

Механика

УДК 539.3

О МЕТОДЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕОДНОРОДНЫХ ПОЛЕЙ
ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙЭ. Б. Завойчинская¹, А. С. Плотников²

Представляется численно-аналитический метод определения трехмерного неоднородного поля упругих остаточных напряжений по данным оптических измерений компонент вектора перемещений при пошаговом сверлении отверстий. Определяющие соотношения для компонент вектора перемещений как функций трех переменных (в плоскости отверстия и по его глубине) записываются в виде интегральных операторов Вольтерры. Дается алгоритм нахождения базовых функций. Восстановленные по предложенному методу компоненты тензора напряжений хорошо согласуются с известным решением задачи, в которой остаточное напряженное состояние сформировано изгибом бруса из упруго-идеальнопластического материала.

Ключевые слова: неоднородное остаточное напряжение, метод пошагового сверления отверстий, цифровая спекл-интерферометрия, корреляция цифровых изображений, оператор Вольтерры.

A numerical-analytical method of three-axial inhomogeneous elastic residual stress determination based on the data of the displacement optical measurement during the incremental hole drilling method is presented. The constitutive relations for the displacements as the three variable functions (in plane of the hole and along its depth) are represented by the Volterra integral operators. A method of finding the basic functions is given. The stress tensor components recovered by the proposed method are in good agreement with the well-known solution of a problem where the residual stresses are formed by bending an elastic-ideally plastic beam.

Key words: inhomogeneous residual stress, incremental hole drilling method, DSPI, DIC, Volterra operator.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-7

В проблеме оценки ресурса современных инженерных систем в связи с усложнением технологических процессов, в том числе методов поверхностного упрочнения, задачи расчетно-экспериментального определения остаточных напряжений не теряют своей актуальности. В силу сложностей моделирования случайных процессов нагружения на стадии производства сохраняется необходимость применения экспериментальных методов определения полей деформаций и перемещений и методов идентификации поля остаточных напряжений на основе этих данных путем решения обратных задач механики деформируемого твердого тела [1–3].

В результате проведенного анализа экспериментальных методов (механических, основанных на регистрации деформации тела при образовании новых поверхностей, прямых методов измерения расстояний между атомными плоскостями кристаллической решетки и корреляционных методов измерения величин, имеющих корреляционную связь с действующими в теле напряжениями и деформациями) авторами сделан вывод, что наибольший интерес представляет метод сверления отверстий (стандарт ASTM E837 [4]) в сочетании с оптическими методами измерения компонент вектора перемещений (цифровой спекл-интерферометрией (DSPI) или корреляцией цифровых изображений (DIC)) и автоматизации процессов обработки данных [5]. На рис. 1, а приведен комбинированный прибор сверления отверстий с DSPI (SB — база, DM — модуль сверления, MM — модуль измерений). На рис. 1, б показаны стандартные тензометрические розетки для определения поля остаточных

¹ Завойчинская Элеонора Борисовна — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: eleonor.zavoychinskaya@math.msu.ru.

Zavoychinskaya Eleonora Borisovna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Elasticity Theory.

² Плотников Александр Сергеевич — асп. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: asp.model.gk@gmail.com.

Plotnikov Aleksandr Sergeevich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Elasticity Theory.

деформаций, которые возникают при разгрузке соответствующих областей тела. На рис. 1, б представлена типичная интерферограмма, полученная по методу DSPI, на рис. 1, в — изображение по методу DIC.

