13. *Вьюгин В.В.* О минимальных нумерациях вычислимых классов рекурсивно-перечислимых множеств // Докл. АН СССР. 1973. **212**, № 2. 273–275.
14. *Марченков С.С.* О существовании семейств без позитивных нумераций // Матем. заметки. 1973. **13**, № 4. 597–604.
15. *Бадаев С.А.* Минимальные нумерации // Тр. Ин-та математики СО РАН. 1993. **25**. 3–34.
16. *Friedberg R.M.* Three theorems on recursive enumeration. I. Decomposition. II. Maximal set. III. Enumeration without duplication // J. Symb. Log. 1958. **23**, N 3. 309–316.
17. *Гончаров С.С., Лемпп С., Соломон Д.* Фридберговские нумерации семейств n-вычислимо перечислимых множеств // Алгебра и логика. 2002. **41**, № 2. 143–154.
18. *Гончаров С.С.* Семейства с единственной позитивной нумерацией // Вычисл. системы. 1992. **146**. 96–104.
19. *Ershov Yu.L.* Theory of numberings // Handbook of computability theory / Ed. by E.R. Griffor; Stud. Logic Found. Math. Vol. 140. Amsterdam: Elsevier, 1999. 473–503.
20. *Бадаев С.А., Гончаров С.С.* О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств // Алгебра и логика. 2001. **40**, № 5. 507–522.
21. *Подзоров С.Ю.* О локальном строении полурешеток Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций // Алгебра и логика. 2005. **44**, № 2. 148–172.
22. *Soare R.I.* Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets. Perspectives in mathematical logic. Berlin; Heidelberg; N.Y., etc.: Springer-Verlag, 1987.
23. *Nies A.* Computability and Randomness. Oxford: Oxford Logic Guides, 2009.
24. *Badaev S.A., Goncharov S.S.* On computable minimal enumerations. Algebra // Proc. Third Int. Conf. on Algebra in memory of M.I. Kargopolov. Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter, 1995. 21–32.
25. *Badaev S.A., Lempp S.* A decomposition of the Rogers semilattice of a family of d.c.e. sets // J. Symb. Log. 2009. **74**, N 2. 618–640.
26. *Гончаров С.С.* Вычислимые однозначные нумерации // Алгебра и логика. 1980. **19**, № 5. 507–551.
27. *Goncharov S.S., Harizanov V., Knight J., McCoy C., Miller R., Solomon R.* Enumerations in computable structure theory // Ann. Pure and Appl. Log. 2005. **136**, N 3. 219–246.
28. *Файзрахманов М.Х.* Минимальные обобщенно вычислимые нумерации и высокие степени // Сиб. матем. журн. 2017. **58**, № 3. 710–716.
29. *Faizrahmanov M.Kh.* Extremal numberings and fixed point theorems // Math. Log. Quart. 2022. **68**, N 4. 398–408.

Поступила в редакцию
14.11.2022

УДК 517.93

МНОЖЕСТВО ПРЕДЕЛЬНО РЕАЛИЗУЕМЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ МНОЖЕСТВА КАНТОРА

А. Н. Ветохин[1]

Установлено, что в любой окрестности каждого непрерывного отображения совершенного множества Кантора найдется отображение с заданной топологической энтропией.

Ключевые слова: топологическая энтропия, символическая динамика.

It is established that in any neighborhood of each continuous mapping of a Cantor perfect set there is a mapping with a given topological entropy.

Key words: topological entropy, symbolic dynamics.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-6

В качестве меры "массивности" компактного метрического пространства X А. Н. Колмогоров в статье [1] ввел понятие ε-емкости, которая определяется как максимальное число ε-различимых

[0] *Ветохин Александр Николаевич* — доктор физ.-мат. наук, доцент каф. дифференциальных уравнений мех.-мат. ф-та МГУ; проф. каф. ФН-1 "Высшая математика" МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: anveto27@yandex.ru.

Vetokhin Alexander Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mathematics and Mechanics, Chair of Differential Equations; Professor, Bauman Moscow State Technical University, Chair of Higher Mathematics.

