{m+1}}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-\alpha}\right) \leqslant \frac{6}{2^{m+1}}$. Отсюда получаем $\sum\limits_{i=1}^{2^{m+1}}\theta_i \leqslant 2T \leqslant \frac{12}{2^{m+1}}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Для f из L_p рассмотрим частичную сумму

$$S_k^n(f;x) = \sum_{j=1}^{2^{n+1}} c_j \left({n \atop k} \right) e_k^n(x).$$

Ранее для $x \in S^1$ был введен индекс $\left({n \atop k(x)} \right)$ и для этого индекса

$$|S_k^n(x)| \leqslant \left|c_{k(x)}\right| e_{k(x)}^n(x) + \left|c_{k(x)+1}\right| e_{k(x)+1}^n(x).$$

Пусть коэффициент $\lambda_{i,k(x)}^m$ имеет α-дальность от Δ_i^m. Тогда

$$|(f, e_i^m)| \leqslant \sqrt{3} \cdot 2^{\frac{m}{2}} \int\limits_{\Delta_i^m} |f| dx \leqslant \sqrt{3} \cdot 2^{\frac{m}{2}} \int\limits_{\Omega} |f| dx,$$

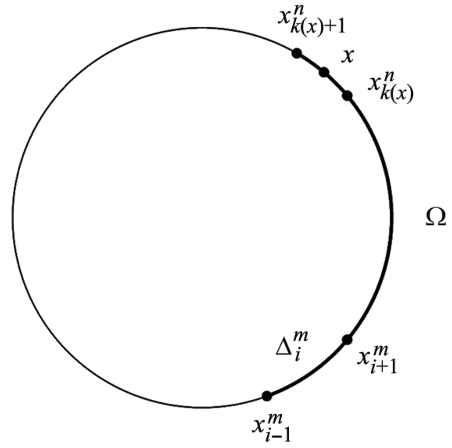

Рис. 2. Определение множества Ω

где Ω есть минимальное по длине связное множество, содержащее точку x и отрезок Δ_i^m (см. рис. 2). При этом из определения α-дальности имеем $\rho\left(x_{k(x)}^n; \Delta_i^m\right) \in \left[\frac{\alpha-1}{2^{m+1}}; \frac{\alpha}{2^{m+1}}\right)$.

Тогда $\rho\left(x_{k(x)+1}^n; \Delta_i^m\right) \in \left[\frac{\alpha-2}{2^{m+1}}; \frac{\alpha+1}{2^{m+1}}\right)$, а значит, $|\Omega| < \frac{\alpha+3}{2^{m+1}}$ и $x \in \Omega$. Следовательно,

$$|(f, e_i^m)| < \sqrt{3} \cdot 2^{\frac{m}{2}} \cdot |\Omega| \cdot (\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |f(x)| dx) < \sqrt{3} \cdot 2^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{\alpha+3}{2^{m+1}} \cdot f^M(x),$$

где $f^M(x)$ — максимальная функция Харди–Литлвуда:

$$f^M(x) = \sup_{x_1 < x < x_2} \left(\frac{1}{x_2 - x_1} \int\limits_{x_1}^{x_2} |f(t)| \, dt \right), \quad \left\|f^M(x)\right\|_{L_p} \leqslant \text{æ}_p \|f\|_{L_p}$$

(см. [9, гл. VII] или [7, приложение 1, п. 2°]).

Оценим коэффициент $c_{k(x)}$, используя леммы 4 и 5:

$$\left|c_{k(x)}\right| \leqslant \sum_{m=0}^{n} \sqrt{3} \cdot 2^{m-\frac{n}{2}} f^M(x) \sum_{i=1}^{2^{m+1}} \left|\lambda_{ij}^m\right| \frac{\alpha(\lambda_{ij}^m) + 3}{2^{m+1}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-\frac{n}{2}} f^M(x) \sqrt{3} \sum_{m=0}^{n} 2^m \left(\frac{7}{8}\right)^{n-m-1} \sum_{i=1}^{2^{m+1}} \theta_i \leqslant 60\sqrt{3} \cdot 2^{-\frac{n}{2}} \cdot f^M(x).$$

Аналогично $\left|c_{k(x)+1}\right| \leqslant 60\sqrt{3} \cdot 2^{-\frac{n}{2}} \cdot f^M(x)$.