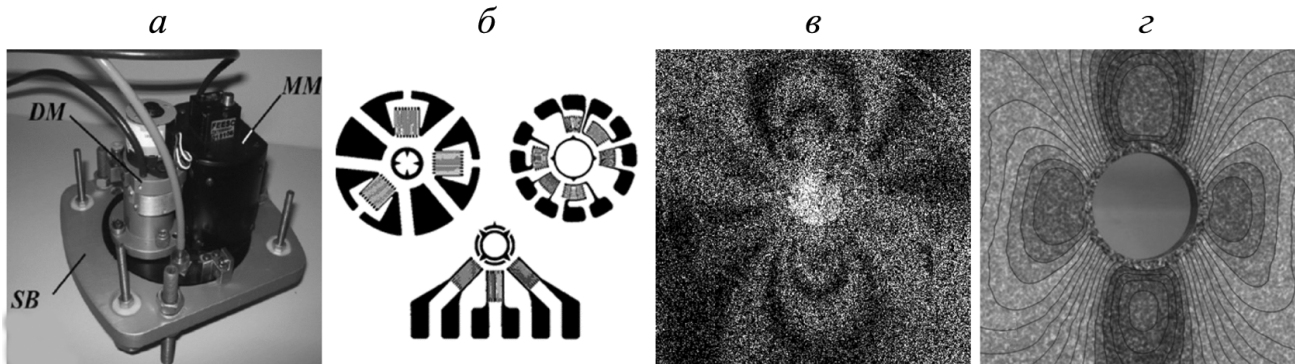


Рис. 1

В настоящей работе предлагается численно-аналитический метод определения трехмерного неоднородного остаточного напряженно-деформированного состояния на основе оптических измерений компонент вектора перемещений при пошаговом сверлении отверстий.

1. Определение однородного поля остаточных упругих напряжений по результатам тензометрирования [4]. Согласно методике стандарта ASTM E837, компоненты тензора напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} определяются по результатам измерения деформаций ε^I , ε^{II} , ε^{III} на тензометрах (в лабораторной системе координат (x, y, z) ось z направлена перпендикулярно поверхности образца вглубь, оси x и y расположены в плоскости свободной поверхности и совпадают по направлениям с соответствующими тензометрами) так:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E(\varepsilon^{III} - \varepsilon^I)}{2b} - \frac{E(\varepsilon^{III} + \varepsilon^I)}{2a(1 + \nu)}, \\ \sigma_y = \frac{-E(\varepsilon^{III} - \varepsilon^I)}{2b} - \frac{E(\varepsilon^{III} + \varepsilon^I)}{2a(1 + \nu)}, \\ \tau_{xy} = \frac{-E(\varepsilon^{III} + \varepsilon^I - 2\varepsilon^{II})}{2b}, \end{cases} \quad (1)$$

где a и b — базовые константы, которые находятся конечно-элементным расчетом для упругого полупространства с отверстием в условиях одноосного растяжения на бесконечности (или на контуре отверстия); E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона.

2. Определение однородного поля остаточных упругих напряжений по результатам измерений компонент вектора перемещений. Согласно известным методам определяются тангенциальные компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}_i = (u_i, v_i)$ в точках среды (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, I$, для которых записываются определяющие соотношения. При этом возможна обработка большого количества точек. Таким образом формируется переопределенная система уравнений следующего вида (в цилиндрической системе координат (r, θ)):

$$\begin{aligned} u_i &= \sigma_x f(r_i, \theta_i) - \sigma_y g\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) + \tau_{xy} h_1(r_i, \theta_i) \frac{\sqrt{2}}{2} + u_0, \\ v_i &= \sigma_x g(r_i, \theta_i) + \sigma_y f\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) + \tau_{xy} h_2(r_i, \theta_i) \frac{\sqrt{2}}{2} + v_0, \end{aligned} \quad i = 1, \dots, I, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} h_1(r_i, \theta_i) &= f\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{4}\right) + f\left(r_i, \theta_i - \frac{3\pi}{4}\right) - g\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{4}\right) + g\left(r_i, \theta_i - \frac{3\pi}{4}\right), \\ h_2(r_i, \theta_i) &= f\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{4}\right) - f\left(r_i, \theta_i - \frac{3\pi}{4}\right) + g\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{4}\right) + g\left(r_i, \theta_i - \frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Базовые функции $f = f(r_i, \theta_i)$ и $g = g(r_i, \theta_i)$, представляющие собой продольные и поперечные перемещения соответственно на поверхности тела под действием единичного растягивающего напря-

жения в направлении $\theta = 0$, определяются с помощью конечно-элементного расчета. Компоненты перемещений u_0, v_0 добавляются для учета возможного перемещения тела как жесткого целого.

