Тогда $|x(t + 2\pi m)| < |x(t)|$. Таким образом, уравнение (3) обладает совокупностью решений, ограниченных равномерно по начальному отрезку $[t_0, t_0 + 2\pi]$, где $t_0 \in [0, +\infty)$.

Построенная система естественным образом обобщается на случай более высокой размерности рассмотрением диагональной системы $\dot{x} = b(t)Ex$, где E — единичная матрица. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1966.
2. *Margolina N.L.* On the residual uniform stability of linear systems with unbounded coefficients // J. Math. Sci. 2015. **207**, N 5. 245–246.

Поступила в редакцию
08.09.2022

УДК 517.925.5

КЛАССЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ УСТОЙЧИВОСТИ ИЛИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

И. Н. Сергеев[1]

Изучаются отношения (включения, совпадения, несовпадения) между классами линейных приближений, обеспечивающих различные свойства ляпуновской, перроновской и верхнепредельной устойчивости или неустойчивости (от глобальной до частной) нулевого решения дифференциальной системы произвольного порядка. Представлен полный набор несовпадающих классов устойчивости и приведены некоторые соображения для аналогичного описания классов неустойчивости.

Ключевые слова: дифференциальная система, нелинейная система, линейное приближение, устойчивость по первому приближению, устойчивость по Ляпунову, устойчивость по Перрону, верхнепредельная устойчивость.

Relationships (inclusions, coincidences, non-coincidences) between classes of linear approximations that provide various properties of Lyapunov, Perron, and upper-limit stability or instability (from global to particular) of the zero solution to a differential system of arbitrary order are studied. A complete set of non-coinciding stability classes is presented and some considerations are given for a similar description of instability classes.

Key words: differential system, nonlinear system, linear approximation, stability in the first approximation, Lyapunov stability, Perron stability, upper-limit stability.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-2

Введение. Важнейшим в теоретическом и прикладном плане свойством решений дифференциальных уравнений и систем является их *устойчивость по Ляпунову* (см. [1, §1], а также, к примеру, [2–4]). Исследованию устойчивости *по первому приближению* [2, §12], составляющему суть *первого метода Ляпунова*, посвящено огромное число публикаций (см. [3, §11]).

В настоящей работе изучаются классы линейных приближений, обеспечивающих самые разные свойства, стоящие в одном ряду с устойчивостью по Ляпунову и тесно связанные с ней, но лишь недавно введенные [5–11]. Сюда относятся *устойчивость по Перрону* [5] и *верхнепредельная устойчивость* [6], а также различные вариации этих свойств, как усиленные (асимптотическая или глобальная), так и ослабленные (частичная или частная), равно как и свойства неустойчивости, служащие отрицаниями соответствующих свойств устойчивости.

[1] *Сергеев Игорь Николаевич* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. дифференциальных уравнений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: igniserg@gmail.com.

Sergeev Igor Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Equations.

Множество первых приближений, обеспечивающих какое-либо свойство, т.е. *класс* этого свойства, в объединении с классом противоположного свойства не покрывает множества всех потенциальных первых приближений, но уже в случае свойства ляпуновской устойчивости такое объединение всюду плотно в множестве ограниченных линейных систем (с равномерной на полуоси метрикой, теорема 3).

Количество различных (т.е. несовпадающих) классов устойчивости, как оказывается, равно трем (теорема 4), а в одномерном случае даже двум (теорема 5), причем один из них пуст, а именно тот, что обеспечивает глобальную устойчивость какого-либо типа. Различных же классов неустойчивости в неодномерном случае насчитывается не менее четырех (теорема 6), а в одномерном опять же ровно два (теорема 7).

1. Основные понятия. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ и *фазовой области* $G \subset \mathbb{R}^n$, содержащей точку 0, рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x \in G, \quad f(\cdot,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \tag{1}$$

допускающую *нулевое* решение и удовлетворяющую условиям теоремы существования и единственности решения начальной задачи. Через S_* и S_δ будем обозначать множества *непродолжаемых* решений x системы (1), удовлетворяющих начальному условию $|x(0)| \neq 0$ и $0 < |x(0)| < \delta$ соответственно.

