Заключение. В настоящей работе предлагается численно-аналитический метод определения неоднородных (по глубине и в плоскости) остаточных напряжений по данным измерений компонент перемещений средствами DSPI и DIC путем пошагового сверления отверстий. Определяющие соотношения для компонент вектора перемещений как функций цилиндрических координат и глубины отверстия записываются в виде интегральных операторов Вольтерры. Дается алгоритм и проводится численное моделирование базовых функций. Полученные результаты согласуются с известными экспериментальными данными и расчетными значениями компонент тензора деформаций поверхности тела в зависимости от глубины отверстия по стандарту ASTM E837.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schajer G.S.* Optical hole drilling residual stress calculations using strain gauge formalism // Exp. Mech. 2021. N 61. 1369–1380.
2. *Razumovskii I.A., Usov S.M.* Development of the hole-drilling method as applied to the study of inhomogeneous residual stress fields // J. Machinery Manufacture and Reliability. 2021. **50**, N 8. 727–734 (DOI: 10.3103/S1052618821080100).
3. *Kohri A., Mikami T., Suzuki Y.* Residual stress measurement of the engineering plastics by the hole-drilling strain-gage method // ECRS-10 Materials Research Forum LLC, Materials Research Proc. 2018. N 6. 101–106 (DOI: 10.21741/ 9781945291890-17).
4. ASTM E 837-13a. Standart Test Method for Determining Residual Stresses by the Hole-Drilling Strain-Gage Method. 0301st ed. Philadephia: ASTM International, 2013.
5. *Завойчинская Э.Б., Плотников А.С.* О методе определения неоднородного поля остаточных напряжений с использованием цифровой спекл-интерферометрии и метода сверления отверстий // Композиты и наноструктуры. 2022. **14**, № 1 (53). 16–30.
6. *Petrucci G., Scafidi M.* A new procedure for the evaluation of residual stresses by the hole drilling method based on Newton–Raphson technique // JCPDS-International Centre for Diffraction Data. Palermo, 2009. 643–650.
7. *Махутов Н.А., Разумовский И.А.* Методы анализа полей остаточных напряжений в пространственных деталях // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2017. **83**, № 1. 56–64.
8. *Wern H.* Finite-element solutions for mechanical drilling methods: A new integral formalism // J. Comput. and Appl. Math. 1995. N 63. 365–372.
9. *Каракозов Е.В., Одинцев И.Н., Плотников А.С., Плугатарь Т.П.* Оценка высокоградиентных компонент остаточных напряжений по данным метода сверления зондирующих отверстий // XXXI Междунар. инновацион. конф. молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС 2019): Сб. тр. конф. М., 2020. 90–93.
10. *Karakozov E., Odintsev I., Plotnikov A., Plugatar T.* Determination of high-gradient components of residual stress by data of test hole drilling method // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. Int. Conf. of Young Scientists and Students. Topical Problems of Mechanical Engineering (ToPME 2019). Moscow, 2020. 1–7.

Поступила в редакцию
08.12.2022

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ С ДИССИПАТИВНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

И. Н. Молодцов[1]

Получен новый класс определяющих уравнений процессов сложного нагружения с тремя функционалами состояния и новый метод математического моделирования. Сформулирован математический принцип, согласно которому физически корректные уравнения состояния изменяются за счет включения в них гироскопических слагаемых, не совершающих механической работы. Построены определяющие уравнения процессов сложного

[1] *Молодцов Игорь Николаевич* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mechmathmsu@mail.ru.

Molodtsov Igor Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Elasticity.

нагружения с двумя функционалами состояния в условиях мягкого и жесткого нагружений. Установлена их связь с трехчленной формулой Ильюшина и современными теориями пластического течения. Сформулирована математическая модель очагового механизма пластичности, которая представляет реальный деформируемый континуум смесью упругопластического континуума и континуума Коссера — плоских прожилок (очагов пластической деформации — зон больших относительных поворотов). Дано физическое обоснование включения несимметричной части тензора напряжений и поворотов в состав термодинамических параметров модели.

Ключевые слова: сложное нагружение, определяющие соотношения, траектория деформаций и отклик, теорема изоморфизма, очаг пластической деформации.

A new class of constitutive equations for complex loading processes is obtained. It has three state functionals. A new method of mathematical modeling and mathematical principle is formulated. According to them, physically correct equations of state are changed by including gyroscopic terms in them that do not perform mechanical work. The constitutive equations of complex loading processes with two state functionals under conditions of soft and hard loadings are constructed. Their connection with the Ilyushin formula and modern theories of plastic flow is obtained. A mathematical model of the domain mechanism of plasticity is formulated. It represents a real deformable continuum as a mixture of an elastoplastic continuum and a Cosserat continuum — flat veinlets (domain of plastic deformation — zones of large relative rotations). A physical justification for the inclusion of the asymmetric part of the stress and rotation tensor in the composition of the thermodynamic parameters of the model is given.

Key words: complex loading, constitutive equations, strain and stress trajectories, theorem of isomorphism, domain of plastic strain.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-8

1. Уравнения состояния дифференциального типа. Вопросы введения в теорию механики деформируемого твердого тела определяющих соотношений являются самыми сложными: здесь всегда естественно иметь в виду вопрос об адекватном отражении в модели физической сущности моделируемых процессов. Среди множества известных соотношений немногие имеют происхождением конкретные физические источники, а основная часть является продуктом чистой математики и введена в теорию с целью обеспечения возможности тем или иным способом решить поставленную математическую задачу. При этом вопрос о физической достоверности полученного решения, как правило, не обсуждается — достаточно того, что предлагаемый новый класс определяющих соотношений содержит известные. Реализацией другого пути является идея А.А. Ильюшина и Г.А. Ильюшиной [1, 2] о построении уравнений состояния как решений функциональных уравнений термодинамики.