Переопределенная система уравнений (2) разрешается относительно σ_x, σ_y и τ_{xy} методами оптимизации (например, методом наименьших квадратов). Так как координаты (r_i, θ_i) каждой точки заранее неизвестны, базовые функции аппроксимируются аналитическими выражениями либо интерполируются. Это позволяет вычислять значения в любой произвольно заданной точке измерений. Применяются модифицированные решения типа Кирша, снабженные дополнительными членами, например для глухого отверстия в массивном теле в виде

$$f(r_i, \theta_i) = \cos \theta \left(\frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^{1,5}} + \frac{C_3}{r^3} \right) + \cos^3 \theta \left(\frac{C_4}{r} + \frac{C_5}{r^{1,5}} + \frac{C_6}{r^3} \right),$$

$$g(r_i, \theta_i) = \sin \theta \left(\frac{S_1}{r} + \frac{S_2}{r^{1,5}} + \frac{S_3}{r^3} \right) + \sin^3 \theta \left(\frac{S_4}{r} + \frac{S_5}{r^{1,5}} + \frac{S_6}{r^3} \right).$$

Константы C_k и $S_k, k = 1, \dots, 6$, вычисляются для конкретной геометрии (для соотношения глубины и диаметра отверстия) при помощи конечно-элементного расчета.

3. Определение неоднородных по глубине остаточных упругих напряжений по результатам тензометрирования [4]. Согласно стандарту ASTM E837, для определения неоднородных по глубине напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} рассматривается ступенчатое увеличение глубины отверстия h по оси z с шагом по глубине $j = 1, \dots, J$ и регистрируется деформированное состояние на каждом шаге заглубления. Для компонент напряжений предлагается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{AP} = \frac{E}{1 + \nu} \mathbf{p}, \\ \mathbf{BQ} = E \mathbf{q}, \\ \mathbf{BT} = E \mathbf{t}, \end{cases} \quad (3)$$

где элементы векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{t}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$ и \mathbf{T} вычисляются таким образом:

$$p_j = \frac{\varepsilon_j^{III} + \varepsilon_j^I}{2}, \quad q_j = \frac{\varepsilon_j^{III} - \varepsilon_j^I}{2}, \quad t_j = \frac{\varepsilon_j^{III} + \varepsilon_j^I - 2\varepsilon_j^{II}}{2}, \quad j = 1, \dots, J,$$

$$P_j = \frac{\sigma_{y,j} + \sigma_{x,j}}{2}, \quad Q_j = \frac{\sigma_{y,j} - \sigma_{x,j}}{2}, \quad T_j = \tau_{xy,j},$$

Система (3) представляет собой обобщение системы (1). Полагается, что в пределах каждого шага по глубине j компоненты напряжений постоянны: $\sigma_{x,j} = \text{const}, \sigma_{y,j} = \text{const}, \tau_{xy,j} = \text{const}, j = 1, \dots, J$. Элементы $a_{jk}, b_{jk}, k, j = 1, \dots, J$, матриц базовых коэффициентов \mathbf{A} и \mathbf{B} соответственно устанавливаются конечно-элементным расчетом для упругого полупространства с отверстием в условиях одноосного растяжения на бесконечности (или на контуре отверстия). Например, коэффициент $a_{jk}, k, j = 1, \dots, J$, определяет деформацию при снятии единичных остаточных напряжений в слое k в теле с отверстием глубиной j слоев [4, 5].