Определение 1 [1, 5, 6]. Скажем, что *система* (1) (точнее, ее нулевое решение, о чем в дальнейшем не упоминаем) обладает следующим свойством *ляпуновского, перроновского* или *верхнепредельного* типа:

1) *устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет соответственно требованию

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t)| < \varepsilon, \quad \varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| < \varepsilon, \quad \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| < \varepsilon, \tag{2}$$

или, наоборот, *неустойчивостью*, если она не обладает устойчивостью того же типа (т.е. при некотором $\varepsilon > 0$ для любого $\delta > 0$ хотя бы одно решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет соответственно требованию

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t)| > \varepsilon, \quad \varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| > \varepsilon, \quad \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| > \varepsilon, \tag{3}$$

которое также будем считать выполненным, если решение определено не на всей полуоси $\mathbb{R}_+$);

2) *полной неустойчивостью*, если для некоторых $\varepsilon, \delta > 0$ все решения $x \in S_\delta$ удовлетворяют соответствующему требованию (3), или, наоборот, *частичной устойчивостью*, если она не обладает полной неустойчивостью того же типа (т.е. для каждых $\varepsilon, \delta > 0$ хотя бы одно решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет соответствующему требованию (2));

3) *глобальной неустойчивостью*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ все решения $x \in S_*$ удовлетворяют соответствующему требованию (3), или, наоборот, *частной устойчивостью*, если она не обладает глобальной неустойчивостью того же типа (т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ хотя бы одно решение $x \in S_*$ удовлетворяет соответствующему требованию (2)).

Определение 2 [5, 6]. Скажем, что *система* (1) обладает *перроновской* или *верхнепредельной*:

4) *асимптотической устойчивостью*, если для некоторого $\delta > 0$ любое решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет соответственно требованию

$$\varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| = 0, \quad \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| = 0, \tag{4}$$

или, наоборот, *асимптотической неустойчивостью*, если она не обладает асимптотической устойчивостью того же типа (т.е. для любого $\delta > 0$ хотя бы одно решение $x \in S_\delta$ не удовлетворяет соответствующему требованию (4));

5) *глобальной устойчивостью*, если все решения $x \in S_*$ удовлетворяют соответствующему требованию (4), или, наоборот, *частной неустойчивостью*, если она не обладает глобальной устойчивостью того же типа (т.е. хотя бы одно решение $x \in S_*$ не удовлетворяет соответствующему требованию (4)).

Определение 3 [1, 6]. Скажем, что *система* (1) обладает *ляпуновской*:

4) *асимптотической устойчивостью*, если она обладает ляпуновской устойчивостью и верхнепредельной асимптотической устойчивостью, или, наоборот, *асимптотической неустойчивостью*,

если она не обладает ляпуновской асимптотической устойчивостью (т.е. обладает ляпуновской неустойчивостью или верхнепредельной асимптотической неустойчивостью);

5) *глобальной устойчивостью*, если она обладает ляпуновской устойчивостью и верхнепредельной глобальной устойчивостью, или, наоборот, *частной неустойчивостью*, если она не обладает ляпуновской глобальной устойчивостью (т.е. обладает ляпуновской неустойчивостью или верхнепредельной частной неустойчивостью).

Замечание 1. В каждой паре свойств во всех пп. 1–5 определений 1–3 первыми идут так называемые *массивные* свойства [7]: устойчивость, полная и глобальная неустойчивости, асимптотическая и глобальная устойчивости — в их описании сразу на все решения x из множества S_δ или S_* накладываются какие-то из требований (2)–(4) (в отличие от вторых свойств, *точечных*, в которых аналогичное требование, наоборот, нарушается хотя бы для одного решения x из того же множества).

Определение 4. Будем говорить, что система (1) имеет *линейное приближение*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad A \in C(\mathbb{R}_+, \operatorname{End}\mathbb{R}^n), \tag{5}$$

если выполнено требование *равномерной малости* возмущения

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t,x) - A(t)x| = o(x), \quad G \ni x \to 0, \quad \text{откуда } A(\cdot) = f'_x(\cdot, 0). \tag{6}$$

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество всех потенциальных линейных приближений (5) (отождествляемых с задающими их оператор-функциями A) с *равномерной* на полуоси $\mathbb{R}_+$ метрикой, а через $\mathcal{M}^n$ — подмножество приближений (5), задаваемых лишь ограниченными функциями A. Скажем, что линейное приближение (5) *обеспечивает* данное свойство, если им обладает всякая система (1) с этим линейным приближением. В строгом соответствии с пп. 1–5 определений 1–3 введем *классы свойств* $\mathcal{K}^k_\varkappa \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}^n$:

$$1)\ \mathcal{S}^b_\varkappa,\ \mathcal{N}^b_\varkappa; \quad 2)\ \mathcal{N}^c_\varkappa,\ \mathcal{S}^c_\varkappa; \quad 3)\ \mathcal{N}^g_\varkappa,\ \mathcal{S}^d_\varkappa; \quad 4)\ \mathcal{S}^a_\varkappa,\ \mathcal{N}^a_\varkappa; \quad 5)\ \mathcal{S}^g_\varkappa,\ \mathcal{N}^d_\varkappa, \quad \text{где } \varkappa = \pi, \sigma, \lambda, \tag{7}$$

