СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
2. *Levin J.J.* The asymptotic behavior of the solution of a Volterra equation // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. **14**. 534–541.
3. *Винокуров В.Р.* Асимптотическое поведение решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1967. **3**, № 10. 1732–1744.
4. *Levin J.J.* Nonlinear Volterra equation not of convolution type // J. Diff. Equat. 1968. **4**. 176–186.
5. *Burton T.A.* Volterra Integral and Differential Equations. N.Y. a.o.: Acad. Press, 1983.
6. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. Бишкек: Илим, 2002.
7. *Мартынюк А.А., Като Д., Шестаков А.А.* Устойчивость движения: метод предельных уравнений. Киев: Наукова думка, 1990.
8. *Кордуняну К.* Применение дифференциальных неравенств в теории устойчивости // An. sti. Univ. Iasi. Sec. 1. A. 1960. **6**. 47–58.
9. *Wazewski T.* Systemes des equations et des inequalites differentielles ordinaires aux deuxiemes membres monotones et leurs applications // Ann. soc. math. Pol. 1950. **23**. 112–166.
10. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости / Пер. с англ., под ред. В. В. Румянцева. М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию
08.07.2022

УДК 512.572

МАКСИМАЛЬНЫЕ PI-ЭКСПОНЕНТЫ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР

М. В. Зайцев[1]

В статье построена серия примеров конечномерных алгебр, у которых PI-экспонента совпадает с размерностью. При этом все эти алгебры не являются простыми.

Ключевые слова: тождества, коразмерности, неассоцативные алебры, PI-экспонента.

We construct a series of examples of finite-dimensional algebras such that their PI-exponent coincides with the dimension. All these algebras are not simple.

Key words: identities, codimensions, nonassociative algebras, PI-exponent.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-11

Пусть F — поле нулевой характеристики и A — алгебра над F. С алгеброй A связана целочисленная последовательность $c_n(A)$, $n = 1, 2, \dots$, которая характеризует количество ее полиномиальных тождеств. Известно, что если A конечномерна, $\dim A = d$, то члены этой последовательности удовлетворяют соотношению

$$0 \leqslant c_n(A) \leqslant d^{n+1} \tag{1}$$

(см. [1, 2]), что позволяет определить пределы

$$\overline{\exp}(A) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}, \quad \underline{\exp}(A) = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)},$$

называемые верхней и нижней PI-экспонентами алгебры A соответственно, и можно определить (обычную) PI-экспоненту

$$\exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)},$$

[1] *Зайцев Михаил Владимирович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. высшей алгебры мех.-мат. ф-та МГУ. e-mail: zaicevmv@mail.ru.

Zaicev Mikhail Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Higher Algebra.

если $\overline{\exp}(A) = \underline{\exp}(A)$. В конце прошлого века Ш. Амицур предположил, что для любой ассоциативной PI-алгебры A PI-экспонента $\exp((A)$ существует и является целым числом. Гипотеза Амицура была подтверждена в [3, 4]. При этом оказалось, что в случае алгебраически замкнутого поля и конечномерности A равенство $\exp(A) = \dim A$ выполняется тогда и только тогда, когда A проста. Аналогичный эффект наблюдается и в лиевском случае: если L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем, то $\exp(L)$ существует и является целым числом, не превосходящим $\dim L$, а равенство $\exp(L) = \dim L$ эквивалентно простоте алгебры L [5].

Упомянутые результаты позволяют поставить следующий вопрос: верно ли что если A — конечномерная алгебра, $\dim A = d$ и $\exp(A) = d$, то A проста? В данной работе получен отрицательный ответ на поставленный вопрос. Все необходимые сведения по количественной PI-теории можно найти в монографии [6].

Введем необходимые понятия и обозначения. Пусть $F\{X\}$ — абсолютно свободная алгебра над полем F с бесконечным множеством порождающих X. Совокупность всех тождественных соотношений алгебры A образует идеал $\mathrm{Id}(A)$ в $F\{X\}$. Обозначим через P_n подпространство полилинейных многочленов от свободных порождающих $x_1, \ldots, x_n \in X$ в $F\{X\}$. Тогда $P_n \cap \mathrm{Id}(A)$ — это множество всех полилинейных тождеств степени n алгебры A.

Симметрическая группа S_n действует на P_n следующим образом:

$$\sigma \circ f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{(n)}).$$

Подпространство $P_n \cap \mathrm{Id}(A)$ инвариантно относительно действия S_n, что позволяет рассматривать индуцированное действие этой группы на факторпространстве

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}.$$

Упомянутая ранее последовательность коразмерностей $c_n(A)$ определяется как

$$c_n(A) = \dim P_n(A).$$

Верхнюю оцеку роста $c_n(A)$ для любой алгебры A дает, например, формула (1), а для получения нижних оценок мы будем использовать структуру FS_n-модуля $P_n(A)$.