Этот метод нашел широкое применение, однако имеет несколько существенных недостатков. Во-первых, он чувствителен к точности позиционирования отверстия относительно розетки (необходимо совпадение оси отверстия с геометрическим центром розетки), а глубина шагов высверливания отверстия должна строго соответствовать значениям, заданным в стандарте. Во-вторых, матрицы базовых коэффициентов \mathbf{A} и \mathbf{B} в системе (2) слабо обусловлены. Эти недостатки приводят к большим погрешностям при вычислениях напряжений. Стандартом ASTM E837 рекомендуется применять метод регуляризации, например использовать регуляризацию по Тихонову.

4. Численно-аналитический метод определения неоднородных по глубине остаточных упругих напряжений. На наш взгляд, частично снять недостатки метода [4] для определения неоднородных по глубине остаточных напряжений возможно с использованием экспериментально определяемых компонент вектора перемещений, например, методами DSP1 или DIC [5]. В известных публикациях по результатам измерения перемещений определяются компоненты тензора деформаций, а затем задача сводится к решению системы (3).

Предлагаемый в настоящей работе подход состоит в следующем [5]. Рассматривается напряженное состояние вида $\sigma_x = \sigma_x(z), \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. В силу линейности задачи трехмерное

напряженное состояние будет рассматриваться в виде суммы таких состояний. При непрерывном увеличении глубины отверстия h компоненты вектора перемещений $\mathbf{u} = (u, v)$ запишутся в виде [5–7]

$$\begin{aligned} u(r, \theta, h) &= \int_0^h C(r, \theta, h, z) \sigma_x(z) dz, \\ v(r, \theta, h) &= \int_0^h S(r, \theta, h, z) \sigma_x(z) dz. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) представляют собой интегральные уравнения Вольтерры 1-го рода. Базовые функции — ядра интегрального оператора $C = C(r, \theta, h, z)$ и $S = S(r, \theta, h, z)$ — определяют перемещения на поверхности тела (при $z = 0$) с отверстием глубиной h в случае приложения на слой, залегающий на глубине z , единичных растягивающих напряжений.

Система уравнений для i -й точки среды записывается так:

$$\begin{aligned} u_i(r, \theta, h) &= \int_0^h C(r_i, \theta_i, h, z) \sigma_x(z) dz - \int_0^h S(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}, h, z) \sigma_y(z) dz + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^h T_1(r_i, \theta_i, h, z) \tau_{xy}(z) dz, \\ v_i(r, \theta, h) &= \int_0^h S(r_i, \theta_i, h, z) \sigma_x(z) dz + \int_0^h C(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}, h, z) \sigma_y(z) dz + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^h T_2(r_i, \theta_i, h, z) \tau_{xy}(z) dz, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} T_1(r, \theta, h, z) &\equiv C(r, \theta - \frac{\pi}{4}, h, z) + C(r, \theta - \frac{3\pi}{4}, h, z) - S(r, \theta - \frac{\pi}{4}, h, z) + S(r, \theta - \frac{3\pi}{4}, h, z), \\ T_2(r, \theta, h, z) &\equiv C(r, \theta - \frac{\pi}{4}, h, z) - C(r, \theta - \frac{3\pi}{4}, h, z) + S(r, \theta - \frac{\pi}{4}, h, z) + S(r, \theta - \frac{3\pi}{4}, h, z). \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, метод определения неравномерных по глубине остаточных напряжений заключается в решении двух задач — определение базовых функций в уравнениях (4) и построение способа решения системы (5). В работе [5] получены следующие выражения для базовых функций в (5), (6):

