Краткие сообщения

УДК 517.968.72

О МЕТОДЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НА ПОЛУОСИ

С. Искандаров[1], А. Халилов[2]

Устанавливаются достаточные условия, обеспечивающие оценку, ограниченность, степенную абсолютную интегрируемость на полуоси, стремление к нулю при стремлении к бесконечности независимой переменной всех решений линейного вольтеррова интегродифференциального уравнения первого порядка с запаздыванием. Для этого строится обобщенный функционал Ляпунова. Приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова: вольтеррово интегродифференциальное уравнение первого порядка, запаздывающий аргумент, оценка, ограниченность, абсолютная интегрируемость, стремление решений к нулю, обобщенный метод функционалов Ляпунова.

Sufficient conditions are established to ensure the estimation, boundedness, power-law absolute integrability on the semiaxis, the tendency to zero under the tendency to infinity of the independent variable of all solutions of the linear Volterra integrodifferential equation of the first order with delay. For this purpose, a generalized Lyapunov functional is constructed. An illustrative example is presented.

Key words: Volterra integrodifferential equation of the first order, argument lag, estimation, boundedness, absolute integrability, tending to zero of solutions, generalized method of Lyapunov functionals.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-10

В настоящей работе в предположении, что все функции непрерывны и все соотношения выполнены при $t \in J = [t_0, +\infty)$, $\tau \in [t_0, t]$ и $i = 1, \ldots, n$, решается следующая

Задача. Установить достаточные условия для ограниченности, степенной абсолютной интегрируемости на полуинтервале J и стремления к нулю при $t \to +\infty$ всех решений линейного интегродифференциального уравнения первого порядка типа Вольтерры вида

$$x'(t) + a(t)x(t) + b(t)x\big(\lambda(t)\big) + \int_{t_0}^{t} \big(K(t,\tau) + C(t,\tau)\big)x(\tau)d\tau = f(t), \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

с запаздывающим аргументом $\lambda(t) \in [t_0, t]$ и начальным множеством$E_{t_0} = \{t_0\}$.

Для решения этой задачи мы развиваем идею построения функционалов Ляпунова из [1–10].

Пусть [6] $\varphi(t) > 0$ — весовая функция, а $\psi_i(t)$ — срезывающие функции, причем

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n} f_j(t), \quad E_i(t) \equiv \varphi(t) f_i(t) \big(\psi_i(t)\big)^{-1}, \quad K(t,\tau) = \sum_{j=0}^{n} K_j(t,\tau),$$

$$R_i(t,\tau) \equiv \varphi(t) K_i(t,\tau) \big(\psi_i(t)\psi_i(\tau)\big)^{-1}, \quad R_i(t,t_0) = A_i(t) + B_i(t),$$

а интеграл $\int_t^{\infty} C(s,t)ds$ сходится [5, с. 216].

[1] *Искандаров Самандар* — доктор физ.-мат. наук, проф., зав. лаб. теории интегродифференциальных уравнений Ин-та математики НАН Кыргызской Республики; проф. Кыргызско-Турецкого ун-та "Манас", e-mail: mrmacintosh@list.ru.

Iskandarov Samandar — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Laboratory of Theory of Integro-Differential Equations, Institute of Mathematics of NAS of Kyrgyz Republic; Professor of Kyrgyz-Turkish Manas University.

[2] *Халилов Атахан* — канд. физ.-мат. наук, доцент, ст. науч. сотр. лаб. теории интегродифференциальных уравнений Ин-та математики НАН Кыргызской Республики, e-mail: atahan@mail.ru.

Khalilov Atahan — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher, Institute of Mathematics of NAS of Kyrgyz Republic, Laboratory of Theory of Integro-Differential Equations.

