Математика

УДК 511

ОГРАНИЧЕННОСТЬ СОВОКУПНОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ, РАВНОМЕРНАЯ ПО НАЧАЛЬНОМУ ОТРЕЗКУ

Н. Л. Марголина[1], К. Е. Ширяев[2]

Статья содержит определения некоторых свойств решений линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и доказательство того факта, что эти свойства не одинаковы для неограниченных систем.

Ключевые слова: равномерная устойчивость; остаточная равномерная устойчивость; множество решений, ограниченных равномерно по начальному отрезку.

The paper contains definitions of some properties of solutions to linear systems of ordinary differential equations and proof of the fact that these properties are not the same for unbounded systems.

Key words: uniform stability, residual uniform stability, set of solutions bounded uniformly along the initial segment.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-1

Для любого натурального n рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1}$$

где функция $A\colon \mathbf{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbf{R}^n$ непрерывна или кусочно-непрерывна, $x \in \mathbf{R}^n$. Оператор Коши системы (1) обозначим $X_A(\cdot\,,\cdot)$.

Определение 1 [1]. Система (1) называется *равномерно устойчивой при* $t \to +\infty$, если любое ее решение $x = x(t)$ *равномерно устойчиво*, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого числа $t_0 \geqslant 0$ и произвольного решения $y = y(t)$ этой системы, удовлетворяющего условию $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$, выполнено неравенство $\sup\limits_{t \geqslant t_0} \|y(t) - x(t)\| < \varepsilon$.

Определение 2 [2]. Система (1) называется *остаточно равномерно устойчивой при* $t \to +\infty$, если все решения $x = x(t)$ этой системы *остаточно равномерно устойчивы*, т.е. существует такое число $H > 0$, зависящее только от системы, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любого $t_0 \geqslant 0$ и произвольного решения $y = y(t)$ этой системы, удовлетворяющего условию $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$, имеет место $\sup\limits_{t \geqslant t_0 + H} \|y(t) - x(t)\| < \varepsilon$.

Определение 3. Будем говорить, что система (1) обладает *совокупностью решений, ограниченных равномерно по начальному отрезку*, если существуют такие $H > 0$ и $N > 0$, что для любого решения $x = x(t)$ этой системы и любого числа $t \geqslant 0$ выполняется $\sup\limits_{m \in \mathbf{N}} \|x(t + mH)\| \leqslant N\|x(t)\|$.

В случае интегрально-ограниченной оператор-функции $A(t)$ (т.е. если $\sup\limits_{t \geqslant 0} \int\limits_t^{t+1} \|A(\tau)\| d\tau \leqslant M$, где M — константа) определения 1–3 эквивалентны.

В [2] приведен пример системы с интегрально-неограниченной функцией $A(t)$, обладающей свойством остаточной равномерной устойчивости, но не равномерно устойчивой.

Покажем, что асимптотической устойчивости системы вида (1) недостаточно для того, чтобы она обладала совокупностью решений, ограниченных равномерно по начальному отрезку.

[1] *Марголина Наталия Львовна* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. высшей математики Ин-та физ.-мат. и естеств. наук Костром. гос. ун-та, e-mail: nmargolina@mail.ru.

Margolina Natalia Lvovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Kostroma State University, Institute of Physical, Mathematical and Natural Sciences, Chair of Higher Mathematics.

[2] *Ширяев Кирилл Евгеньевич* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. высшей математики Ин-та физ.-мат. и естеств. наук Костром. гос. ун-та, e-mail: shiryaev4@yandex.ru.

Shiryaev Kirill Evgenievich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Kostroma State University, Institute of Physical, Mathematical and Natural Sciences, Chair of Higher Mathematics.

Рассмотрим функцию

$$a(t) = \begin{cases} (-1)^{k+1}\frac{k}{2}\sin\frac{t}{k}, \text{если } t \in [\pi k(k-1), \pi k^2); \\ (-1)^{k+1}k\sin\frac{t}{k}, \text{если } t \in [\pi k^2, \pi k(k+1)), \end{cases}$$

где $k \in \mathbf{N}$, на полуинтервале $[0, +\infty)$. Там она определена, непрерывна и обладает следующими свойствами.

