

2. *Giambruno A., Zaicev M.* Codimension growth of special simple Jordan algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 2010. **362**. 3107–3123.
3. *Giambruno A., Zaicev M.* On codimension growth of finitely generated associative algebras // Adv. Math. 1998. **140**. 145–155.
4. *Giambruno A., Zaicev M.* Exponential codimension growth of PI-algebras: an exact estimate // Adv. Math. 1999. **142**. 221–243.
5. *Зайцев М.В.* Целочисленность экспонент роста тождеств конечномерных алгебр Ли // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. **66**. 23–48.
6. *Giambruno A., Zaicev M.* Polynomial Identities and Asymptotic Methods // Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 122. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2005.
7. *Джеймс Г.* Теория представлений симметрических групп. М.: Наука, 1982.
8. *Зайцев М.В., Мищенко С.П.* Тождества супералгебр Ли с нильпотентным коммутантом // Алгебра и логика. 2008. **47**. 617–645.

Поступила в редакцию
06.07.2022

УДК 532.591, 531.5.031

МЕТОД РАЗРЫВНЫХ СМЕЩЕНИЙ, УЧИТЫВАЮЩИЙ НАЛИЧИЕ КРИВИЗНЫ ТРЕЩИНЫ

А. В. Звягин¹, Д. Д. Новов²

Статья посвящена разработке численного метода определения коэффициента интенсивности напряжений для плоских задач механики разрушения, учитывающего наличие кривизны линии трещины. Получены новые представления бигармонических функций, с помощью которых были построены аналитические решения задач об упругой плоскости, ослабленной трещиной в виде дуги окружности. На основе этих решений реализован численный метод. Проведено сравнение численного значения коэффициента интенсивности напряжений с известным аналитическим.

Ключевые слова: механика разрушения, механика трещин, криволинейная трещина, метод граничных элементов, метод разрывных смещений, коэффициент интенсивности напряжений.

The paper is devoted to the development of the displacement discontinuity method for plane problems of fracture mechanics in consideration of the curvature of crack lines. In this paper, some new representations of biharmonic functions are found. This is necessary to obtain the analytical solutions of problems for an elastic plane weakened by a crack in the form of a circle arc. A numerical method is proposed on the basis of these analytical solutions. The numerical values of the stress intensity factor are compared with its known analytical value.

Key words: fracture mechanics, crack mechanics, curvilinear crack, boundary element method, displacement discontinuity method, stress intensity factor.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-12

1. Введение. Задачи, связанные с трещинами, представляют особый интерес и находят практическое применение при строительстве зданий и сооружений, в геомеханике горных пластов, при поиске и разработке месторождений полезных ископаемых, оценке последствий горных ударов и землетрясений.

¹ *Звягин Александр Васильевич* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. газовой и волновой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: zvyagin.aleksandr2012@yandex.ru.

Zvyagin Alexander Vasil'evich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Gas and Wave Dynamics.

² *Новов Денис Дмитриевич* — асп. каф. газовой и волновой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: novovden@yandex.ru.

Novov Denis Dmitrievich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Gas and Wave Dynamics.

В плоских задачах трещина в общем случае моделируется отрезком кривой, на которой вектор перемещения имеет разные значения при подходе к ней по нормали с разных сторон (два берега трещины). Задачам с трещинами присуща чрезвычайная нерегулярность границ областей, отвечающих изучаемым объектам, так что при их количественном исследовании трудно рассчитывать на получение аналитических результатов и решения, как правило, приходится так или иначе искать численно. Наиболее распространенные численные методы основываются либо на достаточно мелком подразбиении изучаемой области путем введения линейных сеток с неизвестными значениями переменных в узлах, как в конечно-разностных методах, либо с помощью разбиения области на большое число дискретных элементов простой структуры, как в методах конечных элементов [1, 2].

В настоящей работе представлен численный метод, позволяющий решать статические задачи механики разрушения для упругой среды с криволинейными трещинами. Он дает возможность определить поля перемещений и напряжений, а также коэффициенты интенсивности напряжений для плоских задач механики разрушения с учетом кривизны трещин, благодаря чему удается получить более гладкую аппроксимацию границы. Это отличает приводимый подход от используемой в настоящее время кусочно-прямолинейной аппроксимации криволинейной границы [1–4].