элементов в X. Используя это понятие, приведем определение топологической энтропии автономной динамической системы [2]. Пусть d — метрика на X, для непрерывного отображения $f : X \to X$ определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x,y) = \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} d(f^i(x), f^i(y))$$

$$(f^i \equiv \underbrace{f\circ\ldots\circ f}_{i},\ f^0 \equiv \mathrm{id}_X), \quad x,\, y \in X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $N_d(f,\varepsilon,n)$ ε-емкость пространства (X, d_n^f), т.е. максимальное количество точек в X, попарные d_n^f-расстояния между которыми больше, чем ε. Тогда *топологическая энтропия* динамической системы $(X,\, f)$ определяется формулой

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N_d(f,\varepsilon,n). \tag{1}$$

Отметим, что величина (1) не изменится, если в ее определении метрику d заменить на любую другую, задающую на X ту же, что и d, топологию.

Напомним еще одну формулу для вычисления топологической энтропии [2]. Для всяких $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $B_f(x,\varepsilon,n)$ открытый шар $\{y \in X : d_n^f(x,y) < \varepsilon\}$. Множество $A \subset X$ называется (f,ε,n)-покрытием пространства X, если

$$X \subset \bigcup_{x\in A} B_f(x,\varepsilon,n).$$

Пусть $S_d(f,\varepsilon,n)$ обозначает минимальное количество элементов (f,ε,n)-покрытия, тогда топологическая энтропия может быть вычислена по формуле

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln S_d(f,\varepsilon,n).$$

Обозначим через $C(X,X)$ множество непрерывных отображений из X в X с метрикой

$$\rho(f,g) = \max_{x\in X} d(f(x), g(x)).$$

Рассмотрим функцию

$$f \longmapsto h_{\mathrm{top}}(f). \tag{2}$$

В работе [3] для $X = [0;\, 1]$ установлено, что функция (2) является всюду полунепрерывной снизу. В работе [4] доказано, что функция (2) принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $C(X,X)$ и множество точек пространства $C(X,X)$, в которых функция (2) полунепрерывна снизу, содержит плотное в пространстве $C(X,X)$ множество типа G_δ, а в [5] установлено, что само множество точек полунепрерывности снизу является всюду плотным в $C(X,X)$ множеством типа G_δ. Если X — канторово совершенное множество на отрезке $[0,\, 1]$ с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой, то функция (2) всюду разрывна и полунепрерывна снизу только в точках, в которых топологическая энтропия равна нулю [5], а в [6] установлено, что функция (2) не принадлежит первому классу Бэра даже на подпространстве гомеоморфизмов, удовлетворяющих условию Липшица. В работе [7] в пространстве $C(X,X)$ построено совершенное замкнутое множество K, такое, что множество точек полунепрерывности сверху функции $h_{\mathrm{top}}|_K$ пусто.

Обозначим через $E_h(f)$ множество предельно реализуемых значений топологической энтропии, т.е. тех, которые получаются при сколь угодно малых равномерных возмущениях отображения f:

$$E_h(f) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{h_{\mathrm{top}}(g) : \rho(f,g) < \frac{1}{n}\}.$$

На множестве последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, $x_k \in \{0,\, 1\}$, $k \in \mathbb{N}$, введем метрику

$$d_{\Omega_2}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y;\\ \frac{1}{\min\{i:\, x_i\neq y_i\}}, & \text{если } x \neq y.\end{cases}$$

Полученное компактное метрическое пространство обозначим через Ω_2. Отметим, что пространство Ω_2 гомеоморфно совершенному множеству Кантора на отрезке $[0,\ 1]$ с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой.

Напомним некоторые свойства топологической энтропии, которые будут использованы в дальнейшем.

Предложение 1. *Если X и Y — компактные метрические пространства, то*

1) *для любого непрерывного отображения $f : X \to X$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $h_{\mathrm{top}}(f^n) = nh_{\mathrm{top}}(f)$* [8, с. 123];

2) *для любого непрерывного отображения $f : X \to X$ и любого гомеоморфизма φ из Y на X выполнено равенство $h_{\mathrm{top}}(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi) = h_{\mathrm{top}}(f)$* [8, с. 123];

3) *для любых непрерывных отображений $f : X \to X$ и $g : Y \to Y$ выполнено равенство $h_{\mathrm{top}}(f \times g) = h_{\mathrm{top}}(f) + h_{\mathrm{top}}(g)$* [8, с. 123];

4) *для отображения $\sigma : \Omega_2 \to \Omega_2$, определяемого формулой $\sigma(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$, выполнено равенство $h_{\mathrm{top}}(\sigma) = \ln 2$* [8, с. 132].