Нами выбран за основу именно этот путь. Хорошо изученными со всех сторон в теории пластичности являются процессы простого нагружения и близкие к ним. Доказано, что эти процессы действительно возникают в материале при определенных технологически достижимых физических условиях. Естественно, что при других условиях уравнения состояния простого нагружения использовать следует с осторожностью. Возможно поставить задачу определения такого класса процессов, которые математически отличаются от процессов простого нагружения, но эти отличия не влияют на основное термодинамическое уравнение. В этом случае добавленные слагаемые называют гироскопическими. В настоящей работе исследуются такие классы процессов и уравнений состояния. В качестве физического источника выступает основное термодинамическое тождество (уравнение), которое определяет структуру функционального соотношения между термодинамическими силами и потоками. При таком подходе, по-видимому, в проблему не будет внесено ничего ей не свойственного и физическая суть будет отражена верно. Несмотря на существенное физическое отличие рассматриваемых процессов от простых, математические аспекты проблемы оказываются очень схожими и в одинаковой мере простыми. Это позволяет за счет незначительного видоизменения существующих программных продуктов сделать их эффективными для гораздо более широкого класса уравнений состояния.

Пусть $\hat{\Sigma}$ — тензор напряжений Коши, а $\hat{\varepsilon}$— парная ему термодинамическая координата, далее используемая в качестве меры малых деформаций. Выражение элементарной работы сил внутренних напряжений запишем в виде $\delta A \equiv \hat{\Sigma} : \delta\hat{\varepsilon} = p\delta e + \overline{\sigma}\delta\overline{\varepsilon}$. Здесь δ обозначает вариацию и произведено разделение тензоров напряжений и деформаций на шаровую $(p,\, e)$ и девиаторную $(\overline{\sigma},\, \overline{\varepsilon})$ (в 5-мерном пространстве тензора-девиатора) части.

Пусть функционал состояния дифференцируем по Фреше. Тогда в процессе нагружения будем иметь

$$\overline{\sigma}\delta\overline{\varepsilon} = \overline{\sigma}\frac{\delta\overline{\varepsilon}}{\delta\overline{\sigma}}\,\delta\overline{\sigma} \equiv \overline{\sigma}\hat{P}^{-1}\delta\overline{\sigma},$$

где $\hat{P}$ — функционал процесса нагружения. Отсюда следует, что $\overline{\sigma}(\delta\overline{\varepsilon} - \hat{P}^{-1}\delta\overline{\sigma}) = 0$ и существуют классы эквивалентных процессов нагружения с общим представлением элементарной работы сил внутренних напряжений. Пусть хорошо изученным экспериментально является некоторый основной класс процессов (траекторий деформаций или нагружения с построенными на них реакциями), для которых функционал $\hat{P}$, определяющий вид основного функционального уравнения $\delta\overline{\varepsilon} = \hat{P}^{-1}\delta\overline{\sigma}$, найден. Точными решениями этого функционального уравнения являются траектории и реакции, принадлежащие основному классу. Эквивалентными по работе основному процессу в классе процессов с квазилинейными дифференциальными соотношениями между напряжениями и деформациями первого порядка являются процессы, описываемые функциональными уравнениями состояния вида

$$\delta\overline{\varepsilon} = \hat{P}^{-1}\delta\overline{\sigma} + \alpha\left(\delta\overline{\sigma} - \frac{(\overline{\sigma},\delta\overline{\sigma})}{\sigma^2}\overline{\sigma}\right) + \beta\left(\delta\overline{\varepsilon} - \frac{(\overline{\sigma},\delta\overline{\varepsilon})}{\sigma^2}\overline{\sigma}\right) + \delta\nu\left(\overline{\varepsilon} - \frac{(\overline{\sigma},\overline{\varepsilon})}{\sigma^2}\overline{\sigma}\right).$$

Здесь $\alpha, \beta, \delta\nu$ — скалярные функционалы. В общем случае траектории и реакции основного класса этому функциональному уравнению не удовлетворяют. Изучим более подробно приближение, в котором два последних функционала равны нулю. В этом случае функциональное уравнение

$$\delta\overline{\varepsilon} = P^{-1}\delta\overline{\sigma} + \alpha\left(\delta\overline{\sigma} - \frac{(\overline{\sigma},\delta\overline{\sigma})}{\sigma^2}\overline{\sigma}\right)$$

определяет процесс в пространстве деформаций или напряжений. Если потребовать, чтобы эти дифференциальные соотношения между напряжениями и деформациями удовлетворялись точно на процессе: $\overline{\varepsilon} = \varepsilon\overline{\sigma}/\sigma$, то получим равенства, которые при простом нагружении определяют скалярные функционалы P и α:

$$\alpha = \frac{1}{N} - \frac{1}{P}, \quad N = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad P = \frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon}.$$

Ясно, что при этих условиях процесс простого нагружения точно удовлетворяет функциональному уравнению. Естественно, при изучении процессов, принадлежащих некоторой функциональной окрестности процессов основного класса, считать $\alpha \equiv 1/N - 1/P$, а скалярные функционалы N и P — произвольными, но на траекториях основного процесса (процесса простого нагружения) совпадающими с функционалами процесса простого нагружения. В этом случае получим известную трехчленную формулу [3]

$$\delta\overline{\varepsilon} = \frac{1}{N}\,\delta\overline{\sigma} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right)\frac{(\overline{\sigma},\delta\overline{\sigma})}{\sigma^2}\,\overline{\sigma} \tag{1}$$

и обратную к ней формулу

$$\delta\overline{\sigma} = N\delta\overline{\varepsilon} + (P - N)\,\frac{(\overline{\sigma},\delta\overline{\varepsilon})}{\sigma^2}\,\overline{\sigma}. \tag{2}$$

Таким образом, в функциональное уравнение состояния простого процесса А.А. Ильюшиным добавлено с произвольным параметром α гироскопическое слагаемое, не совершающее механической работы. Параметр выбран из условия, что на процессе простого нагружения функциональное уравнение удовлетворяется точно.