$$\begin{aligned} C(r, \theta, h, z) &= \frac{r_0 \cos \theta}{4\mu} \left(u_p(r, h, z) - u_q(r, h, z) - 2v_q(r, h, z) + 2 \cos^2 \theta (u_q(r, h, z) + v_q(r, h, z)) \right), \\ S(r, \theta, h, z) &= \frac{r_0 \sin \theta}{4\mu} \left(u_p(r, h, z) + u_q(r, h, z) + 2v_q(r, h, z) - 2 \sin^2 \theta (u_q(r, h, z) + v_q(r, h, z)) \right), \\ T_1(r, \theta, h, z) &= \frac{r_0 \sqrt{2} \sin \theta}{2\mu} \left(2u_q(r, h, z) + v_q(r, h, z) - 2 \sin^2 \theta (u_q(r, h, z) + v_q(r, h, z)) \right), \\ T_2(r, \theta, h, z) &= \frac{r_0 \sqrt{2} \cos \theta}{2\mu} \left(2u_q(r, h, z) + v_q(r, h, z) - 2 \cos^2 \theta (u_q(r, h, z) + v_q(r, h, z)) \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где r_0 — радиус цилиндрического глухого отверстия. Для определения функций $u_p = u_p(r, h, z)$, $u_q = u_q(r, h, z)$ и $v_q = v_q(r, h, z)$ в (10) при помощи численного моделирования рассматривается серия из M задач о теле с удаленными границами и отверстиями глубиной h_j , $j = 1, \dots, J$, $h_1 < \dots < h_J$, нагруженными на каждом слое толщиной dz , расположенном на глубине z ($z \leq h_j$). Если принять шаг приращения глубины отверстия, минимальную глубину отверстия h_1 и толщину слоя одинаковыми и равными dz , то требуется решить число задач, равное $M = \frac{1}{2} \left(\frac{h_J - dz}{dz} + 1 \right) \left(\frac{h_J - dz}{dz} + 2 \right)$.

Необходимо оптимизировать вычислительную сложность отдельной задачи (не понижая при этом точность) и автоматизировать процесс вычислений. Автоматизация вычислений достигается применением специальных осегармонических элементов и внедрением в вычислительный алгоритм программных вставок, обеспечивающих циклическое повторение вычислений после модификации геометрии и граничных условий модели. В [5] представлены результаты проведенных численных расчетов компонент перемещений $u_p = u_p(r, h, z)$, $u_q = u_q(r, h, z)$ и $v_q = v_q(r, h, z)$ в зависимости от радиуса r и глубины z нагруженного слоя для четырех случаев глубины отверстия $h/r_0 = 0.2; 0.5; 1.5; 3$.

Определены численные значения базовых функций $C = C(r, \theta, h, z)$ и $S = S(r, \theta, h, z)$ согласно (7). Вычислены компоненты тензора деформаций на поверхности тела в зависимости от глубины отверстия, которые согласуются с данными стандарта ASTM E837 и находятся в соответствии с известными экспериментальными данными [8].

При современном состоянии экспериментальных исследований не представляется возможной непрерывная регистрация перемещений на поверхности тела в процессе наращивания отверстия, позволяющая определять компоненты $\sigma_x(z)$, $\sigma_y(z)$ и $\tau_{xy}(z)$ как непрерывные функции при решении системы (5). Предлагается их представить ступенчатыми функциями, положив величину напряжений постоянной в пределах каждого шага по глубине отверстия, в следующем виде:

$$\sigma_x(z) = \begin{cases} \sigma_x^1, & 0 < z < z_1; \\ \sigma_x^2, & z_1 < z < z_2; \\ \dots & \\ \sigma_x^n, & z_{n-1} < z < z_n, \end{cases} \quad \sigma_y(z) = \begin{cases} \sigma_y^1, & 0 < z < z_1; \\ \sigma_y^2, & z_1 < z < z_2; \\ \dots & \\ \sigma_y^n, & z_{n-1} < z < z_n, \end{cases} \quad \tau_{xy}(z) = \begin{cases} \tau_{xy}^1, & 0 < z < z_1; \\ \tau_{xy}^2, & z_1 < z < z_2; \\ \dots & \\ \tau_{xy}^n, & z_{n-1} < z < z_n. \end{cases}$$