т.е. классы линейных приближений (5), обеспечивающих перроновские (при $\varkappa = \pi$), верхнепредельные (при $\varkappa = \sigma$) и ляпуновские (при $\varkappa = \lambda$) свойства *устойчивости* (при $\mathcal{K} = \mathcal{S}$) или *неустойчивости* (при $\mathcal{K} = \mathcal{N}$), где верхние индексы $k = b, c, g, d, a$ обозначают их разновидности (ассоциируемые со словами *basic, complete* или *chain, global, dotty, asymptotic*).

Замечание 2. Если в требовании (6) оставить лишь последнее условие, более слабое и гарантирующее только *поточечную* (т.е. при каждом значении t в отдельности, но не обязательно равномерную по всем $t \in \mathbb{R}_+$) малость возмущения, то ни одно линейное приближение (5) в полученном искаженном смысле не сможет обеспечить ни одно свойство из определений 1–3 (см. теорему 4 [8]).

2. Формулировки теорем. Определения 1–3 устанавливают естественную логическую иерархию между классами (7).

Теорема 1. *При любом $n \in \mathbb{N}$ для классов устойчивости (7) имеют место включения*

$$\mathcal{S}^g_\varkappa \subseteq \mathcal{S}^a_\varkappa \subseteq \mathcal{S}^b_\varkappa \subseteq \mathcal{S}^c_\varkappa \subseteq \mathcal{S}^d_\varkappa, \quad \varkappa = \lambda, \sigma, \pi; \qquad \mathcal{S}^k_\lambda \subseteq \mathcal{S}^k_\sigma \subseteq \mathcal{S}^k_\pi, \quad k = g, a, b, c, d.$$

Теорема 2. *При любом $n \in \mathbb{N}$ для классов неустойчивости (7) имеют место включения*

$$\mathcal{N}^g_\varkappa \subseteq \mathcal{N}^c_\varkappa \subseteq \mathcal{N}^b_\varkappa \subseteq \mathcal{N}^a_\varkappa \subseteq \mathcal{N}^d_\varkappa, \quad \varkappa = \pi, \sigma, \lambda; \qquad \mathcal{N}^k_\pi \subseteq \mathcal{N}^k_\sigma \subseteq \mathcal{N}^k_\lambda, \quad k = g, c, b, a, d.$$

Никакие два однотипных класса, входящие в какой-либо один из пп. 1–5 перечня (7), не пересекаются. Кроме того, два самых широких класса устойчивости и неустойчивости, определяемые цепочками включений из теорем 1 и 2, даже, будучи объединенными, не покрывают множества всех линейных приближений. Однако замыкание объединения уже только двух ляпуновских классов — устойчивости и неустойчивости — покрывает по меньшей мере множество всех ограниченных систем.

Теорема 3. *При любом $n \in \mathbb{N}$ для классов (7) имеют место соотношения*

$$\mathcal{S}^g_\varkappa \cap \mathcal{N}^d_\varkappa = \mathcal{S}^k_\varkappa \cap \mathcal{N}^k_\varkappa = \mathcal{S}^d_\varkappa \cap \mathcal{N}^g_\varkappa = \varnothing, \quad k = a, b, c, \quad \varkappa = \pi, \sigma, \lambda;$$

$$0 \notin \mathcal{S}^d_\pi \cup \mathcal{N}^d_\lambda \subsetneq \widetilde{\mathcal{M}}^n; \quad \mathcal{M}^n \subseteq \overline{\mathcal{S}^b_\lambda \cup \mathcal{N}^b_\lambda}.$$

Максимальное число несовпадающих классов, обеспечивающих какие-либо из 15 всевозможных разновидностей устойчивости, равно всего лишь трем (причем один из них заведомо пуст). В результате слияния эти классы перестают различать все три типа любых одноименных свойств устойчивости, а также устойчивость с асимптотической устойчивостью и частичную устойчивость с частной. Но указанные слияния классов как раз и обосновывают корректность следующих обозначений.

Теорема 4. *При любом $n \in \mathbb{N}$ для классов устойчивости* (7) *имеют место равенства*

$$\varnothing = \mathcal{S}^g_\varkappa \equiv \mathcal{S}^g, \quad \mathcal{S}^a_\varkappa = \mathcal{S}^b_\varkappa \equiv \mathcal{S}^{ab}, \quad \mathcal{S}^c_\varkappa = \mathcal{S}^d_\varkappa \equiv \mathcal{S}^{cd}, \quad \varkappa = \lambda, \sigma, \pi. \tag{8}$$

Различных непустых *слившихся* классов устойчивости (8) насчитывается в неодномерном случае всего два, а в одномерном они вообще сливаются в один.

