УДК 510.5

ДВЕ ТЕОРЕМЫ О МИНИМАЛЬНЫХ ОБОБЩЕННО-ВЫЧИСЛИМЫХ НУМЕРАЦИЯХ

М. Х. Файзрахманов[1]

В статье доказывается, что для любого множества A, вычисляющего невычислимое вычислимо перечислимое множество, каждое бесконечное A-вычислимое семейство обладает бесконечным числом попарно неэквивалентных минимальных A-вычислимых нумераций. Устанавливается, что произвольное множество $A \leqslant_T \emptyset'$ является низким тогда и только тогда, когда любое бесконечное A-вычислимое семейство с наибольшим по включению множеством обладает бесконечным числом попарно неэквивалентных позитивных A-вычислимых нумераций.

Ключевые слова: минимальная нумерация, позитивная нумерация, вычислимо перечислимое множество, низкое множество.

The paper proves that for any set A that computes a non-computable computably enumerable set, any infinite A-computable family has an infinite number of pairwise nonequivalent minimal A-computable numberings. It is established that an arbitrary set $A \leqslant_T \emptyset'$ is low if and only if any infinite A-computable family with the greatest set under inclusion has an infinite number of pairwise nonequivalent positive A-computable numberings.

Key words: minimal numbering, positive numbering, computably enumerable set, low set.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-5

1. Введение. Первые идеи и подходы к изучению нумераций и нумерованных множеств высказал А.Н. Колмогоров в середине 50-х годов прошлого столетия [1]. Развил эти идеи В.А. Успенский, что привело к созданию теории нумераций (см. работы [2–4]). Объекты, связанные с нумерациями семейств частично вычислимых функций и вычислимо перечислимых (в.п.) множеств, независимо возникали в работах Дж. Деккера, Х. Райса, Х. Роджерса и др. Впоследствии А.И. Мальцев объединил советские и зарубежные изыскания и систематизировал основные понятия теории нумераций, определив направления исследований на десятилетия вперед (см., например, обзор [5]). Это привело к тому, что к середине 70-х годов прошлого столетия были опубликованы десятки посвященных теории нумераций статей, среди которых работы Ю.Л. Ершова [6], В.В. Вьюгина [7], С.А. Бадаева [8] (достаточно подробная библиография приведена в монографии [9]).

Во второй половине 90-х годов прошлого столетия С.С. Гончаров и А. Сорби в своей работе [10] предложили общий подход к определению вычислимости семейств конструктивных объектов, допускающих формальное описание в каком-нибудь языке, снабженном гёделевской нумерацией. В рамках этого подхода с общих позиций равномерной перечислимости семейства множеств относительно произвольного оракула стало исследоваться обобщенное понятие вычислимости нумераций (см. [11, 12]). Это обобщение принимается и в настоящей работе. Мы рассматриваем некоторые вопросы, касающиеся минимальных [13–15] обобщенно-вычислимых нумераций. Такие нумерации представляют особый интерес, поскольку они вместе с накрывающими нумерациями образуют экстремальные элементы полурешеток (ассоциированных с отношением сводимости) нумераций. Кроме того, теории нумераций посвящено множество работ, связанных с однозначными [16, 17] и позитивными [8, 18] нумерациями, которые естественным образом являются минимальными.

2. Обозначения и определения. Необходимые сведения по теории нумераций можно найти в монографии Ю.Л. Ершова [9] и в его статье [19]. Напомним самые необходимые из них. *Нумерацией* счетного множества S называется произвольное сюръективное отображение $\alpha : \mathbb{N} \to S$. Говорим, что нумерация α *сводится* к нумерации β (обозначаем как $\alpha \leqslant \beta$), если $\alpha = \beta \circ f$ для некоторой вычислимой функции f. Нумерации α и β называются *эквивалентными* ($\alpha \equiv \beta$), если $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \leqslant \alpha$.

[1] *Файзрахманов Марат Хайдарович* — доктор физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. Науч.-образ. матем. центра ПФО Казан. федерал. ун-та, e-mail: marat.faizrahmanov@gmail.com.

Faizrahmanov Marat Khaidarovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Kazan Federal University, Volga Region Scientific-Educational Centre of Mathematics.

Назовем нумерацию μ множества S *минимальной*, если для любой нумерации $\alpha \leqslant \mu$ множества S выполняется $\mu \leqslant \alpha$. *Нумерационная эквивалентность* нумерации α определяется как

$$\eta_\alpha = \{\langle x, y\rangle : \alpha(x) = \alpha(y)\}.$$

Нумерация α называется *позитивной*, если η_α в.п., и *разрешимой*, если η_α вычислима. В настоящей работе рассматриваются только нумерации семейств подмножеств $\mathbb{N}$.

Приведем теперь необходимые сведения, связанные с вычислимостью нумераций. Пусть A — произвольное множество натуральных чисел, а $\mathcal{S}$ — семейство A-вычислимо перечислимых (A-в.п.) множеств. Следуя [10, 11], назовем нумерацию α семейства $\mathcal{S}$ *A-вычислимой*, если множество

$$G_\alpha = \{\langle x, y\rangle : y \in \alpha(x)\}$$

A-в.п. Если оракул A фиксирован, то A-вычислимые нумерации будем также называть *обобщенно-вычислимыми*. Семейство $\mathcal{S}$ называется *A-вычислимым*, если оно имеет A-вычислимую нумерацию. Опуская оракул A, получим определения *вычислимой* нумерации и *вычислимого* семейства. Если же положить $A = \emptyset^{(n)}$, то приходим к определению Σ^0_n-*вычислимых* нумераций, которые образуют наиболее полно изученные классы обобщенно-вычислимых нумераций (см., например, [10, 20, 21]).