Напомним строение неприводимых представлений группы S_n (см., например, [7]). Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \vdash n$ — разбиение числа n, т.е. $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_d > 0$ — целые числа и $\lambda_1 + \ldots + \lambda_d = n$. Диаграммой Юнга D_λ называется таблица из n клеток с λ_1 клетками в первой строке, λ_2 клетками во второй строке и т.д. Таблицей Юнга T_λ называют диаграмму Юнга D_λ с расставленными в ее клетках числами $1, 2, \ldots, n$. Стабилизатором строк R_{T_λ} называется подгруппа в S_n, состоящая из подстановок, переставляющих числа только в пределах строк таблицы R_{T_λ}. Аналогично стабилизатор столбцов C_{T_λ} состоит из $\sigma \in S_n$, переставляющих числа только в пределах столбцов. Элемент группового кольца

$$e_{T_\lambda} = \Bigg(\sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma\Bigg)\Bigg(\sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \tau\Bigg)$$

является квазиидемпотентом и порождает минимальный левый идеал, т.е. $FS_n e_{T_\lambda}$ — неприводимый S_n-модуль. Размерность $FS_n e_{T_\lambda}$ можно вычислять при помощи формулы крюков (см., например, [7] или [6]). Нам понадобится только нижняя оценка для разбиений специального вида. Пусть $n = kd$ (при фиксированном d и произвольном k), и пусть $\lambda = (k^d) = (\underbrace{k, \ldots, k}_{d})$. Из формулы крюков следует, что

$$d_\lambda = \dim FS_n e_{T_\lambda} \geqslant \frac{n!}{((k+d)!)^d} \geqslant \frac{n!}{(k!)^d} \geqslant \frac{n!}{n^{d^2}(k!)^d}.$$

Обобщенный биномиальный коэффициент можно оценить следующим образом:

$$\frac{n!}{(k!)^d} = \binom{n}{k, \ldots, k} \geqslant \frac{d^n}{(n+1)^d},$$

откуда следует, что

$$d_\lambda \geqslant \frac{1}{(n+1)^d} d^n. \tag{2}$$

Перейдем к построению основных конструкций. Пусть $m \geqslant 2$ — целое число и A_m — пространство с базисом $b, a_1, \dots, a_m$. Зададим умножение на A_m следующим образом:

$$b^2 = b, \quad ba_1 = a_1, \quad a_1^2 = a_1, \quad a_i a_{i+1} = a_{i+1} \ \ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant m-2, \quad a_{m-1}a_m = a_1$$

при нечетном m. При четном m дополнительно положим $bba_2 = a_1$. Все остальные произведения предполагаются равными нулю.

Условимся использовать следующие обозначения. Во-первых, будем опускать скобки в левонормированных произведениях, т.е. $xyz = (xy)z$, $xy \dots zt = (xy \dots z)t$. Во-вторых, при альтернировании по некоторому набору аргументов в (неассоциативном) произведении мы будем ставить один и тот же символ над этими аргументами. Например,

$$\bar{x}y\bar{z} = xyz - zyx, \quad (\bar{x}\widetilde{y})(\widetilde{x}\bar{z}) = (xy)(xz) - (zy)(xx) - (xx)(yz) + (zx)(yx).$$

Рассмотрим сначала алгебру A_m с нечетным m. Тогда $\bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_m = a_1a_2 \dots a_m + a_2 \dots a_m a_1 + a_3 \dots a_m a_1 a_2 + \dots + a_m a_1 \dots a_{m-1} = a_1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}$, $a_1(\bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_m) = 2a_1 + a_2$, откуда $(\bar{b}b)(\bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_m) = (bb)(\bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_m) = 2a_1$ и $(\widetilde{b}(\bar{b}b))(\bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_m)(\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2 \dots \widetilde{a}_m) = 4a_1$.

Обозначим $f_1 = (\bar{b}b)(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m)$, $f_t = (\widetilde{b}f_{t-1})(\widetilde{a}_1 \dots \widetilde{a}_m)$ для $t \geqslant 2$. Тогда

$$f_t = 2^t a_1 \neq 0. \tag{3}$$

Положим

$$h_1' = (\bar{x}_0^{(1)}y)(\bar{x}_1^{(1)} \dots \bar{x}_m^{(1)}), \quad h_2' = (\widetilde{x}_0^{(2)}h_1')(\widetilde{x}_1^{(2)} \dots \widetilde{x}_m^{(2)}), \dots, h_t' = (\hat{x}_0^{(t)}h_{t-1}')(\hat{x}_1^{(t)} \dots \hat{x}_m^{(t)})$$

в алгебре $F\{X\}$ и

$$h_j = \mathrm{Symm}_0 \mathrm{Symm}_1 \dots \mathrm{Symm}_m(h_j'),$$

где Symm_j означает симметризацию по набору $x_1^{(j)}, \dots, x_m^{(j)}$. Соотношение (3) означает, что $\varphi(h_t) \neq 0$, где φ — подстановка:

$$\varphi : y \to b, \ x_0^{(i)} \to a_1, \dots, x_m^{(i)} \to a_m, \ 1 \leqslant i \leqslant t,$$

т.е. h_t не является тождеством алгебры A_m.