Лемма 1. *Для функции $a(t)$ справедливы равенства*

$$\int\limits_{\pi k(k-1)}^{\pi k^2} a(\tau)d\tau = k^2, \quad \int\limits_{\pi k^2}^{\pi k(k+1)} a(\tau)d\tau = -2k^2.$$

Доказательство. Непосредственным интегрированием $a(t)$ с использованием периодичности тригонометрических функций получаем

$$\int\limits_{\pi k(k-1)}^{\pi k^2} a(\tau)d\tau = \int\limits_{\pi k(k-1)}^{\pi k^2} (-1)^{k+1}\frac{k}{2}\sin\frac{\tau}{k}d\tau = (-1)^k\frac{k^2}{2}\left(\cos\pi k - \cos\pi(k-1)\right) = k^2.$$

Равенство $\int\limits_{\pi k^2}^{\pi k(k+1)} a(\tau)d\tau = -2k^2$ доказывается аналогично. Лемма доказана.

Следствие 1. *Для функции $a(t)$ выполняется* $\int\limits_{\pi k(k-1)}^{\pi k(k+1)} a(\tau)d\tau = -k^2$.

Доказательство. Используя аддитивность интеграла и лемму 1, получаем

$$\int\limits_{\pi k(k-1)}^{\pi k(k+1)} a(\tau)d\tau = \int\limits_{\pi k(k-1)}^{\pi k^2} a(\tau)d\tau + \int\limits_{\pi k^2}^{\pi k(k+1)} a(\tau)d\tau = -k^2,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Для любого $t \in [\pi k(k-1), \pi k(k+1))$ выполняется* $\int\limits_0^t a(\tau)d\tau \leqslant \frac{-2k^3+9k^2+k}{6}$.

Доказательство. Для любого $t \geqslant 0$ существует число $k \in \mathbf{N}$, такое, что $t \in [\pi k(k-1), \pi k(k+1))$. Докажем следующую цепочку соотношений:

$$\int\limits_0^t a(\tau)d\tau = \int\limits_0^{\pi k(k-1)} a(\tau)d\tau + \int\limits_{\pi k(k-1)}^t a(\tau)d\tau \leqslant \int\limits_0^{\pi k(k-1)} a(\tau)d\tau + k^2 =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1}\int\limits_{\pi j(j-1)}^{\pi j(j+1)} a(\tau)d\tau + k^2 = \sum_{j=0}^{k-1}(-j^2) + k^2 = -\frac{(k-1)k(2k-1)}{6} + k^2 = \frac{-2k^3+9k^2+k}{6}.$$

Первое и второе равенства этой цепочки следуют из аддитивности интеграла. Первое неравенство получаем из оценки $\int\limits_{\pi k(k-1)}^t a(\tau)d\tau \leqslant k^2$, которая обусловлена непрерывностью функции $a(t)$ и ее знакопостоянством на интервалах $(\pi k(k-1), \pi k^2)$ и $(\pi k^2, \pi k(k+1))$. Третье равенство устанавливается по лемме 1, четвертое — с помощью тождества $1^2 + 2^2 + \ldots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$, которое доказывается методом математической индукции.

Лемма 2. *Для любого $t \in [\pi k(k-1), \pi k(k-1) + \frac{\pi k}{2})$ выполняется* $\int\limits_{\pi k(k-1)}^t a(\tau)d\tau \leqslant \frac{k^2}{2}$.

Доказательство. Из непрерывности и неотрицательности функции $a(t)$ на отрезке $[\pi k(k-1), \pi k^2]$ и аддитивности интеграла следует

$$\int\limits_{\pi k(k-1)}^{t} a(\tau)d\tau \leqslant \int\limits_{\pi k(k-1)}^{\pi k(k-1)+\frac{\pi k}{2}} a(\tau)d\tau = (-1)^k \frac{k^2}{2}\cos\frac{\tau}{k}\Big|_{\pi k(k-1)}^{\pi k(k-1)+\frac{\pi k}{2}} = \frac{k^2}{2}.$$

Последние равенства получены непосредственным интегрированием $a(t)$ и использованием периодичности тригонометрических функций. Лемма доказана.

Теорема 1. *Для любого $n \in \mathbf{N}$ существуют системы вида* (1), *асимптотически устойчивые, но не обладающие совокупностью решений, ограниченных равномерно по начальному отрезку.*

Доказательство. При $n = 1$ рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = a(t)x, \tag{2}$$

где функция $a(t)$ определена выше. Для доказательства асимптотической устойчивости вычислим старший показатель Ляпунова уравнения (2). В одномерном случае оператор Коши уравнения (2) имеет вид $X_a(t,\tau) = e^{\int\limits_{\tau}^{t} a(s)ds}$. Подставляя в формулу старшего показателя Ляпунова $X_a(t,0) = e^{\int\limits_{0}^{t} a(\tau)d\tau}$, имеем

$$\lambda_1(a) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln\|X_a(t,0)\|}{t} = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int\limits_0^t a(\tau)d\tau.$$

Для любого $t \geqslant 0$ существует число $k \in \mathbf{N}$, такое, что $t \in [\pi k(k-1), \pi k(k+1))$, тогда $0 < \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{\pi k(k-1)}$. Воспользовавшись свойством верхнего предела и следствием 2 леммы 1, получаем

$$\lambda_1(a) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int\limits_0^t a(\tau)d\tau \leqslant \lim_{k\to+\infty} \frac{-2k^3+9k^2+k}{6\pi(k^2-k)} = -\infty.$$

С помощью равенства $\lambda_1(a) = -\infty$ доказывается асимптотическая устойчивость уравнения (2).

