УДК 531.01

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФИЛЬТРА КАЛМАНА В ЗАДАЧЕ НАВИГАЦИИ ПЕШЕХОДА

Ю. В. Болотин[1], А. В. Брагин[2]

Рассматривается система навигации пешехода, состоящая из двух бесплатформенных инерциальных навигационных систем, установленных на стопах. Для коррекции указанных систем используются условия нулевой скорости стопы в фазе опоры и ограниченности расстояния между стопами. В работе выясняются некоторые свойства расширенного фильтра Калмана, связанные с его состоятельностью. Показано, что состоятельность зависит от формы, в которой записываются уравнения в отклонениях.

Ключевые слова: БИНС, инерциальная навигация пешехода, коррекция, расширенный фильтр Калмана.

A pedestrian navigation system consisting of two foot-mounted strapdown inertial navigation systems (SINS) is considered. The zero velocity conditions of the foot in the stance phase of a step and a limited distance between the feet are used for SINS corrections. The aim of the work is to study some consistency properties of the extended Kalman filter. It is shown that this consistency depends on a form of the error equations.

Key words: SINS, pedestrian navigation, correction, extended Kalman filter.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-9

В настоящей работе рассматривается система навигации пешехода, состоящая из двух бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС). Для коррекции траектории используется информация о нулевой скорости стопы в фазе опоры и об ограниченности расстояния между стопами [1], и задача сводится к применению расширенного фильтра Калмана (РФК). Мы исследуем корректность РФК при разных формах записи задачи. Свойства РФК зависят от замены переменных. Мы вводим понятие структурной состоятельности РФК, затем проверяем выполнение этого свойства в задаче коррекции по нулевой скорости и по расстоянию между стопами в разных переменных.

1. Определение структурной состоятельности РФК. Рассмотрим задачу оценивания системы со случайными возмущениями по измерениям Y_k:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= f_k(X_k, w_k), \qquad E[w_k] = 0, \qquad E[w_k w_k^T] = Q_k \geqslant 0; \\ Y_k &= h_k(X_k) + r_k, \qquad E[r_k] = 0, \qquad E[r_k r_k^T] = R_k > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Одним из алгоритмов оценивания является расширенный фильтр Калмана [2]. Он рекуррентно строит оценку X_k по $y_1, \dots, y_k$ (обозначается $X_{k|k}$) и оценку X_{k+1} по $y_1, \dots, y_k$ (обозначается $X_{k+1|k}$). В основу алгоритма положена линеаризации уравнений в окрестности $X_{k|k}, X_{k+1|k}$:

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k w_k, \qquad y_k = H_k x_k + r_k. \tag{2}$$

Здесь F_k, G_k — матрицы производных $f_k(X, w)$ по X, w в точке $X = X_{k|k}, w = 0$; H_k — матрица производных $h_k(X)$ по X в точке $X = X_{k|k-1}$. Наряду с уравнениями (2) будем рассматривать их “идеальную” версию, где линеаризация проводится в истинных состояниях X_k, X_{k+1}, обозначая соответствующие матрицы через $\bar{F}_k, \bar{G}_k, \bar{H}_k$:

$$x_{k+1} = \bar{F}_k x_k + \bar{G}_k w_k, \qquad y_k = \bar{H}_k x_k + r_k. \tag{3}$$

[1] *Болотин Юрий Владимирович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. прикладной механики и управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ybolotin@yandex.ru.

Bolotin Yury Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Applied Mechanics and Control.

[2] *Брагин Александр Викторович* — мл. науч. сотр. лаб. управления и навигации мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: avb9676@yandex.ru.

Bragin Alexander Victorovich — Junior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Navigation and Control Laboratory.

Алгоритм РФК вычисляет матрицы F_k, G_k, H_k в текущих оценках состояния и представляет собой этапы прогноза

$$x_{k+1|k} = F_k x_{k|k}, \quad P_{k+1|k} = F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T, \tag{4}$$

коррекции (здесь и ниже I — единичная матрица подходящей размерности)

$$\begin{aligned} &x_{k+1|k+1} = x_{k+1|k} + K_{k+1}(y_{k+1} - H_{k+1} x_{k+1|k}), \\ &P_{k+1|k+1} = (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1|k}, \quad K_{k+1} = P_{k+1|k} H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \end{aligned} \tag{5}$$