В этом случае выражения (5) можно записать в виде сумм интегралов:

$$\begin{aligned} u_i(z_n) &= \sum_{j=1}^n \sigma_x^j \int_{z_{j-1}}^{z_j} C(r_i, \theta_i, z_n, z) dz - \sum_{j=1}^n \sigma_y^j \int_{z_{j-1}}^{z_j} S(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}, z_n, z) dz + \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \tau_{xy}^j \int_{z_{j-1}}^{z_j} T_1(r_i, \theta_i, z_n, z) dz + u_0, \\ v_i(z_n) &= \sum_{j=1}^n \sigma_x^j \int_{z_{j-1}}^{z_j} S(r_i, \theta_i, z_n, z) dz + \sum_{j=1}^n \sigma_y^j \int_{z_{j-1}}^{z_j} C(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}, z_n, z) dz + \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \tau_{xy}^j \int_{z_{j-1}}^{z_j} T_2(r_i, \theta_i, z_n, z) dz + v_0. \end{aligned} \tag{8}$$

После этого задача сводится к решению переопределенной матричной системы, в которой в качестве вектора свободных членов выступают экспериментально измеренные перемещения, матрица коэффициентов формируется из интегралов уравнения (8), а вектор неизвестных содержит в себе компоненты напряжений на каждом слое и перемещения тела как жесткого целого следующего вида:

$$\begin{pmatrix} u_1^1 \\ v_1^1 \\ u_2^1 \\ \vdots \\ u_1^2 \\ \vdots \\ v_1^J \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^1(z_1) & s_1^1(z_1) & t_1^1(z_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ s_1^1(z_1) & c_1^1(z_1) & t_1^1(z_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ c_2^1(z_1) & s_2^1(z_1) & t_2^1(z_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1^2(z_1) & s_1^2(z_1) & t_1^2(z_1) & c_1^2(z_2) & s_1^2(z_2) & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_1^J(z_1) & c_1^J(z_1) & t_1^J(z_1) & s_1^J(z_2) & c_1^J(z_2) & \dots & t_1^J(z_J) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x^1 \\ \sigma_y^1 \\ \tau_{xy}^1 \\ \sigma_x^2 \\ \sigma_y^2 \\ \vdots \\ \tau_{xy}^J \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

5. Тестирование метода. Для проверки работоспособности метода проведен конечно-элементный расчет следующей задачи. Остаточное напряженное состояние сформировано чистым изгибом бруса из упругоидеальнопластического материала прямоугольного поперечного сечения высотой $h = 10$ мм и шириной $b = 50$ мм. Удаленный от точки измерения остаточных напряжений конец бруса изгибался на угол, равный $\alpha = \frac{1.5\sigma_T l}{Eh}$, где l — длина бруса, σ_T — предел текучести, а E — модуль Юнга материала. После частичной разгрузки до угла $\alpha = 0$ такой брус имеет известное распределение напряжений по сечению, рассчитанное в балочном приближении. В рамках теста,

поскольку ширина поперечного сечения рассматриваемого бруса превышает его высоту, за точное решение в напряжениях принимались результаты, полученные из решения задачи непосредственно на модели. После разгрузки бруса проводилось послойное удаление материала из отверстия радиусом $r_0 = 1$ мм шагами по глубине, равными $0.2r_0$, вплоть до сквозного с записью значений узловых перемещений на каждом слое. Перемещения записывались для области радиусом до $7.5r_0$. Полученные перемещения рассматривались как экспериментальные и подавались на вход для обработки описанным выше методом.