Теорема 5. *При любом $n \in \mathbb{N}$ для слившихся классов устойчивости* (8) *имеет место цепочка включений*

$$\mathcal{S}^g \subsetneq \mathcal{S}^{ab} \subseteq \mathcal{S}^{cd},$$

последнее из которых в зависимости от значения n либо является строгим, либо обращается в равенство, а именно:

$$\mathcal{S}^{ab} \subsetneq \mathcal{S}^{cd} \quad \textit{и даже} \quad \mathcal{S}^{cd} \setminus \mathcal{S}^{ab} \supseteq \mathcal{S}^{cd} \cap \mathcal{N}^b_\sigma \neq \varnothing \quad \textit{при } n > 1; \quad \mathcal{S}^{ab} = \mathcal{S}^{cd} \equiv \mathcal{S}^{abcb} \quad \textit{при } n = 1.$$

Описание всех слияний каких-либо из 15 классов неустойчивости (7) пока еще не завершено. Однако уже ясно, что ни один из этих классов не пуст и они отличают перроновскую неустойчивость от верхнепредельной и ляпуновской, а в неодномерном случае еще и неустойчивость от полной неустойчивости.

Теорема 6. *При любом $n \in \mathbb{N}$ для классов неустойчивости* (7) *имеют место соотношения*

$$\varnothing \neq \mathcal{N}^k_\pi \subsetneq \mathcal{N}^k_\sigma \quad \textit{и даже} \quad \mathcal{N}^k_\sigma \setminus \mathcal{N}^k_\pi \supseteq \mathcal{N}^g_\sigma \setminus \mathcal{N}^d_\pi \neq \varnothing, \quad k = g, c, b, a, d,$$

а при $n > 1$ еще и соотношения

$$\mathcal{N}^c_\varkappa \subsetneq \mathcal{N}^b_\varkappa \quad \textit{и даже} \quad \mathcal{N}^b_\varkappa \setminus \mathcal{N}^c_\varkappa \supseteq \mathcal{N}^b_\sigma \cap \mathcal{S}^{cd} \neq \varnothing, \quad \varkappa = \sigma, \lambda.$$

В одномерном случае несовпадающих классов неустойчивости насчитывается ровно два (между прочим, как и классов устойчивости, один из которых, правда, пуст).

Теорема 7. *При $n = 1$ для классов неустойчивости* (7) *имеют место соотношения*

$$\mathcal{N}^k_\pi \equiv \mathcal{N}_\pi, \quad \mathcal{N}^k_\sigma = \mathcal{N}^k_\lambda \equiv \mathcal{N}_{\sigma\lambda}, \quad k = g, c, b, a, d; \qquad \mathcal{N}_\pi \subsetneq \mathcal{N}_{\sigma\lambda}.$$

3. Доказательства теорем. Докажем последовательно все сформулированные выше теоремы.

Доказательство теоремы 1. Все 15 свойств устойчивости из пп. 1–5 определений 1–3 в каждой пятерке однотипных свойств логически упорядочиваются так, что каждое следующее вытекает из предыдущего, а именно: глобальная устойчивость, асимптотическая устойчивость, устойчивость, частичная устойчивость и частная устойчивость. А в каждой тройке одноименных свойств разных типов верхнепредельное свойство вытекает из ляпуновского, но влечет за собой перроновское. Наконец, если одно свойство вытекает из другого, то класс первого заведомо содержит в себе класс второго.

Доказательство теоремы 2 получается переходом в уже доказанной теореме 1 от свойств устойчивости в каждом из пп. 1–5 определений 1–3 к логически противоположным (парным в перечне (7)) свойствам неустойчивости с механической заменой всех знаков включения обратными.

Доказательство теоремы 3. Первая цепочка ее соотношений попросту означает, что никакое линейное приближение не может обеспечивать два противоречащих друг другу свойства одновременно.

Вторая цепочка соотношений, по сути, опирается на тот факт, что уже нулевое линейное приближение $\dot{x} = 0 \cdot x$ не обеспечивает ни одного из 30 рассматриваемых свойств: ни самого слабого свойства устойчивости (которым не обладает глобально неустойчивая по Перрону система $\dot{x} = |x| \cdot x$), ни самого слабого свойства неустойчивости (которым не обладает глобально устойчивая по Ляпунову система $\dot{x} = -|x| \cdot x$).