Рассмотрим произвольное решение $x = x(t)$ уравнения (2) с начальной точкой $t_{0k} = \pi k(k-1)$, тогда для любого $t \geqslant t_{0k}$ имеет место $x(t) = X_a(t, t_{0k})x(t_{0k})$ и значит,

$$x(t) = e^{\int\limits_{t_{0k}}^{t} a(s)ds} x(t_{0k}).$$

Зафиксируем произвольное число $H \geqslant 0$. Всегда найдется число $k_0 \in \mathbf{N}$, такое, что $H \leqslant \frac{\pi k}{2}$ при $k \geqslant k_0$. Тогда $t_{0k} + H \in [\pi k(k-1), \pi k(k-1) + \frac{\pi k}{2})$. По лемме 2, учитывая возрастание и положительность экспоненты, получаем для любого $\tau \in [t_{0k}, t_{0k} + H]$, что при $k \geqslant k_0$ выполняется

$$|x(\tau)| = e^{\int\limits_{t_{0k}}^{\tau} a(s)ds} |x(t_{0k})| \leqslant e^{\frac{k^2}{2}}|x(t_{0k})|.$$

Найдем $|x(t_k)|$, где $t_k = \pi k^2$. Используя результаты леммы 1 и свойства нормы, заключаем, что

$$|x(t_k)| = e^{\int\limits_{t_{0k}}^{t_k} a(s)ds} |x(t_{0k})| = e^{k^2}|x(t_{0k})|.$$

Если неравенство $|x(t_k)| \leqslant N|x(\tau)|$, где $\tau \in [t_{0k}, t_{0k} + H]$, выполняется для некоторого положительного N, то верна цепочка

$$e^{k^2}|x(t_{0k})| = |x(t_k)| \leqslant N|x(\tau)| \leqslant Ne^{\frac{k^2}{2}}|x(t_{0k})|.$$

Отсюда получаем, что число $N \geqslant e^{\frac{k^2}{2}}$ и зависит от k, а значит, и от начальной точки решения. Таким образом, уравнение (2) не обладает совокупностью решений, ограниченных равномерно по начальному отрезку.

Построенная система естественным образом обобщается на случай более высокой размерности рассмотрением диагональной системы $\dot{x} = a(t)Ex$, где E — единичная матрица.

Теорема доказана.

Заметим, что остаточно равномерно устойчивая система обладает совокупностью решений, ограниченных равномерно по начальному отрезку. Возникает вопрос о существовании систем, обладающих совокупностью решений, ограниченных равномерно по начальному отрезку, но не являющихся остаточно равномерно устойчивыми.

Рассмотрим функцию

$$b(t) = \begin{cases} \frac{k+1}{2}\sin t, & \text{если } t \in [2\pi k, \pi + 2\pi k); \\ \frac{k+3}{2}\sin t, & \text{если } t \in [\pi + 2\pi k, 2\pi(k+1)), \end{cases}$$

где $k \in \mathbf{N}\bigcup\{\mathbf{0}\}$, на полуинтервале $[0, +\infty)$. Там она определена, непрерывна и обладает следующими свойствами.

Лемма 3. *Справедливы равества*

$$\int\limits_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} b(\tau)d\tau = k+1, \qquad \int\limits_{\pi+2\pi k}^{2\pi(k+1)} b(\tau)d\tau = -(k+3).$$

Доказательство. Непосредственным интегрированием $b(t)$ с использованием периодичности тригонометрических функций получаем

$$\int\limits_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} b(\tau)d\tau = -\frac{k+1}{2}(\cos\pi - \cos 0) = k+1.$$

Равенство $\int\limits_{\pi+2\pi k}^{2\pi(k+1)} b(\tau)d\tau = -(k+3)$ доказывается аналогично. Лемма доказана.

Следствие 3. *Для любых* m, $k \in \mathbf{N}$ *верно равенство* $\int\limits_{2\pi k}^{2\pi(k+m)} b(\tau)d\tau = -2m$.