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *Для каждого непрерывного отображения $w : \Omega_2 \to \Omega_2$ выполнено равенство $E_h(w) = [0; +\infty]$.*

Доказательство. Для натурального числа n рассмотрим множество $\Omega_2(n)$ конечных последовательностей вида

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ x_k \in \{0,\ 1\},\ k = 1, \dots, n.$$

Обозначим через k_x номер первой единицы в последовательности x. Зададим отображение $\delta_n : \Omega_2(n) \to \Omega_2(n)$ равенством

$$\delta_n((x_1, x_2, \dots, x_n)) = \begin{cases} (1, \dots, 1) & \text{при } x_1 = \ldots = x_n = 0; \\ (\underbrace{1, \dots, 1}_{k_x - 1}, 0, x_{k_x+1}, \dots, x_n) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Лемма 1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ последовательность итераций $(\delta_n^k)_{k=1}^{\infty}$ является периодической с наименьшим периодом 2^n.*

Доказательство. Каждому элементу $x \in \Omega_2(n)$ поставим в соответствие натуральное число $M(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k 2^{k-1}$. В силу определения отображения δ_n имеем

$$M(\delta_n(x)) = \begin{cases} 2^n - 1 & \text{при } x = 0; \\ M(x) - 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, для любого $x \in \Omega_2(n)$ последовательность $(\delta_n^k(x))_{k=1}^{\infty}$ является периодической с наименьшим периодом 2^n. Лемма 1 доказана.

Используя отображение δ_n, определим отображение $\sigma_n : \Omega_2 \to \Omega_2$ равенством

$$\sigma_n((x_1, x_2, \dots)) = \begin{cases} (\delta_n(x_1, \dots, x_n), x_{n+2}, x_{n+3}, \dots) & \text{при } x_1 = \ldots = x_n = 0; \\ (\delta_n(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Лемма 2. *Для любого натурального числа n выполнено равенство $2^n h_{\mathrm{top}}(\sigma_n) = \ln 2$.*

Доказательство. В силу леммы 1 для любой последовательности $(x_1, x_2, \dots) \in \Omega_2$ имеем

$$\sigma_n^{2^n}(x_1, x_2, \dots) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots),$$

т.е. отображение $\sigma_n^{2^n}$ совпадает со сдвигом на один элемент влево последовательности $x \in \Omega_2$ начиная с элемента с номером $n + 1$, а в силу предложения 1 получаем цепочку равенств $\ln 2 = h_{\mathrm{top}}(\sigma_n^{2^n}) = 2^n h_{\mathrm{top}}(\sigma_n)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любого $\alpha \in [0, +\infty]$ найдется непрерывное отображение $f_\alpha : \Omega_2 \to \Omega_2$, такое, что $h_{\mathrm{top}}(f_\alpha) = \alpha$.*

Доказательство. Для $\alpha = 0$ положим $f_\alpha = \mathrm{id}_{\Omega_2}$. Так как топологическая энтропия тождественного отображения равна нулю, то $h_{\mathrm{top}}(f_\alpha) = \alpha$.

Рассмотрим пространство Ω_2^∞ бесконечных матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} \in \{0,\, 1\}$, с метрикой

$$d_{\Omega_2^\infty}(A,B) = \begin{cases} 0, & \text{если } A = B; \\ \frac{1}{\min\{\max\{i,j\}:\, a_{ij} \neq b_{ij}\}}, & \text{если } A \neq B. \end{cases}$$

Рассмотрим отображение $\varphi : \Omega_2 \to \Omega_2^\infty$, определяемое равенством

$$\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, \dots)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_9 & \dots \\ x_4 & x_3 & x_8 & \dots \\ x_5 & x_6 & x_7 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

В силу определения отображение φ является гомеоморфизмом из Ω_2 на Ω_2^∞, следовательно, для любого отображения $g : \Omega_2 \to \Omega_2$ выполнено равенство $h_{\text{top}}(\varphi^{-1} \circ g \circ \varphi) = h_{\text{top}}(g)$, поэтому в дальнейшем будем строить отображения из Ω_2^∞ в Ω_2^∞.