Отметим, что в процессе нагружения при тензорно-линейной формулировке уравнений состояния возможны три вида независимых гироскопических сил:

$$\delta\overline{\sigma} - \frac{(\overline{\sigma},\delta\overline{\sigma})\overline{\sigma}}{\sigma^2}, \quad \delta\overline{\varepsilon} - \frac{(\overline{\sigma},\delta\overline{\varepsilon})\overline{\sigma}}{\sigma^2}, \quad \overline{\varepsilon} - \frac{(\overline{\sigma},\overline{\varepsilon})\overline{\sigma}}{\sigma^2},$$

позволяющих строить аналогичные (1), (2) соотношения.

В процессе деформаций $\overline{\sigma}\delta\overline{\varepsilon} = \delta(\overline{\sigma}\overline{\varepsilon}) - \overline{\varepsilon}\delta\overline{\sigma} = \delta(\overline{\sigma}\overline{\varepsilon}) - \overline{\varepsilon}\hat{P}\delta\overline{\varepsilon}$ аналогично получаются соотношения

$$\delta\overline{\sigma} = N\delta\overline{\varepsilon} + (P - N)\frac{(\overline{\varepsilon},\delta\overline{\varepsilon})}{\varepsilon^2}\overline{\varepsilon},$$

$$\delta\overline{\varepsilon} = \frac{1}{N}\delta\overline{\sigma} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right)\frac{(\overline{\varepsilon}, \delta\overline{\sigma})}{\varepsilon^2}\overline{\varepsilon}$$

и другие, в которых роль гироскопических обобщенных сил играют

$$\delta\overline{\varepsilon} - \frac{(\overline{\varepsilon}, \delta\overline{\varepsilon})\varepsilon}{\varepsilon^2}, \quad \delta\overline{\sigma} - \frac{(\overline{\varepsilon}, \delta\overline{\sigma})\varepsilon}{\varepsilon^2}, \quad \overline{\sigma} - \frac{(\overline{\sigma}, \overline{\varepsilon})\varepsilon}{\varepsilon^2}.$$

2. Изоморфные описания процессов деформации и нагружения. Наиболее интересным с точки зрения термодинамики и изоморфизма процессов деформаций и нагружения является построение единых функциональных уравнений, термодинамически согласованных с уравнениями основного процесса. Поскольку переход от процессов деформации к процессам нагружения изменяет основное термодинамическое уравнение (внутренняя энергия переходит в энтальпию, а работа — в дополнительную работу), оба подхода равноправны. В этом смысл теоремы Ильюшина об изоморфизме.

Поставим задачу нахождения такого функционального уравнения, которое описывает одновременно и процессы деформации, и процессы нагружения. Для этого в первом случае добавляем к уравнению основного процесса гироскопические слагаемые, не совершающие работы в процессе деформации. Аналогично поступаем в процессе нагружения. Но в этом случае добавляем к уравнению основного процесса гироскопические слагаемые, не совершающие работы в процессе нагружения. Каждое из двух уравнений содержит кроме функционала простого процесса шесть функционалов. Сравнение уравнений друг с другом позволяет связать функционалы между собой. В результате получится единое функциональное уравнение.

Рассмотрим прямое и обратное векторно-линейные уравнения состояния, полученные гироскопическим возмущением уравнений основного процесса и поэтому ему термодинамически эквивалентные:

$$\delta\overline{\sigma} = P\delta\overline{\varepsilon} + A\left(\delta\overline{\sigma} - \frac{(\overline{\varepsilon}, \delta\overline{\sigma})\overline{\varepsilon}}{\varepsilon^2}\right) + B\left(\delta\overline{\varepsilon} - \frac{(\overline{\varepsilon}, \delta\overline{\varepsilon})\overline{\varepsilon}}{\varepsilon^2}\right) +$$

$$+ \left(C_1(\overline{\sigma}, \delta\overline{\sigma}) + C_2(\overline{\sigma}, \delta\overline{\varepsilon}) + C_3(\overline{\varepsilon}, \delta\overline{\sigma}) + C_4(\overline{\varepsilon}, \delta\overline{\varepsilon})\right)\left(\overline{\sigma} - \frac{(\overline{\sigma}, \overline{\varepsilon})\overline{\varepsilon}}{\varepsilon^2}\right),$$

$$\delta\overline{\varepsilon} = \frac{1}{P}\,\delta\overline{\sigma} + K\left(\delta\overline{\sigma} - \frac{(\overline{\sigma}, \delta\overline{\sigma})\overline{\sigma}}{\sigma^2}\right) + L\left(\delta\overline{\varepsilon} - \frac{(\overline{\sigma}, \delta\overline{\varepsilon})\overline{\sigma}}{\sigma^2}\right) +$$

$$+ \left(M_1(\overline{\sigma}, \delta\overline{\sigma}) + M_2(\overline{\sigma}, \delta\overline{\varepsilon}) + M_3(\overline{\varepsilon}, \delta\overline{\sigma}) + M_4(\overline{\varepsilon}, \delta\overline{\varepsilon})\right)\left(\overline{\varepsilon} - \frac{(\overline{\sigma}, \overline{\varepsilon})\overline{\sigma}}{\sigma^2}\right).$$