и обновления состояния

$$X_{k+1|k} = f(X_{k|k}), \quad X_{k+1|k+1} = X_{k+1|k} + x_{k+1|k+1}.$$

После вычисления $X_{k+1|k+1}$ оценка отклонения $x_{k+1|k+1}$ обнуляется и осуществляется переход к следующему шагу. Алгоритм инициализируется оценкой $X_{1|1}$ и дисперсией ошибки оценки $P_{1|1}$. Мы будем рассматривать случай, когда априорной информации нет, т.е. $P_{1|1} = +\infty$. При этом подразумевается записать формулы (4), (5) в информационных матрицах [2]: $\Phi_{k|k} = P_{k|k}^{-1}$, $\Phi_{k+1|k} = P_{k+1|k}^{-1}$. Тогда $\Phi_{1|1} = P_{1|1}^{-1} = 0$.

Определение 1. Задача оценивания ненаблюдаема относительно однопараметрической группы преобразований Ω_s, называемой симметрией, если Ω_s переводит уравнения (1) в себя.

Утверждение 1. *Если есть m групп симметрий, то по крайней мере m переменных идеального расширенного фильтра Калмана (ИРФК) ненаблюдаемы и их ошибки оценки независимо от используемого алгоритма оценивания имеют бесконечную дисперсию.*

Ненаблюдаемые подпространства $\mathcal{N}_k$, $\bar{\mathcal{N}}_k$ уравнений в отклонениях (2), (3) определяются как ядра матриц наблюдаемости $\mathcal{O}_k$, $\bar{\mathcal{O}}_k$:

$$\mathcal{O}_k = \begin{bmatrix} H_1 F_1^{-1} \cdots F_{k-1}^{-1} \\ \cdots \\ H_{k-1} F_{k-1}^{-1} \\ H_k \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{O}}_k = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 \bar{F}_1^{-1} \cdots \bar{F}_{k-1}^{-1} \\ \cdots \\ \bar{H}_{k-1} \bar{F}_{k-1}^{-1} \\ \bar{H}_k \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_k = \operatorname{Ker} \mathcal{O}_k, \quad \bar{\mathcal{N}}_k = \operatorname{Ker} \bar{\mathcal{O}}_k.$$

В общем случае как матрицы $\mathcal{O}_k$, $\bar{\mathcal{O}}_k$, так и подпространства $\mathcal{N}_k$, $\bar{\mathcal{N}}_k$ различны. При этом, как легко видеть, $\bar{\mathcal{N}}_k$ содержит касательные к орбитам групп симметрий и задается матрицей с m столбцами.

Определение 2. Алгоритм РФК структурно состоятелен, если в нем ненаблюдаемые переменные ИРФК имеют бесконечную дисперсию, т.е. $x^T \Phi_{k|k} x = 0$ при $x \in \bar{\mathcal{N}}_k$.

Грамианами наблюдаемости систем (2), (3) называются матрицы [2]

$$W_k = \sum_{m=1}^{k} F_{k-1}^{-T} \dots F_m^{-T} H_m^T R_m^{-1} H_m F_m^{-1} \dots F_{k-1}^{-1}, \quad \bar{W}_k = \sum_{m=1}^{k} \bar{F}_{k-1}^{-T} \dots \bar{F}_m^{-T} \bar{H}_m^T R_m^{-1} \bar{H}_m \bar{F}_m^{-1} \dots \bar{F}_{k-1}^{-1}.$$

Утверждение 2. *Ненаблюдаемые подпространства $\mathcal{N}_k$, $\bar{\mathcal{N}}_k$ совпадают с ядрами соответствующих грамианов. Информационная матрица РФК удовлетворяет неравенству $\Phi_{k|k} \leqslant W_k$, и в условиях $\mathcal{N}_k \neq \bar{\mathcal{N}}_k$ РФК структурно несостоятелен.*

Таким образом, проверка структурной состоятельности сводится к сравнению подпространств $\mathcal{N}_k$, $\bar{\mathcal{N}}_k$. Заметим также, что $\bar{\mathcal{N}}_k$ удовлетворяет условию инвариантности: $\bar{F}_k \bar{\mathcal{N}}_k = \bar{\mathcal{N}}_{k+1}$. Поэтому для структурной состоятельности требуется и $F_k \mathcal{N}_k = \mathcal{N}_{k+1}$. Введенное понятие структурной состоятельности существенно слабее общего понятия состоятельности фильтра Калмана [2], но оно легче проверяется. Другое упрощенное понятие состоятельности используется в [3].