Теорема. *Если в указанных предположениях и обозначениях выполняются условия*

$$D(t) \equiv 2\varphi(t)a(t) - \varphi'(t) - \int_{t_0}^{t} \varphi(t)|C(t,\tau)|d\tau - \int_{t}^{\infty} \varphi(s)|C(s,t)|ds \geqslant 0,$$

$$\big(\kappa + |f_0|\varphi^{-1/2}\big) \in L^1(J, R_+), \quad \kappa(t) \equiv \int_{t_0}^{t} |K_0(t,\tau)|\big(\varphi(\tau)\big)^{-1/2} d\tau,$$

$a(t) \geqslant b(t) \geqslant 0,\ \lambda'(t) \geqslant 0,\ b^2(t) \leqslant (a(t)-b(t))b\big(\lambda(t)\big)\lambda'(t), A_i(t), (R_i)'_\tau(t,\tau) \geqslant 0, B_i(t) \geqslant 0 \geqslant B'_i(t)$, *а для некоторых функций* $c_i(t)$ *и* $A^*_i(t), R^*_i(t) \in L^1(J, R_+)$ *— условия* $A'_i(t) \leqslant A^*_i(t)A_i(t)$, $(R_i)''_{t\tau}(t,\tau) \leqslant R^*_i(t)(R_i)'_\tau(t,\tau)$ *и* $\big(E_i^{(k)}(t)\big)^2 \leqslant B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)$ $(k = 0, 1)$, *то для любого решения* x *уравнения* (1) *справедливы утверждения*

$$x(t) = \big(\varphi(t)\big)^{-1/2}O(1), \quad t \to +\infty, \quad Dx^2 \in L^1(J, R_+). \tag{2}$$

Доказательство этой теоремы основано на идее построения функционала Ляпунова из работ [1, с. 196–204; 2–4; 5, с. 216; 6, с. 73–77; 7, с. 157–158] и использовании нового обобщенного функционала Ляпунова

$$0 \leqslant V(t;x) = \varphi(t)\big(x(t)\big)^2 + \int_{t_0}^{t} D(s)\big(x(s)\big)^2 ds + \int_{\lambda(t)}^{t} \varphi(s)b(s)\big(x(s)\big)^2 ds +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(R_i(t,t_0)\big(X_i(t,t_0)\big)^2 - 2E_i(t)X_i(t,t_0) + c_i(t) + \int_{t_0}^{t} R'_{i\tau}(t,\tau)\big(X_i(t,\tau)\big)^2 d\tau\right)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t}^{\infty} \varphi(s)|C(s,\tau)|ds\big(x(\tau)\big)^2 d\tau, \quad X_i(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t} \psi_i(\eta)x(\eta)d\eta. \tag{3}$$

Рассуждения следуют доказательству теоремы 1.14 работы [6, с. 74–76], а именно с помощью формулы (3) берется производная $\frac{dV(t;x)}{dt}$ в силу (1), а дальше развивается идея получения дифференциального неравенства для функции Ляпунова и дифференциального уравнения сравнения [8], использующая лемму о дифференциальном неравенстве [9; 10, с. 65–67].

Исходя из (2) и (3), аналогично следствиям 3.1, 3.4, 3.5 работы [6, с. 117] получаем

Следствие 1. *Если в условиях теоремы выполнено* $\big(\varphi(t)\big)^{-1/2} = O(1), t \to +\infty$, *то любое решение уравнения* (1) *ограничено на полуинтервале* J.

Следствие 2. *Если в условиях теоремы* $\varphi(t) \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$, *то любое решение уравнения* (1) *стремится к нулю при* $t \to +\infty$.

Следствие 3. *Если в условиях теоремы выполнено* $\varphi^{-1/2} \in L^p(J, R_+ \setminus \{0\})$ *при некотором* $p > 0$ *, то при том же* p *любое решение* x *уравнения* (1) *удовлетворяет условию* $x \in L^p(J, R)$.

Следствие 4. *Если в условиях теоремы* $D(t) \geqslant D_0 > 0$ (*или соответственно* $D(t) > 0$ *и* $D^{-1} \in L^1(J, R_+ \setminus \{0\})$), *то любое решение* x *уравнения* (1) *удовлетворяет условию* $x \in L^2(J, R)$ (*или соответственно* $x(t) \in L^1(J, R)$).