Условие совпадения этих уравнений приводит к системе 10 уравнений для 13 скалярных функционалов, определяющих уравнения прямого и обратного процессов. Решением системы

$$C_2 = -C_1(\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon), \quad C_4 = -C_3(\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon), \quad A = -\Psi C_3, \quad B = -\Psi C_1, \quad L = \frac{C_1}{P}\,\Psi, \quad K = \frac{C_3}{P}\Psi,$$

$$M_1 = \frac{C_1}{P}(\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon), \quad M_2 = -\frac{C_1}{P}, \quad M_3 = \frac{C_3}{P}(\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon), \quad M_4 = -\frac{C_3}{P}$$

все функционалы выражаются через три: P, C_1, C_3. Здесь $\Psi \equiv 1 - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)^2$, $(\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)$ — скалярное произведение направляющих векторов напряжений и деформации.

Единое определяющее уравнение записывается в виде

$$\left(\frac{1}{\Psi} + C_1\right)\delta\overline{\sigma} = \left(\frac{P}{\Psi} - C_3\right)\delta\overline{\varepsilon} + C_1(\overline{n}_\sigma, \delta\overline{\sigma})\overline{n}_\sigma + C_3(\overline{n}_\sigma, \delta\overline{\varepsilon})\overline{n}_\sigma +$$

$$+\frac{C_1}{\Psi}(\overline{n}_\varepsilon - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon), \delta\overline{\sigma})(\overline{n}_\varepsilon - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)) + \frac{C_3}{\Psi}(\overline{n}_\varepsilon - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\sigma), \delta\overline{\varepsilon})(\overline{n}_\varepsilon - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)).$$

Замена функционалов

$$C_1 \equiv \frac{Q}{\Psi(1-Q)}, \quad N \equiv \frac{P - C_3\Psi}{1 + C_1\Psi}, \quad C_3 \equiv \frac{1}{\Psi}\left(P - \frac{N}{1-Q}\right)$$

приводит уравнение (с тремя функционалами P, N, Q) к виду

$$\delta\overline{\sigma} = N\delta\overline{\varepsilon} + \frac{Q}{\Psi}\left\{\delta\sigma(\overline{n}_\sigma - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\varepsilon) + (\overline{n}_\varepsilon, \delta\overline{\sigma})(\overline{n}_\varepsilon - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\sigma)\right\} +$$

$$+\frac{P - N - PQ}{\Psi}\left\{(\overline{n}_\sigma, \delta\overline{\varepsilon})(\overline{n}_\sigma - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\varepsilon) + \delta\varepsilon(\overline{n}_\varepsilon - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\sigma)\right\}. \qquad (3)$$

Из этого уравнения следуют скалярные соотношения

$$(\overline{\varepsilon}, \delta\overline{\sigma}) = P(\overline{\varepsilon}, \delta\overline{\varepsilon}), \quad P(\overline{\sigma}, \delta\overline{\varepsilon}) = (\overline{\sigma}, \delta\overline{\sigma}). \qquad (4)$$

Формула (3) является решением поставленной выше задачи. Она задает искомый изоморфизм.

Найдем условия, при которых процесс простого нагружения удовлетворяет единому уравнению (3). При простом нагружении $\overline{n}_\sigma = \overline{n}_\varepsilon$. С учетом этого производим преобразования уравнения (3). В результате получим, что в процессе простого нагружения определяющие функционалы связаны соотношениями

$$P = \frac{1 + (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)}{2}\frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon}, \quad N = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad Q = N\frac{\varepsilon}{\sigma}.$$

При этих условиях процесс простого нагружения удовлетворяет уравнению (3).

Из (3) и (4) получаются по отдельности уравнения процессов деформации

$$\delta\overline{\sigma} = N\delta\overline{\varepsilon} + \frac{P - N}{\Psi}\left[(\overline{n}_\sigma, \delta\overline{\varepsilon})(\overline{n}_\sigma - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\varepsilon) + (\overline{n}_\varepsilon, \delta\overline{\varepsilon})(\overline{n}_\varepsilon - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\sigma)\right] \qquad (5)$$

и нагружения

$$\delta\overline{\varepsilon} = \frac{\delta\overline{\sigma}}{N} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right)\frac{1}{\Psi}\left[(\overline{n}_\sigma, \delta\overline{\sigma})(\overline{n}_\sigma - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\varepsilon) + (\overline{n}_\varepsilon, \delta\overline{\sigma})(\overline{n}_\varepsilon - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\sigma)\right]. \qquad (6)$$

Итак, формулы (5) и (6) следуют из построенного выше изоморфизма (3) и решают поставленную выше задачу. Однако дальнейшее изучение этих формул может идти разными путями. Покажем это на примере процесса деформации.

В процессе деформации уравнение (5) записывается в двух эквивалентных формах:

$$\delta\overline{\sigma} = N\delta\overline{\varepsilon} + (P - N)(\overline{n}_\varepsilon, \delta\overline{\varepsilon})\overline{n}_\varepsilon + \frac{P - N}{\Psi}(\overline{n}_\sigma - (\overline{n}_\varepsilon, \overline{n}_\sigma)\overline{n}_\varepsilon), \delta\overline{\varepsilon})(\overline{n}_\sigma - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\varepsilon),$$

$$\delta\overline{\sigma} = N\delta\overline{\varepsilon} + (P - N)(\overline{n}_\sigma, \delta\overline{\varepsilon})\overline{n}_\sigma + \frac{P - N}{\Psi}(\overline{n}_\varepsilon - (\overline{n}_\varepsilon, \overline{n}_\sigma)\overline{n}_\sigma), \delta\overline{\varepsilon})(\overline{n}_\varepsilon - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\sigma).$$