Основой метода является метод разрывных смещений [1, 4], заключающийся в применении новых базовых задач теории упругости. На элементы разбивается только граница рассматриваемой области. Численное решение строится с помощью полученных предварительно аналитических решений для базовых сингулярных задач таким образом, чтобы удовлетворить заданным граничным условиям в центре каждого элемента. Применяемый метод не требует разбиения сеткой самой области. Это позволяет фактически снизить размерность задачи [1].

2. Математическая постановка задачи. Под трещиной понимается кривая, вдоль которой имеет место разрыв поля перемещений. В задаче рассматривается бесконечная упругая плоскость с трещиной в виде дуги окружности заданного радиуса при отсутствии массовых сил. Трещина находится под действием внутреннего давления. Введем декартову систему координат (x, y) таким образом, чтобы центр окружности находился в начале координат, а середина трещины — в точке $(1; 0)$. Дополнительно введем полярную систему координат (r, θ) :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Через $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}, \sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}$ обозначим компоненты тензора напряжений, через u_x, u_y, u_r, u_θ — компоненты вектора перемещений. Будем использовать упругие постоянные $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, где ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга.

Задачи статики теории упругости описываются уравнениями равновесия, которые можно записать в перемещениях:

$$\begin{aligned} \mu \Delta u_x + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) &= 0, \\ \mu \Delta u_y + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь Δ — плоский оператор Лапласа. Известно, что компоненты вектора перемещений в таких задачах являются бигармоническими функциями [5]. Для решения задачи требуется определить бигармонические функции u_x, u_y , удовлетворяющие уравнениям равновесия (1) вдали от трещины и граничным условиям на трещине:

$$r = 1, \quad \theta \in [-\alpha; \alpha] : \sigma_{nn} = \sigma_{rr} = -p_0, \quad \sigma_{n\tau} = \sigma_{r\theta} = 0.$$

Метод разрывных смещений основан на представлении решения исходной задачи в виде суммы решений базовых задач. В качестве базовых рассмотрим задачи об упругой плоскости, ослабленной трещиной в виде дуги окружности. Эти задачи описываются теми же дифференциальными уравнениями, что и исходная задача. Граничные условия в задаче I состоят в том, что на берегах трещины есть единичный скачок нормального перемещения и отсутствует касательное напряжение. Граничные условия в задаче II состоят в том, что на берегах трещины есть единичный скачок касательного перемещения и отсутствует нормальное напряжение [4].

3. Решение базовых задач. *Задача I.* Использование классического представления Треффца [5] бигармонической функции через две гармонические

$$u_x^I = \Psi + (r^2 - 1) \Phi_x, \quad u_y^I = (r^2 - 1) \Phi_y$$

не привело к получению решения задачи с трещиной в виде дуги окружности. Его можно применить только для прямолинейных трещин. Вместо этого представления будем использовать новое представление

$$u_x^I = x\Psi + (r^2 - 1)\Phi_x, \quad u_y^I = y\Psi + (r^2 - 1)\Phi_y. \quad (2)$$

Здесь $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \Phi_x$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \Phi_y$. Подстановка перемещений (2) в уравнения равновесия (1) и последующее интегрирование приводят к уравнению для нахождения функции $\Phi(r, \theta)$, если известна гармоническая функция $\Psi(r, \theta)$:

$$\mu(2\Psi + 4r\Phi_r) + (\lambda + \mu)(2\Psi + r\Psi_r + 2r\Phi_r) = 0. \quad (3)$$

Здесь $\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \Phi_r$, $\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \Psi_r$. Уравнение (3) имеет аналитическое решение, позволяющее выразить все необходимые производные для перемещений и напряжений:

$$\Phi(r, \theta) = -m \int_1^r \frac{\Psi(t, \theta)}{t} dt - n\Psi(r, \theta), \quad m = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 3\mu}, \quad n = \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 3\mu)}. \quad (4)$$

Функция $\Phi(r, \theta)$, задаваемая формулой (4), будет гармонической в силу гармоничности функции $\Psi(r, \theta)$. В качестве гармонической функции $\Psi(r, \theta)$ нам нужна функция, терпящая разрыв на границе, а именно потенциал двойного слоя. Для дуги окружности $-\alpha < \theta < \alpha$ с постоянной плотностью потенциала D_r он имеет аналитическое выражение:

$$2\pi\Psi(r, \theta) = D_r \left(\alpha - \arctan\left(\frac{1+r}{1-r} \tan\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)\right) - \arctan\left(\frac{1+r}{1-r} \tan\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\right) \right). \quad (5)$$