Для произвольной функции $f \in L_p(S^1)$ выполнено неравенство

$$|S_k^n(f;x)| < 60\sqrt{3} \cdot 2^{-\frac{n}{2}} \cdot f^M(x) \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2^{\frac{n}{2}} = 360 f^M(x),$$

а значит, имеет место оценка $\|S_k^n(f;x)\|_{L_p} \leqslant 360 \left\|f^M(x)\right\|_{L_p} \leqslant 360 \cdot \text{æ}_p \|f\|_{L_p} \leqslant \tilde{c_p} \|f\|_{L_p}$, где $\tilde{c_p}$ — константа, зависящая только от p. Утверждение теоремы легко выводится из этого неравенства аналогично доказательствам теорем 1 и 2. Теорема 3 доказана.

Лемма 1 и теорема 1 доказаны вторым автором, остальные результаты принадлежат первому автору.

Авторы глубоко признательны профессору Т. П. Лукашенко и доценту В. В. Галатенко за внимание к работе и ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукашенко Т.П.* Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера–Шаудера // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 10-й Саратов. зимней школы. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2000. 83.

2. *Лукашенко Т.П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2001. № 1. 6–10.
3. *Галатенко В.В.* Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. **69**, № 1. 3–16.
4. *Filippov V.I., Oswald P.* Representation in L_p by series of translates and dilates of one function // J. Approx. Theory. 1995. **82**, N 1. 15–29.
5. *Кудрявцев А.Ю.* Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов фиксированной функции // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тез. докл. Воронеж. зимней матем. школы. Воронеж, 2001. 161–162.
6. *Политов А.В.* Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2010. № 3. 95–99.
7. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1984.
8. *Дьяченко М.И., Ульянов П.Л.* Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.
9. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. М.: Мир, 1984.

Поступила в редакцию
03.02.2023

УДК 519.71

О СЛОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ СИСТЕМ ЭЛЕМЕНТОВ КОНЕЧНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

В. В. Кочергин[1]

Исследуется сложность реализации систем элементов конечных абелевых групп. Под сложностью реализации системы элементов над заданным базисом понимается минимальное число применений групповых операций для вычисления элементов системы по базисным элементам, при этом допускается многократное использование результатов промежуточных вычислений. Для функции Шеннона $L(n,m)$, характеризующей максимальную сложность системы из m элементов, где максимум берется по всем абелевым группам порядка не более n, по всем их базисам и по всем реализуемым системам, установлено, что в случае выполнения условия $m = o(\log\log n)$ при $n \to \infty$ справедливо асимптотичское равенство $L(n,m) \sim \log_2 n$. Кроме того, при тех же условиях установлена асимптотика максимально возможного отличия сложности вычисления системы элементов конечной абелевой группы и сложности реализации системы одночленов, соответствующих представлениям этих элементов через базисные элементы.

Ключевые слова: конечная абелева группа, сложность вычисления, аддитивные цепочки, векторные аддитивные цепочки, задача Беллмана, задача Пиппенджера.

The computation compelxity of the systems of the finite Abelian group elements is studied in the paper. The complexity of computation means the minimal number of group operations required to calculate elements of the system over the basis elements, all results of intermediate calculations may be used multiple times. We define the Shannon function $L(n,m)$ as the maximal complexity of m-elements system group, the maximum is taken over all Abelian groups of order less than n, over all their bases, over all computed systems. It is stated that if $m = o(\log\log n)$ for $n \to \infty$, than the asymptotic equality $L(n,m) \sim \log_2 n$ is valid. In addition, the asymptotic of the maximal possible difference of computation complexity of the systems of a finite Abelian group elements and the computation complexity of a monomial system corresponding to the representation of these elements over basis elements is obtained under the same conditions.

[1] *Кочергин Вадим Васильевич* — доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. дискретной математики мех.-мат. ф-та МГУ; проф. общеуниверситетской каф. высшей математики НИУ ВШЭ, e-mail: vvkoch@yandex.ru.

Kochergin Vadim Vasil'evich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Head of Chair of Discrete Mathematics; Professor, National Research University — Higher School of Economics, Independent HSE Departments / Department of Higher Mathematics.