Для $\alpha = +\infty$ рассмотрим отображение $g_\alpha : \Omega_2^\infty \to \Omega_2^\infty$, определяемое равенством

$$g_\alpha \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11+1} & a_{12+1} & a_{13+1} & \dots \\ a_{21+2} & a_{22+2} & a_{23+2} & \dots \\ a_{31+3} & a_{32+3} & a_{33+3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Для фиксированных $r,\, n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество Q_{rn} матриц из Ω_2^∞, коэффициенты которых удовлетворяют условиям

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ или } 1, & \text{если } i = r,\ j = 1, 2, \dots, rn; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отметим, что мощность множества Q_{rn} равна 2^{rn}. Пусть $A, B \in Q_{rn}$ и $A \neq B$, тогда

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} d(g_\alpha^i(A), g_\alpha^i(B)) \geqslant \frac{1}{r}.$$

Если $\varepsilon < \frac{1}{r}$, то величина $N_d(g_\alpha, \varepsilon, n)$ не менее мощности множества Q_{rn}, а следовательно, $h_{\text{top}}(g_\alpha) \geqslant r \ln 2$. В силу произвольности r получаем равенство $h_{\text{top}}(g_\alpha) = +\infty$, из которого для отображения $f_\alpha = \varphi^{-1} \circ g_\alpha \circ \varphi$ следует равенство $h_{\text{top}}(f_\alpha) = \alpha$.

Далее, для $\alpha \in (0, \ln 2)$ имеем $\alpha / \ln 2 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} m_k 2^{-k}$, $m_k \in \{0,\, 1\}$ (здесь будем предполагать, что двоично-рациональные числа представляются в виде конечных сумм), положим

$$g_\alpha \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \sigma_1^{m_1}(a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots) \\ \sigma_2^{m_2}(a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots) \\ \sigma_3^{m_3}(a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Пусть $\alpha / \ln 2$ — двоично-рациональное число, тогда существует $k \in \mathbb{N}$, для которого выполнены соотношения $m_k = 1$ и $0 = m_{k+1} = m_{k+2} = \dots$, а следовательно, имеет место равенство

$$g_\alpha = \sigma_1^{m_1} \times \dots \times \sigma_k^{m_k} \times \prod_{l=k+1}^{\infty} \text{id}_{\Omega_2},$$

из которого в силу предложения 1 для отображения $f_\alpha = \varphi^{-1} \circ g_\alpha \circ \varphi$ имеем

$$h_{\mathrm{top}}(f_\alpha) = h_{\mathrm{top}}(g_\alpha) = \sum_{l=1}^{k} m_l 2^{-l} \ln 2 = \alpha.$$

Пусть $\alpha/\ln 2$ — двоично-иррациональное число, тогда существует последовательность $(k_l)_{l=1}^{\infty}$, для которой выполнено равенство $m_{k_l} = 1$, $l \in \mathbb{N}$, и имеет место представление

$$g_\alpha = \underbrace{\mathrm{id}_{\Omega_2} \times \ldots \times \mathrm{id}_{\Omega_2}}_{k_1-1} \times \sigma_{k_1} \times \underbrace{\mathrm{id}_{\Omega_2} \times \ldots \times \mathrm{id}_{\Omega_2}}_{k_2-k_1-1} \times \sigma_{k_2} \times \ldots .$$

Для фиксированного l рассмотрим множество Q_{k_l} матриц из Ω_2^∞, коэффициенты которых удовлетворяют условиям $a_{ij} = 0$, $i \geqslant k_l + 1$, $j = 1, 2, \ldots$. Отметим, что множество Q_{k_l} инвариантно относительно отображения g_α, следовательно, используя предложение 1, получаем

$$h_{\mathrm{top}}(g_\alpha) \geqslant h_{\mathrm{top}}(g_\alpha|_{Q_{k_l}}) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\ln 2}{2^{k_i}} = \sum_{i=1}^{k_l} \frac{m_i \ln 2}{2^i}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $l \to +\infty$, заключаем, что

$$h_{\mathrm{top}}(g_\alpha) \geqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{m_i \ln 2}{2^i} = \alpha. \tag{3}$$