Аналогично в процессах нагружения преобразуем уравнение (6). Все преобразования проводятся подобно выполненным в уравнениях процесса деформации. Результаты в виде двух уравнений

$$\delta\overline{\varepsilon} = \frac{\delta\overline{\sigma}}{N} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right)(\overline{n}_\varepsilon, \delta\overline{\sigma})\overline{n}_\varepsilon + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right)\frac{1}{\Psi}(\overline{n}_\sigma - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\varepsilon, \delta\overline{\sigma})(\overline{n}_\sigma - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\varepsilon),$$

$$\delta\overline{\varepsilon} = \frac{\delta\overline{\sigma}}{N} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right)(\overline{n}_\sigma, \delta\overline{\sigma})\overline{n}_\sigma + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right)\frac{1}{\Psi}(\overline{n}_\varepsilon - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\sigma, \delta\overline{\sigma})(\overline{n}_\varepsilon - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\sigma)$$

являются двумя вариантами уравнений процессов нагружения. Возможно получать такие соотношения прямо из уравнений процесса деформации с использованием формул (4).

Выше уже было отмечено, что в теориях упругопластических процессов сложного нагружения в качестве механических термодинамических сил и потоков выступают напряжения и деформации, т.е. измеримые величины. Поэтому далее и только с целью иллюстрации результата преобразуем найденные выше уравнения процессов деформации и нагружения (5), (6) с учетом равенства

$$\overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}_p + \frac{\overline{\sigma}}{2G}.$$

Это и есть формальное разделение деформации на упругую и пластическую части. Тогда в терминах $\overline{\sigma}$, $\overline{\varepsilon}$ и $\overline{\varepsilon}_p$ получим вспомогательные формулы

$$\overline{n}_\sigma - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\varepsilon = \frac{\sigma}{2GH}(\overline{\varepsilon} - H\overline{\varepsilon}_p)), \quad \frac{1}{H} \equiv 1 - \frac{\sigma}{2G\varepsilon}(\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon),$$

$$\overline{n}_\varepsilon - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\sigma = \frac{1}{h\varepsilon}(\overline{\sigma} - h\overline{\varepsilon}_p), \quad \frac{1}{h} \equiv \frac{\varepsilon}{\sigma}(\overline{n}_\varepsilon, \overline{n}_\sigma) - \frac{1}{2G} \tag{7}$$

и по два варианта определяющих уравнений процессов деформации

$$\delta\overline{\sigma} = N\delta\overline{\varepsilon} + (P - N)(\overline{n}_\varepsilon, \delta\overline{\varepsilon})\overline{n}_\varepsilon + \frac{P - N}{\Psi}\frac{4G^2}{\sigma^2 H^2}(\overline{\varepsilon} - H\overline{\varepsilon}_p), \delta\overline{\varepsilon})(\overline{\varepsilon} - H\overline{\varepsilon}_p), \tag{8}$$

$$\delta\overline{\sigma} = N\delta\overline{\varepsilon} + (P - N)(\overline{n}_\sigma, \delta\overline{\varepsilon})\overline{n}_\sigma + \frac{P - N}{\Psi}\frac{1}{h^2\varepsilon^2}(\overline{\sigma} - h\overline{\varepsilon}_p, \delta\overline{\varepsilon})(\overline{\sigma} - h\overline{\varepsilon}_p) \tag{9}$$

и процессов нагружения

$$\delta\overline{\varepsilon} = \frac{\delta\overline{\sigma}}{N} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right)(\overline{n}_\sigma, \delta\overline{\sigma})\overline{n}_\sigma + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right)\frac{1}{h^2\varepsilon^2\Psi}(\overline{\sigma} - h\overline{\varepsilon}_p, \delta\overline{\sigma})(\overline{\sigma} - h\overline{\varepsilon}_p), \tag{10}$$

$$\delta\overline{\varepsilon} = \frac{\delta\overline{\sigma}}{N} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right)(\overline{n}_\varepsilon, \delta\overline{\varepsilon})\overline{n}_\varepsilon + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right)\frac{4G^2}{H^2\sigma^2\Psi}(\overline{\varepsilon} - H\overline{\varepsilon}_p, \delta\overline{\sigma})(\overline{\varepsilon} - H\overline{\varepsilon}_p). \tag{11}$$

Полученные уравнения процессов деформации и нагружения являются следствиями принятого нами в начале п. 2 изоморфизма, который по сути является гироскопической стабилизацией уравнений процесса простого нагружения. Существенно то, что теория процессов простого нагружения является **физически обоснованной.** Для нее установлены основные теоремы: теорема о простом нагружении — достаточные условия реализуемости в теле напряженно-деформированного состояния, соответствующего в каждой точке тела простой деформации, и метод упругих решений. Таким образом, в отличие от теорий пластического течения и других подходов здесь используется частный постулат изотропии Ильюшина [3], но постулаты пластичности **не используются**, как и свойственные теориям пластического течения объекты: принцип градиентальности, поверхность текучести, априорное введение пластической деформации, а разделение деформации на упругую и пластическую части было сделано формально и только для иллюстрации. Результатом являются соотношения (3), (5), (6) и различные их варианты в процессах нагружения или деформации (они также называются процессами мягкого и жесткого нагружения). Формулы (8)–(11) записаны в виде, который является особенно примечательным. Он основан на преобразовании с помощью (7) базовых уравнений и позволяет переходить к новым наглядным формам их записей в эквивалентном, но привычном в классической теории пластичности виде. Здесь проявляется принцип суперпозиции: векторы приращения деформации (или нагружения) суть суперпозиция простого нагружения (или простой деформации) и аналогов вариантов пластических течений с изотропным и кинематическим упрочнениями. Данный принцип является следствием построенного выше изоморфизма (3), а все полученные уравнения — следствиями формул (5), (6). В формулах (8)–(11) третьи слагаемые в правой части имеют явно необратимый характер, поскольку в теориях пластического течения этого типа слагаемые пропорциональны работе по смещению центра поверхности текучести, и общеизвестно, что размеры поверхностей текучести при не слишком большой деформации в процессе деформации меняются незначительно. Значит, третьи слагаемые во всех формулах являются диссипативными напряжениями или деформациями в зависимости от процесса. Все полученные результаты относятся к пятимерным векторам-девиаторам напряжений и деформации. Однако их можно без изменений распространить на связи между любыми векторными термодинамическими силами и потоками.