Рассмотрим действие S_n на P_{n+1}, где $n = (m+1)t$, а группа S_n действует на переменные $x_j^{(i)}$, $0 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant i \leqslant t$.

Из строения квазиидемпотентов группового кольца группы S_n следует, что h_t порождает в P_{n+1} неприводимый FS_n-модуль, соответствующий разбиению $\lambda = ((m+1)^t)$. Следовательно,

$$c_{n+1}(A) = \dim P_{n+1}(A) \geqslant \frac{(m+1)^d}{(n+1)^{(m+1)^2+m+1}},$$

как вытекает из (2). Стандартные рассуждения (см., например, [8]) дают нижнюю оценку

$$\underline{\exp}(A_m) \geqslant m + 1 = \dim A_m \tag{4}$$

для нечетных m.

Для четных $m \geqslant 4$ те же рассуждения, только с заменой (3) на соотношение $f_t = a_1 \neq 0$, дают нам такую же нижнюю оценку (4). Учитывая (1), мы получаем следующее утверждение.

Теорема. *Для всех целых $m \geqslant 3$ выполняются равенства*

$$\exp(A_m) = m + 1 = \dim A_m.$$

Заметим, что ни одна из алгебр A_m не является простой. Например, подпространство $< a_1, \dots, a_m >$ — идеал коразмерности один.

Работа поддержана Российским научным фондом, грант № 22–11–00052.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bahturin Yu., Drensky V.* Graded polynomial identities of matrices // Linear Algebra Appl. 2002. **357**. 15–34.

2. *Giambruno A., Zaicev M.* Codimension growth of special simple Jordan algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 2010. **362**. 3107–3123.
3. *Giambruno A., Zaicev M.* On codimension growth of finitely generated associative algebras // Adv. Math. 1998. **140**. 145–155.
4. *Giambruno A., Zaicev M.* Exponential codimension growth of PI-algebras: an exact estimate // Adv. Math. 1999. **142**. 221–243.
5. *Зайцев М.В.* Целочисленность экспонент роста тождеств конечномерных алгебр Ли // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. **66**. 23–48.
6. *Giambruno A., Zaicev M.* Polynomial Identities and Asymptotic Methods // Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 122. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2005.
7. *Джеймс Г.* Теория представлений симметрических групп. М.: Наука, 1982.
8. *Зайцев М.В., Мищенко С.П.* Тождества супералгебр Ли с нильпотентным коммутантом // Алгебра и логика. 2008. **47**. 617–645.

Поступила в редакцию
06.07.2022

УДК 532.591, 531.5.031

МЕТОД РАЗРЫВНЫХ СМЕЩЕНИЙ, УЧИТЫВАЮЩИЙ НАЛИЧИЕ КРИВИЗНЫ ТРЕЩИНЫ

А. В. Звягин[1], Д. Д. Новов[2]

Статья посвящена разработке численного метода определения коэффициента интенсивности напряжений для плоских задач механики разрушения, учитывающего наличие кривизны линии трещины. Получены новые представления бигармонических функций, с помощью которых были построены аналитические решения задач об упругой плоскости, ослабленной трещиной в виде дуги окружности. На основе этих решений реализован численный метод. Проведено сравнение численного значения коэффициента интенсивности напряжений с известным аналитическим.

Ключевые слова: механика разрушения, механика трещин, криволинейная трещина, метод граничных элементов, метод разрывных смещений, коэффициент интенсивности напряжений.

The paper is devoted to the development of the displacement discontinuity method for plane problems of fracture mechanics in consideration of the curvature of crack lines. In this paper, some new representations of biharmonic functions are found. This is necessary to obtain the analytical solutions of problems for an elastic plane weakened by a crack in the form of a circle arc. A numerical method is proposed on the basis of these analytical solutions. The numerical values of the stress intensity factor are compared with its known analytical value.

Key words: fracture mechanics, crack mechanics, curvilinear crack, boundary element method, displacement discontinuity method, stress intensity factor.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-12

1. Введение. Задачи, связанные с трещинами, представляют особый интерес и находят практическое применение при строительстве зданий и сооружений, в геомеханике горных пластов, при поиске и разработке месторождений полезных ископаемых, оценке последствий горных ударов и землетрясений.

---

[1] *Звягин Александр Васильевич* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. газовой и волновой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: zvyagin.aleksandr2012@yandex.ru.

Zvyagin Alexander Vasil'evich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Gas and Wave Dynamics.

[2] *Новов Денис Дмитриевич* — асп. каф. газовой и волновой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: novovden@yandex.ru.

Novov Denis Dmitrievich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Gas and Wave Dynamics.