Так как для любых двух матриц A, $B \in \Omega_2^\infty$, удовлетворяющих условию $a_{ij} = b_{ij}$, $i \leqslant k_l$, $j = 1, 2, \ldots$, выполнены неравенства

$$d_{\Omega_2^\infty}(g_\alpha^n(A), g_\alpha^n(B)) \leqslant \frac{1}{k_l + 1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

то любое $(g_\alpha, 1/k_l, n)$-покрытие инвариантного множества Q_{k_l} является $(g_\alpha, 1/k_l, n)$-покрытием всего пространства Ω_2^∞. Следовательно, получаем неравенство

$$S_d(g_\alpha, 1/k_l, n) \leqslant S_d(g_\alpha|_{Q_{k_l}}, 1/k_l, n),$$

из которого имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln S_d(g_\alpha, 1/k_l, n) \leqslant h_{\mathrm{top}}(g_\alpha|_{Q_{k_l}}) = \sum_{l=1}^{k_l} \frac{\ln 2}{2^{k_l}} = \sum_{i=1}^{k_l} \frac{m_i \ln 2}{2^i}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $l \to +\infty$, заключаем, что

$$h_{\mathrm{top}}(g_\alpha) \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{m_i \ln 2}{2^i} = \alpha. \tag{4}$$

В силу оценок (3) и (4) получаем равенство $h_{\mathrm{top}}(g_\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{m_i \ln 2}{2^i} = \alpha$, из которого для отображения $f_\alpha = \varphi^{-1} \circ g_\alpha \circ \varphi$ следует равенство $h_{\mathrm{top}}(f_\alpha) = \alpha$.

Для любого $\beta > 0$ найдем $m \in \mathbb{N}$, такое, что $\frac{\beta}{m} \in (0, \ln 2)$. Построим отображение $f_{\frac{\beta}{m}}$, тогда в силу предложения 1 будем иметь $h_{\mathrm{top}}(f_{\frac{\beta}{m}}^m) = m h_{\mathrm{top}}(f_{\frac{\beta}{m}}) = \beta$. Лемма 3 доказана.

Завершим доказательство теоремы. Для произвольных $\alpha \in [0; +\infty]$ и непрерывного отображения $w(x_1, x_2, \ldots) = (y_1, y_2, \ldots)$ зададим последовательность отображений

$$f_n^{w,\alpha}(x_1, x_2, \ldots) = (y_1, \ldots, y_n, f_\alpha((x_{n+1}, x_{x+2}, \ldots)), \quad n \in \mathbb{N},$$

где f_α — отображение, построенное в лемме 3. Так как для последовательности $(f_n^{w,\alpha})_{n=1}^{\infty}$ выполнены равенства

$$\lim_{n\to\infty} \rho(f_n^{w,\alpha}, w) = 0, \quad h_{\mathrm{top}}(f_n^{w,\alpha}) = h_{\mathrm{top}}(f_\alpha) = \alpha,$$

то получаем требуемое равенство $E_h(w) = [0; +\infty]$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А.Н.* Асимптотические характеристики вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН СССР. 1956. **179**, № 3. 585–589.
2. *Динабург Е.И.* Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. **35**, № 2. 324–366.
3. *Misiurewicz M.* Horseshoes for mappings of the interval // Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. math., astron. et phys. 1979. **27**. 167–169.
4. *Ветохин А.Н.* Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения. 2017. **53**, № 4. 448–453.
5. *Ветохин А.Н.* Строение множеств точек полунепрерывности топологической энтропии динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2019. № 4. 69–72.
6. *Ветохин А.Н.* Непринадлежность первому классу Бэра топологической энтропии на пространстве гомеоморфизмов // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. № 5. 64–67.
7. *Ветохин А.Н.* Пустота множества точек полунепрерывности сверху топологической энтропии одного семейства динамических систем // Дифференц. уравнения. 2019. **55**, № 8. 1152–1153.
8. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М., 1999.

Поступила в редакцию
07.02.2020