3. Об очаговом механизме пластичности. Наиболее технически сложным аспектом применения математического аппарата при формировании уравнений состояния является выделение поворотов из состава существенных физических (термодинамических) переменных: ведь известно, что внутренняя энергия слабо зависит от поворотов ω [4] и эта зависимость реализуется, как правило, не прямо, а через деформации. Данное обстоятельство преодолевается использованием кинематической процедуры Чезаро для восстановления полей поворотов и перемещений по деформациям. Кинематическая процедура Чезаро позволяет вывести из состава существенных термодинамических переменных вращения и скорости поворотов ω и ω°, так что все кинематические параметры задачи могут быть вычислены по заданным полям тензоров деформации ϵ_{ik} и скорости деформации ϵ°_{ik}, которые сами остаются в числе существенных переменных задачи. Восстановленные по Чезаро повороты ω и ω° содержат интегралы по пространственным линиям. Известные условия совместности тензоров деформации и скоростей деформации суть условия независимости этих интегралов от пути интегрирования. Все это означает, что уравнения состояния физической теории, которая не имеет вращений ω и ω° среди существенных термодинамических переменных, но учитывает эти вращения (через деформации и скорости деформации), являются нелокальными [5, 6]. С другой стороны, модель может учитывать вращения ω прямо и тогда ее уравнения состояния локальны. Очевидно, что эти два подхода являются равноправными способами учета вращений в теории, которая в этой частности отличается от классической механики, не включащей поля вращений в уравнения состояния. Поскольку внутреннее строение и связи физических частиц в материале на уровне феноменологии не изучаются и поэтому неизвестны (или известны, но на этом уровне нереализуемы), то способ математического моделирования свойств материалов с использованием различных доступных средств представляется одним из наиболее приемлемых.

Можно считать, что природа граничных нагрузок, массовых сил и сил внутреннего контактного взаимодействия такова, что система распределенных сил, действующих на выделенный для рассмотрения элемент сплошной среды со стороны тела, приводится только к системе равнодействующих сил, имеющей нулевой главный момент. Однако такое предположение не единственно и непроверяемо экспериментально. Поэтому наряду с классической теорией механики деформируемых сред возможны другие способы математического моделирования сложного контактного внутреннего взаимодействия в материале. Очаговый механизм пластической деформации предполагает локализацию зон необратимостей и связывает процессы, происходящие в них, с несовместностью полей деформаций, рассогласованностью полей перемещений и скоростей, деформаций и поворотов, нарушением тождеств Чезаро. Модель очаговой пластичности считает реальный деформируемый континуум смесью обычного упругого континуума и континуума Коссера — плоских прожилок (очагов пластической деформации — зон больших относительных поворотов). Такая модель развития процесса деформаций в материале является достаточно наглядной. В ней процесс необратимых деформаций является сильнонеоднородным: на фоне упругих деформаций основной массы материала при высоких потоках энергии локально, по поверхностям действия максимальных касательных напряжений, в материале возникают разрывы и движение плоскостей по отношению друг к другу. При этом частицы материала, находящиеся между плоскостями, участвуют во вращательном движении с векторами поворотов, лежащими в плоскости разрыва. Сильная диссипация механической энергии (преодоление сил трения) в очаге пластической деформации уменьшает поток энергии, движение в очаге пластической деформации прекращается и происходит частичное восстановление внутренней структуры материала.

В [7] исследовано наличие вихревых решений в виде плоских вихрей в уравнениях совместности. Вычисления проводились в ортогональной декартовой локальной системе координат. Из представления тензора градиента скорости имеем

$$\partial_j v_i \equiv \epsilon^\circ_{ij} + \omega^\circ_{ij}.$$

Тензор скоростей вращений связан с вектором скорости поворота (ротором вектора скорости) формулами

$$\omega^\circ_{23} = -\omega^\circ_1, \quad \omega^\circ_{13} = \omega^\circ_2, \quad \omega^\circ_{12} = -\omega^\circ_3.$$

Для несжимаемого материала $\mathbf{div}\,\overline{v} = 0$. Тогда

$$2\,\mathbf{rot}\,\overline{\omega}^\circ = \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\overline{v} = \mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\overline{v} - \Delta\,\overline{v}.$$

В силу несжимаемости получается уравнение Пуассона для поля вектора скорости

$$\Delta\overline{v} = -2\,\mathbf{rot}\,\overline{\omega}^\circ. \tag{12}$$

Его решения ищутся в виде плоского вихря, расположенного в плоскости переменных (x_1, x_2) локальной системы координат. Тогда только две компоненты вихря ω°_1 и ω°_2 являются ненулевыми, а $\omega^\circ_3 = 0$. Ненулевые компоненты вихря представим разложениями по сингулярным функциям:

$$\omega^\circ_{1,2}(x_1, x_2, x_3, t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega^\circ_{1,2}(x_1, x_2, X, t)\delta(x_3 - X)\,dX =$$

$$\equiv \tilde{\omega}^{\circ}_{1,2}(x_1,x_2,t)\delta(x_3)+\tilde{\omega}^{\circ 1}_{1,2}(x_1,x_2,t)\delta'(x_3)+\tilde{\omega}^{\circ 2}_{1,2}(x_1,x_2,t)\delta''(x_3)+\ldots,$$
$$\omega^{\circ}_3=0.$$