Утверждение 3. *Ненаблюдаемые подпространства $\mathcal{N}_k$ и структурная состоятельность РФК в общем случае зависят от выбора системы координат.*

Заметим, что данное утверждение, по сути, широко известно [4]. Для доказательства допустим, что в (1) сделана замена переменных $X = \varphi(X')$. При этом отклонения преобразуются по формулам $x_{k|k} = T_{k|k} x'_{k|k}$, $x_{k+1|k} = T_{k+1|k} x'_{k+1|k}$, где $T_{k|k}$, $T_{k+1|k}$ — матрицы частных производных $\varphi(X)$ соответственно в $X_{k|k}$, $X_{k+1|k}$. После замены матрицы F_k, H_k примут вид $F'_k = T_{k|k}^{-1} F_k T_{k|k}$, $H'_k = H_k T_{k|k-1}$, в то время как для инвариантности $\mathcal{O}_k$ требуется, как легко видеть, чтобы $F'_k = T_{k+1|k}^{-1} F_k T_{k|k-1}$.

2. РФК для пешехода с БИНС, установленной на стопе. Измерения БИНС включают измерения удельной силы, действующей на чувствительную массу M акселерометра: $f'_s = f_s + \Delta f_s$, и угловой скорости корпуса БИНС: $\omega'_s = \omega_s + \Delta\omega_s$. Здесь f_s, ω_s — истинные значения удельной силы и угловой скорости в проекциях на оси связанной с корпусом системы координат (с.к.) Ms; $\Delta f_s, \Delta\omega_s$ — ошибки измерения, предполагаемые ниже белыми шумами и соответствующие в (1) возмущению w_k. Навигация пешехода с БИНС на стопах основана на идее коррекции по нулевой скорости стопы в фазе опоры [1]. Вводя опорную с.к. On, связанную с плоской невращающейся Землей (ось n_3 направлена вверх), уравнения идеальной работы БИНС и модельные уравнения можно записать в виде (штрихом обозначены модельные переменные):

$$\begin{aligned} \dot p_n &= v_n, & \dot p'_n &= v'_n, \\ \dot v_n &= g + R_{ns} f_s, & \dot v'_n &= g + R_{ns'} f'_s, \\ \dot R_{ns} &= R_{ns}\hat\omega_s, & \dot R_{ns'} &= R_{ns'}\hat\omega'_s. \end{aligned}$$

Здесь p_n, v_n — координаты и скорости в опорной с.к.; R_{ns} — матрица преобразования из приборной в опорную с.к.; $\hat\omega$ — кососимметрическая матрица, задаваемая формулой $\omega \times a = a\hat\omega$.

Отклонения модельной траектории от истинной задаются ошибкой координат $\Delta p_n = p'_n - p_n$, ошибкой скоростей $\Delta v_n = v'_n - v_n$ и ошибкой ориентации — кососимметрической матрицей $\widehat{\beta_n} \approx R_{ns}R_{s'n} - I$, которая определяется вектором малого поворота β_n [5]. Наряду с Δp_n, Δv_n — полными ошибками — вводятся так называемые динамические ошибки $\delta p_n = \Delta p_n + \hat p_n \beta_n$, $\delta v_n = \Delta v_n + \hat v_n \beta_n$.

Уравнения в отклонениях записываются в полных, динамических ошибках или в их комбинации [5]. Для удобства будем обозначать такие комбинации следующим образом: FF, DD, FD. То есть первая буква отвечает за позиционные ошибки, а вторая — за скоростные (ниже все уравнения записываются в опорной с.к., так что индексы $p_n, v_n, \ldots$ опускаются):

$$\mathrm{FF}: \begin{cases} \dot{\Delta} p = \Delta v, \\ \dot{\Delta} v = -\hat f' \beta + \Delta f, \\ \dot\beta = -\Delta\omega; \end{cases} \quad \mathrm{DD}: \begin{cases} \dot{\delta} p = \delta v - \hat p' \Delta\omega, \\ \dot{\delta} v = \hat g \beta + \Delta f - \hat v' \Delta\omega, \\ \dot\beta = -\Delta\omega; \end{cases} \quad \mathrm{FD}: \begin{cases} \dot{\Delta} p = \delta v - \hat v' \beta, \\ \dot{\delta} v = \hat g \beta + \Delta f - \hat v' \Delta\omega, \\ \dot\beta = -\Delta\omega. \end{cases} \tag{6}$$