Пример. Для уравнения (1) при $a(t) \equiv 9t^2 + t + 20,\ b(t) \equiv t + 2,\ \lambda(t) \equiv \frac{t}{3}$,

$$f(t) \equiv -\frac{e^{6t}(\cos 2t)^{1/9}}{(t+1)(t+7)} - \frac{\sin 5t}{(t+1)(t^2+16)}, \quad C(t,\tau) \equiv -\frac{1}{(t+1)(t+\tau+2)^{3/2}},$$

$$K(t,\tau) \equiv \frac{1}{t+1}\left(\frac{1}{t-\tau+5} + \exp\frac{t+\tau+3}{t+\tau+4}\right)e^{6t+6\tau}(\cos 2t \cos 2\tau)^{1/9} - e^{-t}\sin(t\tau),$$

$t_0 = 0, n = 1, \varphi(t) \equiv t+1, \psi_1(t) \equiv e^{6t}(\cos 2t)^{1/9}, D(t) \geqslant t^3+2t^2+21t+17, b^2(t) \leqslant (a(t)-b(t))b(\lambda(t))\lambda'(t)$, $R_1(t,\tau) \equiv \frac{1}{t-\tau+5} + \exp\frac{t+\tau+3}{t+\tau+4}$, $K_0(t,\tau) \equiv -e^{-t}\sin(t\tau)$, $E_1(t) \equiv -\frac{1}{t+7}$, $f_0(t) \equiv -\frac{\sin 5t}{(t+1)(t^2+16)}$, $A_1(t) \equiv \exp\frac{t+3}{t+4}$, $A^*_1(t) \equiv \frac{1}{(t+4)^2}$, $R^*_1(t) \equiv \frac{1}{(t+4)^2}$, $B_1(t) \equiv \frac{1}{t+5} \equiv c_1(t)$ выполняются все предпосылки, а с ними и заключения как теоремы, так и следствий 1–4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
2. *Levin J.J.* The asymptotic behavior of the solution of a Volterra equation // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. **14**. 534–541.
3. *Винокуров В.Р.* Асимптотическое поведение решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1967. **3**, № 10. 1732–1744.
4. *Levin J.J.* Nonlinear Volterra equation not of convolution type // J. Diff. Equat. 1968. **4**. 176–186.
5. *Burton T.A.* Volterra Integral and Differential Equations. N.Y. a.o.: Acad. Press, 1983.
6. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. Бишкек: Илим, 2002.
7. *Мартынюк А.А., Като Д., Шестаков А.А.* Устойчивость движения: метод предельных уравнений. Киев: Наукова думка, 1990.
8. *Кордуняну К.* Применение дифференциальных неравенств в теории устойчивости // An. sti. Univ. Iasi. Sec. 1. A. 1960. **6**. 47–58.
9. *Wazewski T.* Systemes des equations et des inequalites differentielles ordinaires aux deuxiemes membres monotones et leurs applications // Ann. soc. math. Pol. 1950. **23**. 112–166.
10. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости / Пер. с англ., под ред. В. В. Румянцева. М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию
08.07.2022

УДК 512.572

МАКСИМАЛЬНЫЕ PI-ЭКСПОНЕНТЫ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР

М. В. Зайцев[1]

В статье построена серия примеров конечномерных алгебр, у которых PI-экспонента совпадает с размерностью. При этом все эти алгебры не являются простыми.

Ключевые слова: тождества, коразмерности, неассоцативные алебры, PI-экспонента.

We construct a series of examples of finite-dimensional algebras such that their PI-exponent coincides with the dimension. All these algebras are not simple.

Key words: identities, codimensions, nonassociative algebras, PI-exponent.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-11

Пусть F — поле нулевой характеристики и A — алгебра над F. С алгеброй A связана целочисленная последовательность $c_n(A)$, $n = 1, 2, \dots$, которая характеризует количество ее полиномиальных тождеств. Известно, что если A конечномерна, $\dim A = d$, то члены этой последовательности удовлетворяют соотношению

$$0 \leqslant c_n(A) \leqslant d^{n+1} \tag{1}$$

(см. [1, 2]), что позволяет определить пределы

$$\overline{\exp}(A) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}, \quad \underline{\exp}(A) = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)},$$

называемые верхней и нижней PI-экспонентами алгебры A соответственно, и можно определить (обычную) PI-экспоненту

$$\exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)},$$

[1] *Зайцев Михаил Владимирович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. высшей алгебры мех.-мат. ф-та МГУ. e-mail: zaicevmv@mail.ru.

Zaicev Mikhail Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Higher Algebra.