Уравнение (12) в работе [7] проинтегрировано, там же найдены компоненты тензора скоростей деформации

$$\epsilon^{\circ}_{11}=2\partial_1\tilde{\omega}^{\circ}_2\theta(x_3)+\partial_1\varphi_1,\quad \epsilon^{\circ}_{12}=2\partial_2\tilde{\omega}^{\circ}_2\theta(x_3)+\frac{1}{2}(\partial_1\varphi_2+\partial_2\varphi_1),$$
$$\epsilon^{\circ}_{22}=-2\partial_2\tilde{\omega}^{\circ}_1\theta(x_3)+\partial_2\varphi_2,\quad \epsilon^{\circ}_{33}=-2\Phi(t)\theta(x_3)-\Psi(t),\quad \epsilon^{\circ}_{13}=\tilde{\omega}^{\circ}_2\delta(x_3),\quad \epsilon^{\circ}_{23}=-\tilde{\omega}^{\circ}_1\delta(x_3)$$

и компоненты скорости

$$v_1(x_1,x_2,x_3,t)=2\tilde{\omega}^{\circ}_2\theta(x_3)+2\tilde{\omega}^{\circ 1}_2\delta(x_3)+\ldots,$$
$$v_2(x_1,x_2,x_3,t)=-2\tilde{\omega}^{\circ}_1\theta(x_3)-2\tilde{\omega}^{\circ 1}_1\delta(x_3)-\ldots,$$
$$v_3(x_3,t)=-2\Phi(t)|x_3|-2\Phi^1(t)\theta(x_3)-\ldots,$$

выраженные через произвольные плоские гармонические функции типа $\varphi_{1,2}$ и $\tilde{\omega}_{1,2}$ и произвольные функции времени $\Phi(t)$, $\Psi(t)$, которые естественно связать с временем жизни очагов деформации. В этих формулах $\theta(x_3)$ — одномерная функция Хевисайда. Аналогичные представления имеют слагаемые, содержащие старшие производные δ-функций Дирака. В [7] показано, что найденное поле тензора скоростей деформации удовлетворяет в обобщенном смысле уравнениям совместности.

Очаговый механизм пластичности порождает необходимость появления поворотов в теории и, следовательно, несимметрии тензора напряжений. Для этого достаточно легализовать в теории деформации рассмотренные выше типы движений, т.е. очаговый механизм пластичности. Появление дополнительной степени свободы влечет проблему связывания этих векторов между собой определяющими уравнениями. Поскольку новые величины являются трехмерными векторами, то проблему определяющих уравнений будем решать так же, как связывание пятимерных векторов напряжений и деформации. Так, получаются следующие уравнения:

$$\delta\overline{\sigma}^a=N^a\delta\overline{\omega}+(P^a-N^a)(\overline{n}^a_\sigma,\delta\overline{\omega})\overline{n}^a_\sigma+\frac{P^a-N^a}{\psi}(\overline{n}^a_\sigma-(\overline{n}_\omega,\overline{n}^a_\sigma)\overline{n}_\omega),\delta\overline{\omega})(\overline{n}^a_\sigma-(\overline{n}^a_\sigma,\overline{n}_\omega)\overline{n}_\omega),\tag{13}$$

$$\delta\overline{\omega}=\frac{\delta\overline{\sigma}^a}{N^a}+\left(\frac{1}{P^a}-\frac{1}{N^a}\right)(\overline{n}_\omega,\delta\overline{\sigma}^a)\overline{n}_\omega+\left(\frac{1}{P^a}-\frac{1}{N^a}\right)\frac{1}{\psi}(\overline{n}_\omega-(\overline{n}^a_\sigma,\overline{n}_\omega)\overline{n}^a_\sigma,\delta\overline{\sigma}^a)(\overline{n}_\omega-(\overline{n}^a_\sigma,\overline{n}_\omega)\overline{n}^a_\sigma).\tag{14}$$

Здесь $\psi\equiv(\overline{n}^a_\sigma,\overline{n}_\omega)$ — скалярное произведение трехмерных векторов поворота и моментных напряжений.

4. Локальные уравнения состояния дифференциального типа с диссипативными напряжениями. Математическое моделирование необратимых процессов в механике требует физически адекватного отображения в рамках модели важнейшей физической категории — диссипации энергии. Определяющие уравнения (5), (6) и другие имеют вид нелинейно-упругих, но с добавочными диссипативными напряжениями. Поэтому моделирование необратимых процессов достигается за счет изменения коэффициентных функций/функционалов при переходе через границу необратимости и диссипативных напряжений. Определяющие уравнения (9), (10) (или (8), (11)) перепишем в виде

$$\delta\overline{\sigma}=N\delta\overline{\varepsilon}+(P-N)(\overline{n}_\sigma,\delta\overline{\varepsilon})\overline{n}_\sigma+\delta\overline{\sigma}_D,\quad \delta\overline{\sigma}_D\equiv\frac{P-N}{\Psi}(\overline{n}_\varepsilon-(\overline{n}_\sigma,\overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\sigma),\delta\overline{\varepsilon})(\overline{n}_\varepsilon-(\overline{n}_\sigma,\overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\sigma),$$

$$\delta\overline{\varepsilon}=\frac{\delta\overline{\sigma}}{N}+\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{N}\right)(\overline{n}_\varepsilon,\delta\overline{\sigma})\overline{n}_\varepsilon+\delta\overline{\varepsilon}_D,\quad \delta\overline{\varepsilon}_D\equiv\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{N}\right)\frac{1}{\Psi}(\overline{n}_\sigma-(\overline{n}_\sigma,\overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\varepsilon,\delta\overline{\sigma})(\overline{n}_\sigma-(\overline{n}_\sigma,\overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\varepsilon)).$$