Наконец, перемещения и напряжения в задаче I в полярной системе координат выражаются аналитически через функции $\Phi(r, \theta)$ и $\Psi(r, \theta)$ и их производные:

$$\begin{aligned} u_r^I &= r\Psi + (r^2 - 1)\Phi_r, \\ u_\theta^I &= (r^2 - 1)\frac{1}{r}\Phi_\theta, \\ \frac{\sigma_{rr}^I}{\mu} &= 2\left(\frac{\lambda}{\mu} + 1\right)\Psi + \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right)r\Psi_r + 2\left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right)r\Phi_r + 2(r^2 - 1)\Phi_{rr}, \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}^I}{\mu} &= 2\left(\frac{\lambda}{\mu} + 1\right)\Psi + \frac{\lambda}{\mu}r\Psi_r + 2\frac{\lambda}{\mu}r\Phi_r - 2(r^2 - 1)\Phi_{rr}, \\ \frac{\sigma_{r\theta}^I}{\mu} &= \Psi_\theta + 2\frac{1}{r^2}\Phi_\theta + 2(r^2 - 1)\frac{1}{r}\Phi_{r\theta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Задача II. Аналогично решению задачи I воспользуемся еще одним новым представлением би-гармонических функций перемещений:

$$u_x^{II} = -y\Psi + (r^2 - 1)\Phi_y, \quad u_y^{II} = x\Psi - (r^2 - 1)\Phi_x.$$

Как и в задаче I, получаем аналитическое выражение функции $\Phi(r, \theta)$ через функцию $\Psi(r, \theta)$:

$$\Phi(r, \theta) = k \int_1^r \frac{\Psi(t, \theta)}{t} dt - n\Psi(r, \theta), \quad k = \frac{\mu}{\lambda + 3\mu}, \quad n = \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 3\mu)}.$$

Перемещения и напряжения в задаче II в полярной системе координат выражаются аналитически через функции $\Phi(r, \theta)$ и $\Psi(r, \theta)$ ($\Psi(r, \theta)$ — потенциал двойного слоя с постоянной плотностью D_θ) и их производные:

$$\begin{aligned} u_r^{II} &= (r^2 - 1)\Phi_\theta, \quad u_\theta^{II} = r\Psi - (r^2 - 1)\frac{1}{r}\Phi_r, \\ \frac{\sigma_{rr}^{II}}{\mu} &= \left(\left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right) \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \right) \Psi_\theta + 2(r^2 - 1)\frac{1}{r}\Psi_{r\theta}, \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}^{II}}{\mu} &= \left(\left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right) + \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right) \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{\lambda}{\mu} \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) \right) \Psi_\theta - 2(r^2 - 1)\frac{1}{r}\Psi_{r\theta}, \\ \frac{\sigma_{r\theta}^{II}}{\mu} &= r\Psi_r + \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \Psi_{\theta\theta} - 2r\Phi_r - (r^2 - 1)\Phi_{rr} + (r^2 - 1)\frac{1}{r}\Phi_r. \end{aligned} \quad (7)$$

4. Реализация метода и результаты расчетов. На основе полученных решений (6) и (7) был реализован численный метод разрывных смещений, учитывающий наличие кривизны линии трещины. Трещина заменяется набором N граничных элементов в виде дуг окружности заданного раствора 2α . Искомыми величинами являются плотности D_r и D_θ элемента. Для каждого элемента вводится своя локальная система координат (x^*, y^*) таким образом, чтобы центр окружности находился в начале координат, а середина элемента — в точке $(1; 0)$. Для выбранного граничного элемента формулы (5)–(7) позволяют вычислить любую необходимую величину (напряжение или перемещение).