Условия нулевой скорости стопы в фазе опоры в моменты t_k разные авторы [1, 6] записывают в двух не эквивалентных формах — в опорной и приборной с.к., которые мы обозначим N, S, а именно N: $Z_n = v'_n(t_k) = 0$, S: $Z_s = v'_s = R_{s'n} v'_n(t_k) = 0$. В отклонениях эти две формы в зависимости от выбора замены переменных принимают вид (ниже рассматриваются только модельные переменные и штрих в $p', \ldots$ опускается):

$$\mathrm{FD, DD}: \begin{cases} \mathrm{N}: & z_k = \delta v(t_k) + \hat v(t_k)\beta(t_k), \\ \mathrm{S}: & z_k = \delta v(t_k); \end{cases} \qquad \mathrm{FF}: \begin{cases} \mathrm{N}: & z_k = \Delta v(t_k), \\ \mathrm{S}: & z_k = \Delta v(t_k) - \hat v(t_k)\beta(t_k). \end{cases} \tag{7}$$

К уравнениям (6), (7) в дискретные моменты опоры t_k применяется РФК; уравнения (2) получаются интегрированием (6) от t_k до t_{k+1}, при этом, например, в форме FF $x_k = \left(\Delta p(t_k)^T \, \Delta v(t_k)^T \, \beta(t_k)^T\right)^T$.

Утверждение 4. *Уравнения БИНС и условия нулевой скорости инвариантны к параллельным переносам БИНС и ее поворотам вокруг вертикальной оси. Размерность ненаблюдаемого подпространства ИРФК $\bar{\mathcal{N}}_k$ равна 4, наблюдаемы скорости, крен и тангаж.*

Утверждение 5. *При записи условия нулевой скорости в форме* N *РФК структурно-несостоятелен при использовании всех форм уравнений в отклонениях. При записи условия нулевой скорости в форме* S *РФК структурно-состоятелен при использовании уравнений в отклонениях в формах* FD, DD.

Докажем здесь только часть утверждений, касающихся записи уравнений движения в форме DD, рассматривая формы N, S записи условия нулевой скорости. Пары матриц F_k, H_k примут вид:

$$\mathrm{N}: \begin{bmatrix} F_k \\ H_k \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} I & I\tau_k & -\frac{\tau_k^2}{2}\hat g \\ 0 & I & -\tau_k \hat g \\ 0 & 0 & I \\ \hline 0 & I & \hat v_{k|k-1} \end{array}\right], \qquad \mathrm{S}: \begin{bmatrix} F_k \\ H_k \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} I & I\tau_k & -\frac{\tau_k^2}{2}\hat g \\ 0 & I & -\tau_k \hat g \\ 0 & 0 & I \\ \hline 0 & I & 0 \end{array}\right], \qquad \tau_k = t_k - t_{k-1}.$$

Обратим внимание на то, что в случае S матрицы не зависят от координат, поэтому уравнения РФК (2) и ИРФК (3) совпадают. Отсюда сразу следует структурная состоятельность формы S.

Матрицы наблюдаемости примут вид

$$\mathrm{N} : \mathcal{O}_k = \begin{bmatrix} 0 & I & (\tau_1 + \ldots + \tau_{k-1})\hat{g} + \hat{v}_{1|0} \\ \ldots\ldots & & \ldots \\ 0 & I & \tau_{k-1}\hat{g} + \hat{v}_{k-1|k-2} \\ 0 & I & \hat{v}_{k|k-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{S} : \mathcal{O}_k = \bar{\mathcal{O}}_k = \begin{bmatrix} 0 & I & (\tau_1 + \ldots + \tau_{k-1})\hat{g} \\ \ldots\ldots & & \ldots \\ 0 & I & \tau_{k-1}\hat{g} \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}.$$

Легко видеть, что в обоих случаях S и N в ядре $\mathcal{O}_k$ лежат параллельные переносы. В случае N если для некоторых k выполнено $v_{k-1|k-2} \nparallel g$, то последние три столбца $\mathcal{O}_k$ линейно независимы, откуда получим

$$\mathrm{N}: \quad \mathcal{N}_k = \bar{\mathcal{N}}_k = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{S}: \quad \mathcal{N}_k = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}.$$

Состоятельность формы S и несостоятельность формы N доказаны.