Наконец, последнее соотношение теоремы вытекает из теоремы Миллионщикова [12] о том, что пространство всех ограниченных линейных приближений совпадает с замыканием множества интегрально-разделенных ограниченных линейных приближений. При этом старшие показатели Ляпунова последних без ограничения общности можно считать отличными от нуля благодаря возможным их сколь угодно малым возмущениям вида aI, где $a \in \mathbb{R}$, а I — тождественный оператор. А тогда каждое из них в силу теоремы 15.2.1 [4] обеспечивает либо ляпуновскую устойчивость, либо ляпуновскую неустойчивость.

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Прежде всего заметим, что никакое линейное приближение (5) не может обеспечивать никакую глобальную устойчивость, поскольку уже у системы (1) с правой частью

$$f(t,x) \equiv \varphi(x) \cdot A(t)x, \quad \varphi(x) \equiv \begin{cases} 1, |x| \leqslant 1; \\ 0, |x| \geqslant 2, \end{cases} \quad \varphi \in C^1(\mathbb{R}^n),$$

а значит, с тем же линейным приближением, все решения с начальными условиями $|x_0| \geqslant 2$ стационарны.

Далее, второе из равенств (8) доказано в работе [8] (его первоначальное более сложное доказательство [9] было впоследствии значительно упрощено благодаря идеям из работы [10]).

Наконец, пусть данное линейное приближение (5) не обеспечивает ляпуновской частичной устойчивости (логически самой сильной из участвующих в третьем равенстве (8)). Тогда некоторая система (1) с этим линейным приближением обладает ляпуновской полной неустойчивостью, т.е. для некоторых $\varepsilon, \delta > 0$ все решения $x \in S_\delta$ удовлетворяют требованию (3). Но тогда сужение той же системы на фазовую подобласть, в которой $|x| < \delta, \varepsilon$, обладает перроновской глобальной неустойчивостью, поскольку любое ее ненулевое решение попросту определено не на всей полуоси $\mathbb{R}_+$. Значит, данное линейное приближение не обеспечивает даже и перроновскую частную устойчивость (самую слабую из упомянутых выше).

Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Первая цепочка ее включений вытекает из первых соотношений теорем 1, 4 и непустоты класса $\mathcal{S}^{ab}$, содержащего систему $\dot{x} = -x$ согласно теореме 15.2.1 [4].

Согласно той же теореме линейное приближение, к примеру, с матрицей $A = \operatorname{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$ обеспечивает как верхнепредельную неустойчивость, так и частичную устойчивость всех типов сразу, что подтверждает справедливость второго соотношения (и его усиления в неодномерном случае) теоремы 5.

Пусть теперь при $n = 1$ данное линейное приближение (5) не принадлежит классу $\mathcal{S}^{ab}$, а значит, не обеспечивает ляпуновскую устойчивость. Тогда существует такая система (1) с данным линейным приближением, что для некоторого $\varepsilon > 0$ каждому $\delta > 0$ соответствует хотя бы одно ее решение $x \in S_\delta$, удовлетворяющее первому требованию (3). Пользуясь этим, по некоторой последовательности $\delta_i \to +0$ $(i \to +\infty)$ построим последовательность соответствующих решений x_i, которые без ограничения общности (перейдя при необходимости к их подпоследовательности) будем считать принимающими значения на фазовой прямой строго по одну сторону от точки $x = 0$. Переопределив функцию $f(t,x)$ по другую сторону нуля из соображений нечетности по x, получим *новую* систему с тем же линейным приближением (5), необходимой гладкостью и последовательностью пар решений $\pm x_i$ $(i \in \mathbb{N})$ с начальными значениями $0 \neq x_i(0) \to +0$ $(i \to +\infty)$. Новая система уже обладает ляпуновской полной неустойчивостью, а значит, линейное приближение (5) не принадлежит классу $\mathcal{S}^{cd}$ (что и завершает обоснование последнего доказываемого равенства): любое ее ненулевое решение x не удовлетворяет первому требованию (3), так как для некоторого $i \in \mathbb{N}$ одно из решений $\pm x_i$ (как раз не удовлетворяющее этому требованию) начинается на фазовой прямой между точками 0 и $x(0)$, а значит, и при всех остальных $t > 0$ также располагается между точками 0 и $x(t)$.

Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Первое неравенство подтверждается тем, что система $\dot{x} = x$ (по теореме 15.2.1 [4]) обеспечивает логически самую сильную неустойчивость — перроновскую глобальную.