На рис. 2 столбчатými диаграммами показаны напряжения, восстановленные в результате решения уравнения (9), а сплошными линиями — точное решение. Компонента σ_x восстанавливается достаточно точно вплоть до глубины 5 мм ($5r_0$), что заведомо превышает диапазон чувствительности современных методов измерения перемещений. Компонента σ_y точно восстанавливается до глубины 2 мм ($2r_0$), однако следует отметить, что заметная ошибка на более высоких глубинах связана с эффектом малой базы этой компоненты (максимальные значения σ_y составляют менее 10% от значений σ_x). Тот же эффект имеет место и для компоненты τ_{xy} , на всем диапазоне глубин наблюдается ошибка величиной до 0.5 МПа.

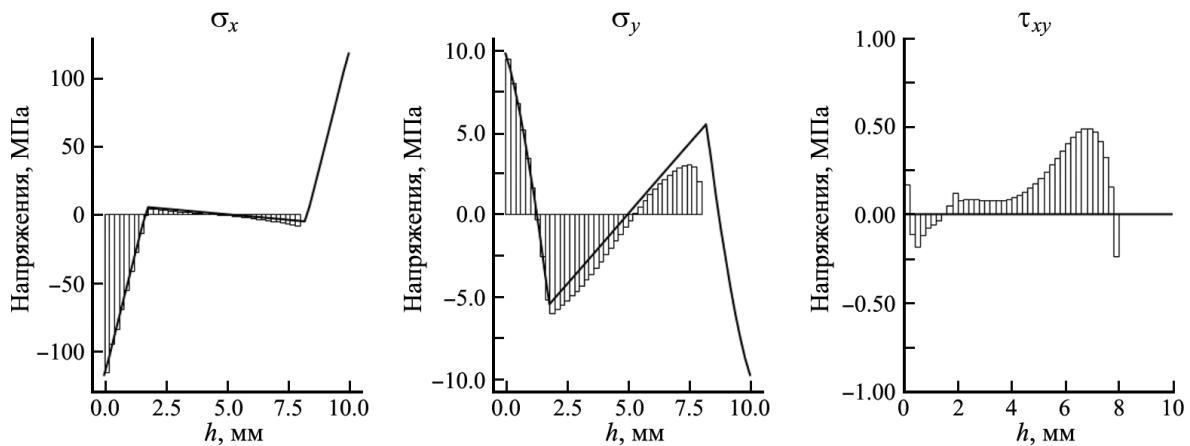


Рис. 2

6. Определение неоднородных в плоскости остаточных упругих напряжений. В работах одного из авторов [9, 10] проводится обобщение рассмотренного выше метода на случай неоднородных в плоскости напряжений. Предлагается уравнения (2) дополнить членами с производными от главных компонент тензора напряжений $\sigma_1(z)$, $\sigma_2(z)$ таким образом:

$$\begin{aligned}
 u_i &= \sigma_1 f(x_i, y_i) + \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} p(x_i, y_i) + \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} s(x_i, y_i) + \sigma_2 g(x_i, y_i) + \\
 &\quad + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} t(x_i, y_i) + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} q(x_i, y_i) + u_0, \\
 v_i &= \sigma_1 g(x_i, y_i) + \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} q(x_i, y_i) + \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} t(x_i, y_i) + \sigma_2 f(x_i, y_i) + \\
 &\quad + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} s(x_i, y_i) + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} p(x_i, y_i) + v_0,
 \end{aligned}
 \quad i = 1, \dots, I, \quad (10)$$

где $p = p(x_i, y_i)$, $q = q(x_i, y_i)$, $t = t(x_i, y_i)$ и $s = s(x_i, y_i)$ — дополнительные базовые функции, которые находятся по аналогии с (2). Проводится конечно-элементный расчет двух упругих задач с граничными условиями растяжения по оси x с градиентом нагрузки по оси x в одной задаче и градиентом по оси y в другой, из которых определяются независимо базовые функции $p = p(x_i, y_i)$, $q = q(x_i, y_i)$, $t = t(x_i, y_i)$ и $s = s(x_i, y_i)$. Число экспериментальных точек I выбирается из условия, чтобы система уравнений (10) была переопределенной системой. Решение этой системы ищется методом наименьших квадратов. Путем численных экспериментов может быть произведена статистическая оценка минимальных уровней компонент градиентов остаточных напряжений, при которых их необходимо учитывать в выражениях (10). По этому методу обработан ряд интерферограмм. Результаты обработки приведены в [10].