3. РФК для пешехода с двумя БИНС, установленными на стопах. Рассмотрим случай, когда БИНС установлены на обеих стопах. Припишем БИНС на левой и правой стопах индексы l и r соответственно. Помимо условия нулевой скорости для коррекции траектории можно использовать ограниченность расстояния между стопами некоторой величиной D. Будем проверять это условие в моменты t_k неподвижности либо левой, либо правой стопы: если в момент t_k расстояние между стопами $\|p^l - p^r\| > D$, то вводится измерение [7]

$$\|p^l(t_k) - p^r(t_k)\| = D. \tag{8}$$

Исследуем структурную состоятельность РФК в случае, когда помимо условия нулевой скорости используется измерение (8). Поскольку мы выяснили, что только формы уравнений в отклонениях DD, FD с измерениями нулевой скорости в форме S структурно-состоятельны, ограничимся рассмотрением этих двух случаев. Вектор состояния уравнений в отклонениях и переходная матрица для двух БИНС записываются следующим образом:

$$x_k = \begin{bmatrix} x_k^l \\ x_k^r \end{bmatrix}, \qquad F_k = \begin{bmatrix} F_k^l & 0 \\ 0 & F_k^r \end{bmatrix}.$$

В отклонениях $d_k = \|p^l_{k|k-1} - p^r_{k|k-1}\| - D$ уравнения (8) примут вид (r_d — регуляризующий шум) $d_k = \begin{bmatrix} S_k^l \, S_k^r \end{bmatrix} x_k + r_d$. Здесь в зависимости от формы записи уравнений получим

$$\mathrm{DD}: \quad \begin{cases} S_k^l = \rho_{k|k-1}^{-1} \begin{bmatrix} \ \ (p^l_{k|k-1} - p^r_{k|k-1})^T & 0 & \ \ (p^l_{k|k-1} \times p^r_{k|k-1})^T \end{bmatrix}, \\ S_k^r = \rho_{k|k-1}^{-1} \begin{bmatrix} -(p^l_{k|k-1} - p^r_{k|k-1})^T & 0 & -(p^l_{k|k-1} \times p^r_{k|k-1})^T \end{bmatrix}, \end{cases}$$

$$\mathrm{FD}: \quad \begin{cases} S_k^l = \rho_{k|k-1}^{-1} \begin{bmatrix} \ \ (p^l_{k|k-1} - p^r_{k|k-1})^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ S_k^r = \rho_{k|k-1}^{-1} \begin{bmatrix} -(p^l_{k|k-1} - p^r_{k|k-1})^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \rho_{k|k-1} = \|p^l_{k|k-1} - p^r_{k|k-1}\|. \end{cases}$$

Пара F_k, H_k для двух БИНС имеет вид

$$\begin{bmatrix} F_k \\ H_k \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} F_k^l & 0 \\ 0 & F_k^r \\ \hline H_k^l & 0 \\ 0 & H_k^r \\ S_k^l & S_k^r \end{array}\right]. \tag{9}$$

В данном случае матрицу измерений следует понимать следующим образом: если t_k — момент неподвижности левой стопы, но движения правой стопы, то $H_k^r = 0$, а если момент неподвижности правой, но движения левой, то $H_k^l = 0$. Если в момент t_k расстояние между стопами меньше d, то $S_k^l = 0$, $S_k^r = 0$.

Утверждение 6. *Если помимо нулевой скорости измеряется расстояние между стопами* (8), *то а) форма уравнений в отклонениях* DD *структурно-состоятельна; б) форма* FD *структурно несостоятельна.*

Для доказательства следует найти ядро матрицы наблюдаемости РФК и показать, что оно совпадает с ядром матрицы наблюдаемости ИРФК. Мы уже нашли ядро матрицы наблюдаемости в отсутствие коррекции по расстоянию между стопами:

$$\mathcal{N}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_k^l & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_k^r \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{N}_k^r = \mathcal{N}_k^l = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}.$$