Заключительная часть первой цепочки соотношений (вместе с ее усилением) обосновывается с помощью примера линейной системы (5) с оператор-функцией $A \equiv aI$, имеющей единственный скалярный коэффициент $a \in C(\mathbb{R}_+)$, который вместе с некоторой последовательностью $0 \equiv t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ строится так, чтобы при каждом $k = 0, 1, \ldots$ функция a, будучи линейной на каждом интервале вида $[t_k, t_k + 1]$ и $[t_k + 1, t_{k+1}]$, удовлетворяла следующим условиям:

$$a(0) = -2, \quad a(t) = (-1)^k 2, \quad t \in [t_k + 1, t_{k+1}], \quad \int_0^{t_{k+1}} a(\tau)\, d\tau = (-1)^k t_{k+1}.$$

Любое решение $x(t) = x(0)\exp(\int_0^t a(\tau)\, d\tau)$ построенной системы (5), экспоненциально убывая по норме при $t = t_2, t_4, \ldots$, удовлетворяет первому требованию (4), а значит, сама эта система, обладая перроновской глобальной устойчивостью, не принадлежит классу $\mathcal{N}_\pi^d$. Зато верхнепредельной глобальной неустойчивостью будет обладать уже любая система (1) с этим линейным приближением (значит, принадлежащим классу $\mathcal{N}_\sigma^g$): действительно, выбрав достаточно малое $\delta > 0$, можно добиться, чтобы при $|x| < \delta$ было справедливо заключение теоремы 15.2.1 [4], согласно которому любое решение $x \in S_\delta$ будет экспоненциально расти по норме при $t = t_1, t_3, \ldots$ до тех пор, пока его фазовая кривая не покинет δ-окрестность нуля, что, следовательно, обязательно и произойдет.

Последняя усиленная цепочка вытекает из усиленной части теоремы 5 в неодномерном случае.

Теорема 6 доказана.

Доказательство теоремы 7. Пусть $n = 1$. Тогда полная неустойчивость системы (1) влечет ее глобальную неустойчивость того же типа (поскольку любому требованию (3) вместе с одним решением обязательно удовлетворяют и все решения, начинающиеся на том же фазовом луче, но дальше от нуля), а ляпуновская полная неустойчивость — верхнепредельную (поскольку если одно решение удовлетворяет третьему требованию (2), то все решения, начинающиеся на том же луче достаточно близко к нулю, в силу их непрерывной зависимости от начальных значений удовлетворяют первому требованию (2)).

Предположим, что данное линейное приближение (5) не обеспечивает глобальной (а значит, и полной) неустойчивости — перроновской или соответственно верхнепредельной (а значит, и ляпуновской). Тогда некоторая система (1) с этим линейным приближением для каждой пары $\varepsilon = \delta > 0$ имеет решение $x \in S_\delta$, удовлетворяющее второму или соответственно первому требованию (2). Пользуясь этим, по некоторой последовательности $\varepsilon_i = \delta_i \to +0$ $(i \to +\infty)$ построим последовательность пар решений $\pm x_i$ *новой* системы с тем же линейным приближением (и с нечетной правой частью, см. доказательство теоремы 5 выше). Эта система уже обладает перроновской или соответственно ляпуновской устойчивостью: для каждого $i \in \mathbb{N}$ все ее решения x с начальными условиями $x \in S_{|x_i(0)|} \subseteq S_{\delta_i}$ удовлетворяют второму или соответственно первому требованию (2) при $\varepsilon = \varepsilon_i$. Если хотя бы одно из решений x_i является еще и *особым*, т.е. удовлетворяет первому или соответственно второму требованию (4), то система обладает перроновской или соответственно ляпуновской асимптотической устойчивостью.

1. Если каждое из решений $x_i > 0$ $(i \in \mathbb{N})$ новой системы, удовлетворяя первому требованию (2), не удовлетворяет второму требованию (4), т.е. не является ляпуновски особым, то возмутим эту систему так, чтобы такое особое решение у нее нашлось. Для этого построения, задав числа $t_0 = 0$ и

$$\varepsilon_i \geqslant \sup_{t \in \mathbb{R}_+} x_i(t) \geqslant \overline{\lim_{t \to +\infty}}\, x_i(t) \equiv 2\gamma_i \to +0, \quad i \to +\infty, \tag{9}$$

для функции

$$y_1(t) \equiv x_1(t) e^{-\delta_1 \varphi(t - t_0)} \to 0, \quad t_0 \leqslant t \to +\infty, \quad C^2(\mathbb{R}) \ni \varphi(\tau) \equiv \begin{cases} \tau, & \tau \geqslant 1; \\ 0, & \tau \leqslant 0, \end{cases} \tag{10}$$