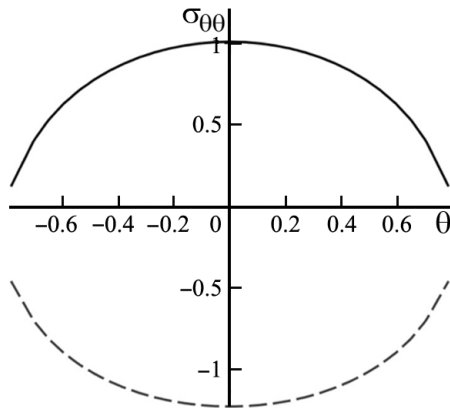


Рис. 1. Напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ на берегах трещины: сплошная кривая — верхний берег, пунктир — нижний

В результате расчетов (рис. 1) было выяснено, что напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ различны по знаку на нижнем и верхнем берегах, что физически ожидаемо. Это отличает наш подход от обычного метода разрывных смещений, в котором криволинейная трещина моделируется набором прямолинейных трещин.

Характерной чертой задач линейной механики разрушения является наличие особенностей вблизи краев трещины. Напряжения в окрестности края трещины имеют особенность $\sigma \sim \frac{C}{\sqrt{s}}$, где s — расстояние от края трещины на ее продолжении вдоль касательной до рассматриваемой точки. Величина $K_I = \lim_{s \rightarrow 0} \sigma_{rr}(s) \sqrt{2\pi s}$ называется коэффициентом интенсивности напряжений (КИН). Определение КИН является основной задачей линейной механики разрушения.

Для верификации расчета КИН предложенным методом была решена задача об одноосном растяжении упругой плоскости, ослабленной трещиной в виде четверти окружности (рис. 2, а). При этом на берегах трещины вектор напряжений равен нулю. Сравнение численного расчета КИН в наиболее опасной концевой точке (на продолжении трещины вдоль касательной, обведена на рис. 2) с известным аналитическим решением (рис. 2, б) показывает, что метод работает корректно. При разбиении трещины на 29 элементов различие составило 2%.

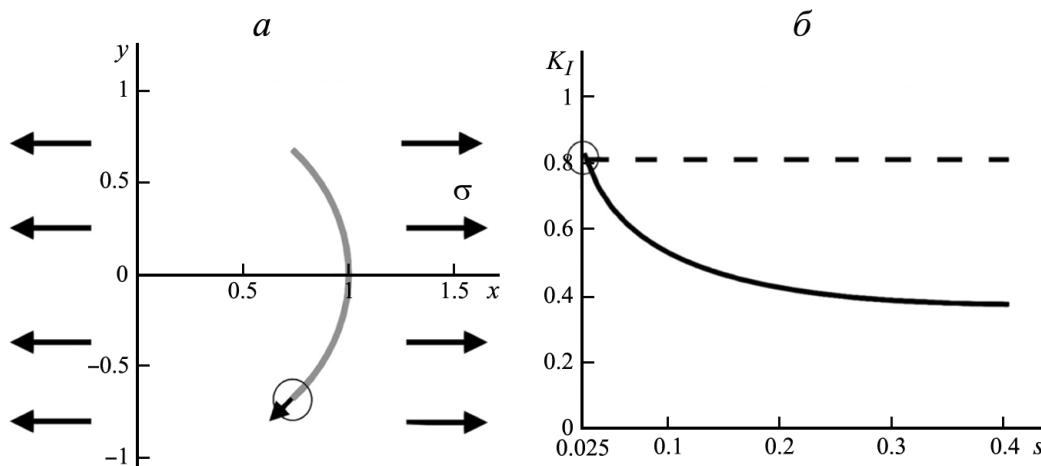


Рис. 2. Трещина в виде дуги окружности (а); асимптотика КИН на продолжении трещины вдоль касательной: сплошная кривая — результаты расчетов, выполненных в настоящей работе, пунктир — результаты из справочника [6] (б)

5. Заключение. Представлена авторская программа кодов, реализующая метод разрывных смещений, учитывающий наличие кривизны линии границы. Это стало возможным благодаря на-

хождению новых аналитических решений задач теории упругости с трещиной в виде дуги окружности. Результаты расчетов показывают удовлетворительное совпадение с теорией, что открывает возможность дальнейшего развития данного метода для задач с более сложной системой трещин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987.
2. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.
3. Мухомелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
4. Рахматуллин Х.А., Шемякин Е.А., Демьянов Ю.А., Звягин А.В. Прочность и разрушение при кратковременных нагрузках. М.: Университетская книга; Логос, 2008.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
6. Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т. Т. 1 / Пер. с англ. М.: Мир, 1990.

Поступила в редакцию
23.09.2022