Поэтому достаточно найти ядро матрицы наблюдаемости пары (9) в $\mathcal{N}_k$. Пространство $\mathcal{N}_k$ восьмимерно, ограничение вектора состояний и системной матрицы на него дается формулами

$$x_k = \begin{bmatrix} p_k^l \\ \beta_3^l \\ p_k^r \\ \beta_3^r \end{bmatrix}, \qquad F_k = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I, \qquad H_k = \begin{bmatrix} S_k^l & S_k^r \end{bmatrix},$$

где индекс β_3 обозначает третью (вертикальную) компоненту вектора,

$$S_k^l = \rho_{k|k-1}^{-1} \begin{bmatrix} (p_{k|k-1}^l - p_{k|k-1}^r)^T & (p_{k|k-1}^l \times p_{k|k-1}^r)_3 \end{bmatrix},$$
$$S_k^r = \rho_{k|k-1}^{-1} \begin{bmatrix} -(p_{k|k-1}^l - p_{k|k-1}^r)^T & -(p_{k|k-1}^l \times p_{k|k-1}^r)_3 \end{bmatrix}.$$

Соответствующая матрица наблюдаемости легко вычисляется:

$$\mathcal{O}_k = \begin{bmatrix} (p_{1|0}^l - p_{1|0}^r)^T & (p_{1|0}^l \times p_{1|0}^r)_3 & -(p_{1|0}^l - p_{1|0}^r)^T & -(p_{1|0}^l \times p_{1|0}^r)_3 \\ (p_{2|1}^l - p_{2|1}^r)^T & (p_{2|1}^l \times p_{2|1}^r)_3 & -(p_{2|1}^l - p_{2|1}^r)^T & -(p_{2|1}^l \times p_{2|1}^r)_3 \\ & & \cdots & \\ (p_{k|k-1}^l - p_{k|k-1}^r)^T & (p_{k|k-1}^l \times p_{k|k-1}^r)_3 & -(p_{k|k-1}^l - p_{k|k-1}^r)^T & -(p_{k|k-1}^l \times p_{k|k-1}^r)_3 \end{bmatrix}.$$

Ненаблюдаемое подпространство, т.е. ядро $\mathcal{O}_k$, порождается столбцами матрицы

$$\mathcal{M}_k = \begin{bmatrix} I_4 \\ I_4 \end{bmatrix},$$

т.е. в РФК не наблюдаются суммы координат и азимутальных углов двух БИНС. Очевидно, так и должно быть в идеальном случае, что доказывает утверждение *а*. Утверждение *б* следует из того, что ненаблюдаемое подпространство неинвариантно к замене переменных при переходе от формы DD к FD.

4. Заключение. Показано, что в рассматриваемой задаче во всех ситуациях наилучшим выбором с точки зрения структурной состоятельности является запись уравнений в отклонениях РФК в динамических ошибках. В теории инерциальной навигации преимущества динамических ошибок перед полными общепризнаны [5], но, насколько нам известно, их связь со свойствами состоятельности РФК ранее не исследовалась. Заметим, однако, что представленные результаты получены в упрощающем приближении плоской Земли. В рамках точных уравнений свойства наблюдаемости задачи несколько другие [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Skog I., Nilsson J., Zachariah D., Handel P.* Fusing the information from two navigation systems using an upper bound on their maximum spatial separation // Proc. IPIN 2012. Sydney, 2012. 1–5.
2. *Bar-Shalom Y., Li X., Kirubarajan T.* Estimation with applications to tracking and navigation. N.Y.: Wiley Interscience, 2001.

3. *Huang G., Kaess M., Leonard J.* Towards consistent visual-inertial navigation // Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA) 2014. Hong Kong, 2014. 4926–4933.
4. *Aidala V.J., Hammel S.E.* Utilization of modified polar coordinates for bearings-only tracking // IEEE Trans. Autom. Control. 1983. **AC-28**, N 3. 283–294.
5. *Голован А.А., Вавилова Н.Б., Парусников Н.А.* Математические основы инерциальных навигационных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2020.
6. *Bolotin Y., Bragin A., Gartseev I.* Covariance error analysis for pedestrian dead reckoning with foot mounted IMU // CEUR Workshop Proc. 2019. **2498**. 243–250.
7. *Bolotin Y.V., Bragin A.V., Gulevskii D.V.* Исследование состоятельности расширенного фильтра Калмана в задаче навигации пешехода с БИНС, закрепленными на стопах // Гироскопия и навигация. 2021. **29**, № 2. 59–77.

Поступила в редакцию
11.01.2023