выберем число $s_1 > t_0 + 1$, удовлетворяющее условиям

$$0 < \min_{t_0 \leqslant t \leqslant s_1} y_1(t) \equiv 2\beta_1 \leqslant y_1(s_1) < \gamma_2 < x_2(s_1),$$

а затем выберем значение $t_1 > s_1$ так близко к s_1, чтобы у возмущенной системы с правой частью

$$g(t, x) \equiv A(t)x + h(t, x) + \Delta(t, x), \quad \Delta(t, x) \equiv \theta_{t_1}^{s_1}(t) \cdot \theta_{\beta_1}^{2\beta_1}(|x|) \cdot \psi(t, x), \quad t \in [t_0, t_1],$$

где обозначено $h(t, x) \equiv f(t, x) - A(t)x$, $\theta_b^a(\xi) \equiv 1 - \theta_a^b(\xi)$ и

$$\psi(t, x) \equiv \delta_1 \dot{\varphi}(t - t_0)x - h(t, x) + e^{\delta_1 \varphi(t - t_0)} h\left(t, x e^{-\delta_1 \varphi(t - t_0)}\right), \quad C^1(\mathbb{R}) \ni \theta_a^b(\xi) \equiv \begin{cases} 0, & \xi \leqslant a < b; \\ 1, & \xi \geqslant b, \end{cases}$$

продолжение $z_1(t)$, $t \geqslant s_1$, решения $y_1(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant s_1$, также удовлетворяло условию $z_1(t_1) < x_2(t_1)$. Повторим построение неограниченное число раз, увеличивая на каждом шаге все индексы на 1. В результате получим последовательности функций x_i, y_i, z_i, чисел $\varepsilon_i, \delta_i, \gamma_i, \beta_i \to +0$ ($\mathbb{N} \ni i \to +\infty$) и $0 \equiv t_0 < s_1 < t_1 < s_2 < \ldots \to +\infty$, а с ними и возмущенную систему с прежним линейным приближением, поскольку для каждого $\alpha > 0$ и некоторых $N(\alpha) \in \mathbb{N}$, $\rho(\alpha) > 0$ выполняются оценки

$$\delta_i < \alpha, \quad i > N(\alpha), \qquad \eta(\rho) \equiv \sup_{t \in \mathbb{R}_+,\ 0<|x|\leqslant\rho} \frac{|h(t,x)|}{|x|} < \alpha, \quad 0 < \rho \leqslant \rho(\alpha).$$

Отсюда для $|x| \leqslant \min\{\beta_{N(\alpha)}, \rho(\alpha)\}$ при $t \leqslant t_{N(\alpha)}$ получаем, что $\Delta(t,x) = 0$, а при $t > t_{N(\alpha)}$ для некоторого $i > N(\alpha)$ имеем $t \in [t_{i-1}, t_i]$ и

$$|\Delta(t,x)| \leqslant \delta_i|x| + \eta(\rho)|x| + e^{\delta_i\varphi(t-t_{i-1})}\eta(\rho)|x|e^{-\delta_i\varphi(t-t_{i-1})} \equiv (\delta_i + 2\eta(\rho))|x| \leqslant 3\alpha|x|.$$

Полученная система в силу самого построения уже имеет особое решение $u > 0$ (например, с начальным значением $u(0) = x_1(0)$) и, следовательно, обладает ляпуновской асимптотической устойчивостью. Чтобы сделать ее еще и глобальной, выберем некоторое значение $u_0 \in \overline{G}$, мажорирующее на всей полуоси $\mathbb{R}_+$ функцию u (ограниченную), и подправим систему только на отрезке $t \in [0,1]$ (не меняя ее в малой трубке нулевого решения, а также сохраняя для ее правой части нечетность по фазовой переменной и стандартную гладкость (1)) так, чтобы некоторое ее решение v удовлетворяло условиям

$$v(1) = u(1) \leqslant v(+0) \equiv \lim_{t\to+0} v(t) = u_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} v(t).$$

Тогда все решения подправленной системы, начинающиеся на интервале $G' \equiv (-u_0, u_0) \subseteq G$, будут при каждом $t > 0$ принимать значения уже строго между числами $\pm v(t) \to 0$, $t \to +\infty$.