Уравнения такого типа называем определяющими уравнениями с диссипативными напряжениями. Очевидно, что все уравнения, которые были получены ранее, являются уравнениями такого типа. В этих моделях диссипативные напряжения или диссипативные деформации выделены и известны. Вычислим элементарную работу диссипативных напряжений в процессе нагружения и дополнительную работу в процессе деформации, получим соотношения

$$(\overline{\sigma},\delta\overline{\varepsilon})=\sigma\left(\frac{\delta\sigma}{N}\left(1-\frac{P}{N}\right)(\overline{n}_\sigma,\overline{n}_\varepsilon)\delta\varepsilon\right)+(\overline{\sigma},\delta\overline{\varepsilon}_D),\quad (\overline{\sigma},\delta\overline{\varepsilon}_D)=\sigma\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{N}\right)(\delta\sigma-P(\overline{n}_\sigma,\overline{n}_\varepsilon)\delta\varepsilon)\tag{15}$$

$$(\overline{\varepsilon}, \delta\overline{\sigma}) = \varepsilon \left(N\delta\varepsilon + \left(1 - \frac{N}{P}\right)(\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\delta\sigma \right) + (\overline{\varepsilon}, \delta\overline{\sigma}_D), \quad (\overline{\varepsilon}, \delta\overline{\sigma}_D) = \varepsilon(P - N)(\delta\varepsilon - P\delta\varepsilon(\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)). \quad (16)$$

Фактически формулы (15), (16) выделяют из состава элементарной работы ее диссипативную часть, которая войдет в функцию диссипации энергии. Аналогичные формулы получим для элементарной работы моментных напряжений на возможных поворотах:

$$(\overline{\sigma}^a, \delta\overline{\omega}) = \sigma^a \left(\frac{\delta\sigma^a}{N^a} \left(1 - \frac{P^a}{N^a}\right)(\overline{n}^a_\sigma, \overline{n}_\omega)\delta\omega \right),$$

$$(\overline{\sigma}^a, \delta\overline{\omega}_D) = \sigma^a \left(\frac{1}{P^a} - \frac{1}{N^a} \right)(\delta\sigma^a - P^a(\overline{n}^a_\sigma, \overline{n}_\omega)\delta\omega),$$

$$(\overline{\omega}, \delta\overline{\sigma}^a) = \omega \left(N^a\delta\omega + \left(1 - \frac{N^a}{P^a}\right)(\overline{n}^a_\sigma, \overline{n}_\omega)\delta\sigma^a \right),$$

$$(\overline{\omega}, \delta\overline{\sigma}^a_D) = \omega(P^a - N^a)(\delta\omega - P^a\delta\omega(\overline{n}^a_\sigma, \overline{n}_\omega)).$$

Здесь тоже выделены необратимые повороты (зоны Коссера), а следовательно, и области необратимой части моментных напряжений. Все отмеченные необратимости аддитивно складываются и образуют функцию диссипации энергии.

Подводя итог, заметим, что в очаговой модели динамической пластичности соседствуют два подхода. Первый (классический) — с симметричным тензором напряжений, обратимыми и необратимыми деформациями, определяющими уравнениями (8)–(11) и известными диссипативными напряжениями. Второй — с несимметричным тензором напряжений, уравнениями (13), (14), обратимыми и необратимыми поворотами, известными диссипативными моментными напряжениями.

5. Выводы. 1. Предложен новый подход к математическому моделированию процессов сложного нагружения.

2. Сформулирован математический принцип, согласно которому в определяющие уравнения процесса простого нагружения/деформации добавляются гироскопические обобщенные силы и потоки, не совершающие работы в соответствующего вида процессах нагружения и деформации, и в котором устанавливается эквивалентность уравнений прямого и обратного процессов.

3. Получен новый класс определяющих уравнений в вариациях с тремя функционалами состояния.

4. Построены определяющие уравнения упругопластических процессов при мягком и жестком нагружениях. Установлена их связь с трехчленной формулой Ильюшина и современными теориями пластического течения.

5. Сформулирована математическая модель очагового механизма пластичности, в которой реальный деформируемый континуум представляется смесью упругопластического континуума и континуума Коссера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А.* Функционалы и меры необратимости на множестве процессов в механике сплошной среды (МСС) // Докл. РАН. 1994. **337**, № 1. 48–50.
2. *Ильюшина Г.А.* О решениях термодинамического уравнения для функционала реакции в пространстве непрерывно дифференцируемых процессов // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1996. № 2. 75–79.
3. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
4. *Кунин И.А.* Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975.
5. *Огибалов П.М., Тамбовцев Е.П., Молодцов И.Н.* Нелокальная теория структурированных композитных материалов // Механ. композит. материалов. 1984. **3**. 408–416.
6. *Огибалов П.М., Тамбовцев Е.П., Молодцов И.Н.* Динамическая калибровка диссипации в композитных нелокальных средах // Механ. композит. материалов. 1985. **2**. 17–24.
7. *Молодцов И.Н.* Очаговый механизм пластичности и динамическая калибровка уравнений состояния // Изв. ТулГУ. Сер. Матем. Механ. Информ. 2000. **6**, вып. 2. 116–119.

Поступила в редакцию
29.12.2022