Доказательство. Используя аддитивность интеграла и лемму 3, получаем

$$\int\limits_{2\pi k}^{2\pi(k+m)} b(\tau)d\tau = \int\limits_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} b(\tau)d\tau + \int\limits_{\pi+2\pi k}^{2\pi(k+1)} b(\tau)d\tau + \ldots + \int\limits_{2\pi(k+m-1)}^{\pi+2\pi(k+m-1)} b(\tau)d\tau + \int\limits_{\pi+2\pi(k+m-1)}^{2\pi(k+m)} b(\tau)d\tau =$$

$$= k+1-(k+3)+\ldots+k+m-(k+m+2) = -2m.$$

Следствие доказано.

Лемма 4. *Выполняется неравенство* $\sup\limits_{t\geqslant 0} \int\limits_{t}^{t+2\pi} b(\tau)d\tau < 0$.

Доказательство. Рассмотрим возможные случаи расположения отрезка $[t, t+2\pi]$ на числовой прямой.

1) $t \in [2\pi k, \pi + 2\pi k)$, тогда $t + 2\pi \in [2\pi(k+1), \pi + 2\pi(k+1))$. Имеем

$$\int\limits_{t}^{t+2\pi} b(\tau)d\tau = \int\limits_{t}^{\pi+2\pi k} b(\tau)d\tau + \int\limits_{\pi+2\pi k}^{2\pi(k+1)} b(\tau)d\tau + \int\limits_{2\pi(k+1)}^{t+2\pi} b(\tau)d\tau =$$

$$= -\frac{k+1}{2}\cos\tau\Big|_{t}^{\pi+2\pi k} - k - 3 - \frac{k+2}{2}\cos\tau\Big|_{2\pi(k+1)}^{t+2\pi} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos t \leqslant -1.$$

Первое равенство этой цепочки следует из аддитивности интеграла, второе получено непосредственным интегрированием и применением леммы 3, третье вытекает из периодичности косинуса, а последнее неравенство — из оценки $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$.

Также справедливо неравенство $\int\limits_t^{t+2\pi} b(\tau)d\tau \geqslant -2$ для $t \in [2\pi k, \pi + 2\pi k)$.

2) $t \in [\pi + 2\pi k, 2\pi(k+1))$, тогда $t + 2\pi \in [\pi + 2\pi(k+1), 2\pi(k+2))$. Аналогично предыдущему пункту

$$\int\limits_t^{t+2\pi} b(\tau)d\tau = \int\limits_t^{2\pi(k+1)} b(\tau)d\tau + \int\limits_{2\pi(k+1)}^{\pi+2\pi(k+1)} b(\tau)d\tau + \int\limits_{\pi+2\pi(k+1)}^{t+2\pi} b(\tau)d\tau =$$

$$= -\frac{k+3}{2}\cos\tau\Big|_t^{2\pi(k+1)} + k + 2 - \frac{k+4}{2}\cos\tau\Big|_{\pi+2\pi(k+1)}^{t+2\pi} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos t \leqslant -1.$$

Кроме того, для $t \in [\pi + 2\pi k, 2\pi(k+1))$ также верно неравенство $\int\limits_t^{t+2\pi} b(\tau)d\tau \geqslant -2$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Для любого $n \in \mathbf{N}$ существуют системы вида* (1), *не являющиеся остаточно равномерно устойчивыми, но обладающие совокупностью решений, ограниченных равномерно по начальному отрезку.*

Доказательство. При $n = 1$ возьмем уравнение

$$\dot{x} = b(t)x, \tag{3}$$

где функция $b(t)$ определена выше.

Будем рассматривать решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = b(t)x, \\ x(t_{0k}) = 0, \end{cases}$$

где $t_{0k} = 2\pi k,\ k \in \mathbf{N}\bigcup\{\mathbf{0}\}$. Пусть $y = y(t)$ — какое-нибудь другое решение уравнения (3) с начальной точкой t_{0k}, тогда для любого числа $t \geqslant t_{0k}$ верно $y(t) = X_b(t, t_{0k})y(t_{0k})$. В одномерном случае оператор Коши уравнения (3) имеет вид

$$X_b(t,\tau) = e^{\int\limits_\tau^t b(s)ds},$$

откуда следует, что

$$y(t) = e^{\int\limits_{t_{0k}}^t b(s)ds} y(t_{0k}).$$

Найдем $y(t_{k+m})$, где $t_{k+m} = \pi + 2\pi(k+m),\ m \in \mathbf{N}\bigcup\{\mathbf{0}\}$. Используя результаты леммы 3 и следствие 3, получаем

$$y(t_{k+m}) = e^{\int\limits_{t_{0k}}^{t_{k+m}} b(s)ds} y(t_{0k}) = e^{-2m+k+m+1}y(t_{0k}) = e^{k-m+1}y(t_{0k}).$$