2. Если же каждое из решений $x_i > 0$ ($i \in \mathbb{N}$) новой системы, удовлетворяя второму требованию (2), не удовлетворяет первому требованию (4), т.е. не является перроновски особым, то возмутим эту систему по аналогии с п. 1 настоящего доказательства так, чтобы она обладала перроновской глобальной устойчивостью. В этом построении заменим числа (9) числами

$$\varepsilon_i \geqslant \varliminf_{t\to+\infty} x_i(t) \equiv 2\gamma_i \to +0, \quad i \to +\infty,$$

а предел функции $y_1(t)$ при $t \to +\infty$ в формуле (10) — нижним пределом, причем если решение u окажется неограниченным, то положим $u_0 = +\infty$ (что в приведенном рассуждении позволительно).

Таким образом, установлено, что система (5) не обеспечивает даже частной неустойчивости — перроновской или соответственно ляпуновской (а тем более верхнепредельной).

Последнее сформулированное соотношение уже вытекает из первого строгого включения теоремы 6.

Теорема 7 доказана.

Автор приносит благодарность В. В. Быкову за ценные замечания, способствовавшие значительному улучшению текста статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
2. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
3. *Изобов Н.А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006.
4. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
5. *Сергеев И.Н.* Устойчивость по Перрону и ее исследование по первому приближению // Докл. РАН. 2019. **486**, № 1. 20–23.
6. *Сергеев И.Н.* Ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2020. **56**, № 2. 63–78.
7. *Бондарев А.А., Сергеев И.Н.* Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. **506**. 25–29.

8. *Сергеев И.Н.* Исследование свойств перроновской и ляпуновской устойчивости по первому приближению // Дифференц. уравнения. 2020. **56**, № 1. 84–93.
9. *Сергеев И.Н.* Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. **55**, № 5. 636–646.
10. *Сергеев И.Н.* Зависимость и независимость свойств перроновской и ляпуновской устойчивости от фазовой области системы // Дифференц. уравнения. 2019. **55**, № 10. 1338–1346.
11. *Sergeev I.N.* First approximation study of Lyapunov, Perron and upper-limit stability or instability // Mem. Diff. Equat. and Math. Phys. 2022. **87**. 165–176.
12. *Миллионщиков В.М.* Системы с интегральной разделенностью всюду плотны в множестве всех линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. **5**, № 7. 1167–1170.

Поступила в редакцию
10.01.2023

УДК 517.518+517.982

ОРТОРЕКУРСИВНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПО МОДИФИКАЦИИ СИСТЕМЫ ФАБЕРА–ШАУДЕРА

П. С. Степанянц[1], А. К. Паунов[2]

Рассмотрены орторекурсивные разложения по модификации системы Фабера–Шаудера. Доказана равномерная сходимость разложения к разлагаемой непрерывной функции. Также доказана сходимость разложения к разлагаемой функции в пространствах L_p.

Ключевые слова: орторекурсивное разложение, сходимость, система Фабера–Шаудера, система сжатий и сдвигов.

We consider orthorecursive expansions with respect to modified Faber–Schauder System and demonstrate their uniform convergence to expanded functions in C-space and convergence in Lebesgue spaces.

Key words: orthorecursive expansion, convergence, Faber–Schauder System, system of translates and dilates.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-3

Орторекурсивные разложения являются обобщением ортогональных разложений, сохраняющим основные свойства ортогональных разложений. Орторекурсивные разложения были предложены Т. П. Лукашенко в работах [1, 2]. Приведем определение и основные свойства орторекурсивных разложений [2].

Пусть H — линейное пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — конечная или счетная система ненулевых элементов H.

Определение 1. *Орторекурсивное разложение* элемента $f \in H$ по последовательности элементов $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ осуществляется следующим образом. Положим $r_0 = f$. Если заданы остаток приближения $r_{k-1} \in H$, $k \in \mathbb{N}$, и элемент e_k, то положим $\hat{f}_k = (r_{k-1}, e_k)\|e_k\|^{-2}$, $r_k = r_{k-1} - \hat{f}_k e_k$.

Назовем $\hat{f}_k$ *орторекурсивным коэффициентом Фурье* элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Ряд $\sigma(f) = \sum\limits_k \hat{f}_k e_k$ назовем *орторекурсивным рядом Фурье* элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, а сумму $S_n(f) = \sum\limits_{k\leqslant n} \hat{f}_k e_k$ — *n-й частичной суммой орторекурсивного ряда Фурье*. Вместо термина "орторекурсивный ряд Фурье" будем иногда использовать термин "орторекурсивное разложение".

[1] *Степанянц Петр Суренович* — асп. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: petstep18@gmail.com.

Stepanyants Petr Surenovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis.

[0] *Паунов Александр Константинович* — канд. физ.-мат. наук, инженер-разработчик, WorldQuant, e-mail: paunov.msu@gmail.com.

Paunov Alexander Konstantinovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Quantitative Engineer, WorldQuant.