Заключение. В настоящей работе предлагается численно-аналитический метод определения неоднородных (по глубине и в плоскости) остаточных напряжений по данным измерений компонент перемещений средствами DSPI и DIC путем пошагового сверления отверстий. Определяющие соотношения для компонент вектора перемещений как функций цилиндрических координат и глубины отверстия записываются в виде интегральных операторов Вольтерры. Дается алгоритм и проводится численное моделирование базовых функций. Полученные результаты согласуются с известными экспериментальными данными и расчетными значениями компонент тензора деформаций поверхности тела в зависимости от глубины отверстия по стандарту ASTM E837.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schajer G.S.* Optical hole drilling residual stress calculations using strain gauge formalism // Exp. Mech. 2021. N 61. 1369–1380.
2. *Razumovskii I.A., Usov S.M.* Development of the hole-drilling method as applied to the study of inhomogeneous residual stress fields // J. Machinery Manufacture and Reliability. 2021. 50, N 8. 727–734 (DOI: 10.3103/S1052618821080100).
3. *Kohri A., Mikami T., Suzuki Y.* Residual stress measurement of the engineering plastics by the hole-drilling strain-gage method // ECRS-10 Materials Research Forum LLC, Materials Research Proc. 2018. N 6. 101–106 (DOI: 10.21741/9781945291890-17).
4. ASTM E 837-13a. Standart Test Method for Determining Residual Stresses by the Hole-Drilling Strain-Gage Method. 0301st ed. Philadelphia: ASTM International, 2013.
5. *Завойчинская Э.Б., Плотников А.С.* О методе определения неоднородного поля остаточных напряжений с использованием цифровой спекл-интерферометрии и метода сверления отверстий // Композиты и наноструктуры. 2022. 14, № 1 (53). 16–30.
6. *Petrucci G., Scafidi M.* A new procedure for the evaluation of residual stresses by the hole drilling method based on Newton–Raphson technique // JCPDS-International Centre for Diffraction Data. Palermo, 2009. 643–650.
7. *Махутов Н.А., Разумовский И.А.* Методы анализа полей остаточных напряжений в пространственных деталях // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2017. 83, № 1. 56–64.
8. *Wern H.* Finite-element solutions for mechanical drilling methods: A new integral formalism // J. Comput. and Appl. Math. 1995. N 63. 365–372.
9. *Каракозов Е.В., Одинцев И.Н., Плотников А.С., Плугатарь Т.П.* Оценка высокоградиентных компонент остаточных напряжений по данным метода сверления зондирующих отверстий // XXXI Междунар. инновацион. конф. молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС 2019): Сб. тр. конф. М., 2020. 90–93.
10. *Karakozov E., Odintsev I., Plotnikov A., Plugatar T.* Determination of high-gradient components of residual stress by data of test hole drilling method // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. Int. Conf. of Young Scientists and Students. Topical Problems of Mechanical Engineering (ToPME 2019). Moscow, 2020. 1–7.

Поступила в редакцию
08.12.2022

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ С ДИССИПАТИВНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

И. Н. Молодцов¹

Получен новый класс определяющих уравнений процессов сложного нагружения с тремя функционалами состояния и новый метод математического моделирования. Сформулирован математический принцип, согласно которому физически корректные уравнения состояния изменяются за счет включения в них гироскопических слагаемых, не совершающих механической работы. Построены определяющие уравнения процессов сложного

¹ *Молодцов Игорь Николаевич* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mechmathmsu@mail.ru.

Molodtsov Igor Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Elasticity.