По свойству нормы $|y(t_{k+m})| = e^{k-m+1}|y(t_{0k})|$. Зафиксируем произвольное число $H > 0$. Всегда существует число $m_0 \in \mathbf{N}$, такое, что $H < 2\pi m$ при $m \geqslant m_0$. Тогда $t_{0k} + H < t_{k+m}$. Однако, положив $k = 2m$, при $m \geqslant m_0$ получим $|y(t_{3m})| = e^{m+1}|y(t_{0\,2m})|$.

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ невозможно найти положительное число δ, чтобы при всех натуральных m выполнялось $\|y(t_{3m})\| < \varepsilon$, если $\|y(t_{0\,2m})\| < \delta$. Число δ будет зависеть от m, а значит, и от начальной точки решения. Таким образом, тривиальное решение уравнения (3) не является остаточно равномерно устойчивым, а значит, и само уравнение (3) не является остаточно равномерно устойчивым [2].

Будем рассматривать произвольное решение $x = x(t)$ уравнения (3). Для любых $t \in [0, +\infty),\ m \in \mathbf{N}$ имеем $x(t + 2\pi m) = e^{\int\limits_t^{t+2\pi m} b(s)ds} x(t)$. По лемме 4 получаем $\int\limits_t^{t+2\pi m} b(s)ds < 0$, значит, $e^{\int\limits_t^{t+2\pi m} b(s)ds} < 1$.

Тогда $|x(t+2\pi m)| < |x(t)|$. Таким образом, уравнение (3) обладает совокупностью решений, ограниченных равномерно по начальному отрезку $[t_0, t_0+2\pi]$, где $t_0 \in [0, +\infty)$.

Построенная система естественным образом обобщается на случай более высокой размерности рассмотрением диагональной системы $\dot{x} = b(t)Ex$, где E — единичная матрица. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1966.
2. *Margolina N.L.* On the residual uniform stability of linear systems with unbounded coefficients // J. Math. Sci. 2015. **207**, N 5. 245–246.

Поступила в редакцию
08.09.2022

УДК 517.925.5

КЛАССЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ УСТОЙЧИВОСТИ ИЛИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

И. Н. Сергеев[1]

Изучаются отношения (включения, совпадения, несовпадения) между классами линейных приближений, обеспечивающих различные свойства ляпуновской, перроновской и верхнепредельной устойчивости или неустойчивости (от глобальной до частной) нулевого решения дифференциальной системы произвольного порядка. Представлен полный набор несовпадающих классов устойчивости и приведены некоторые соображения для аналогичного описания классов неустойчивости.

Ключевые слова: дифференциальная система, нелинейная система, линейное приближение, устойчивость по первому приближению, устойчивость по Ляпунову, устойчивость по Перрону, верхнепредельная устойчивость.

Relationships (inclusions, coincidences, non-coincidences) between classes of linear approximations that provide various properties of Lyapunov, Perron, and upper-limit stability or instability (from global to particular) of the zero solution to a differential system of arbitrary order are studied. A complete set of non-coinciding stability classes is presented and some considerations are given for a similar description of instability classes.

Key words: differential system, nonlinear system, linear approximation, stability in the first approximation, Lyapunov stability, Perron stability, upper-limit stability.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-2

Введение. Важнейшим в теоретическом и прикладном плане свойством решений дифференциальных уравнений и систем является их *устойчивость по Ляпунову* (см. [1, §1], а также, к примеру, [2–4]). Исследованию устойчивости *по первому приближению* [2, §12], составляющему суть *первого метода Ляпунова*, посвящено огромное число публикаций (см. [3, §11]).

В настоящей работе изучаются классы линейных приближений, обеспечивающих самые разные свойства, стоящие в одном ряду с устойчивостью по Ляпунову и тесно связанные с ней, но лишь недавно введенные [5–11]. Сюда относятся *устойчивость по Перрону* [5] и *верхнепредельная устойчивость* [6], а также различные вариации этих свойств, как усиленные (асимптотическая или глобальная), так и ослабленные (частичная или частная), равно как и свойства неустойчивости, служащие отрицаниями соответствующих свойств устойчивости.

[1] *Сергеев Игорь Николаевич* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. дифференциальных уравнений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: igniserg@gmail.com.

Sergeev Igor Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Equations.