Мы также используем стандартные обозначения из теории вычислимости. Через φ_e обозначаем частично вычислимую функцию с гёделевским номером e. Область определения произвольной частичной функции ψ будем обозначать через $\operatorname{dom}\psi$, а ее область значений — через $\operatorname{ran}\psi$. Пишем $\psi(x)\downarrow$, если $x \in \operatorname{dom}\psi$, и $\psi(x)\uparrow$ в противном случае. Вычислимую функцию $\langle x, y\rangle \mapsto 2^x(2y+1)-1$, взаимно однозначно нумерующую пары натуральных чисел, обозначаем через $c(x, y)$. Также для $n > 1$ определим по индукции $c(x_0, x_2, \ldots, x_n) = c(x_0, c(x_1, \ldots, x_n))$. *Тьюринговый скачок* A' множества A определяется как $A' = \{e : \Phi^A_e(e)\downarrow\}$, где Φ^A_e — частично A-вычислимая функция с гёделевским номером e. Множество A называется *низким*, если $A' \leqslant_T \emptyset'$, и *высоким*, если $\emptyset'' \leqslant_T A'$. Для произвольной бинарной строки $\sigma \in \{0,1\}^*$ через $|\sigma|$ обозначаем ее длину. Для множества A пишем $\sigma \prec A$, если для любого $i < |\sigma|$ выполняется $\sigma(i) = \chi_A(i)$. Остальные обозначения можно найти в монографиях [22, 23].

3. Минимальные нумерации. Проблема Ю.Л. Ершова о возможном числе (попарно неэквивалентных) минимальных вычислимых нумераций произвольного семейства известна с середины 60-х годов прошлого века. Более подробная информация по проблемам вычислимых минимальных нумераций содержится в [24]. К настоящему времени наиболее близкое ее решение получено С.А. Бадаевым и С. Лемппом в работе [25], в которой строится семейство 2-в.п. множеств, обладающее ровно двумя минимальными равномерно 2-в.п. нумерациями α и β (т.е. $G_\alpha, G_\beta \in \Sigma^{-1}_2$). Решение С.С. Гончаровым [26] этой проблемы для случая однозначных вычислимых нумераций привело к многочисленным важным следствиям в теории конструктивных моделей (см., например, [27]). С.А. Бадаевым и С.С. Гончаровым [20] эта проблема была решена для Σ^0_n-вычислимых семейств, где $n \geqslant 2$, а в [28] это решение было обобщено на A-вычислимые семейства для произвольного оракула A высокой степени. В [29] было доказано, что если оракул A вычисляет невычислимое в.п. множество, то любое A-вычислимое семейство обладает хотя бы одной минимальной A-вычислимой нумерацией. Как устанавливается в следующей теореме, при таких ограничениях на множество A любое бесконечное A-вычислимое семейство обладает бесконечным числом минимальных A-вычислимых нумераций. В частности, эта теорема верна для любых в.п. множеств A, сколь угодно “близких” к вычислимым множествам (например, для в.п. множеств низкой, супернизкой, K-тривиальной степени [23] и т.д.).

Теорема 1. *Пусть B — невычислимое в.п. множество, $B \leqslant_T A$ и $\mathcal{R}$ — бесконечное A-вычислимое семейство. Тогда существует последовательность $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ минимальных A-вычислимых нумераций семейства $\mathcal{R}$, такая, что $\mu_m \nleqslant \mu_n$ для любых различных $m, n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть B_0 — невычислимое в.п. множество, такое, что $B_0 \leqslant_T A$. Положим

$$B = \{3c(e, v) + i : e \in \mathbb{N}, v \in B_0, 1 \leqslant i \leqslant 3\}.$$

Нетрудно видеть, что $B \equiv_T B_0$. Зафиксируем вычислимое перечисление $\{B_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ множества B, такое, что для всех e, v, i, s $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ если $3c(e, v) + i \in B_{s+1} \setminus B_s$, то $s + 1 = 3c(e, u) + i$ для некоторого $u \geqslant v$.

Пусть α — A-вычислимая нумерация $\mathcal{R}$, для которой $\alpha(0) \neq \alpha(1)$. Чтобы определить искомую последовательность нумераций $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, построим последовательности вычислимых отношений эквивалентности $\{\theta_e\}_{e\in\mathbb{N}}$ на $\mathbb{N}$ и B-вычислимых функций $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющих условиям:

1) для всех e если $\operatorname{ran}\varphi_e$ бесконечна, то

$$\mathbb{N}/_{\theta_e} =^* \{[\varphi_e(x)]_{\theta_e} : \varphi_e(x)\downarrow, x \in \mathbb{N}\}, \tag{1}$$

где для произвольных множеств X и Y запись $X =^* Y$ означает, что симметрическая разность X и Y конечна, и $[y]_{\theta_e}$ — класс θ_e-эквивалентности элемента y;

2) для всех e, n, x, y если $\theta_e(x, y)$, то $g_n(x) = g_n(y)$;

3) $\operatorname{ran} g_n = \mathbb{N}$ для всех n;

4) для всех m, n, j если $m \neq n$ и $\operatorname{ran}\varphi_j$ бесконечна, то найдется x, для которого $\varphi_j(x)\downarrow$ и $g_m(x) = 0$, $g_n(\varphi_j(x)) = 1$.

После этого для каждых n и x определим $\mu_n(x) = \alpha(g_n(x))$. Из условия 3 следует, что $\mu_n(\mathbb{N}) = \mathcal{R}$ для всех n. В силу того что $g_n \leqslant_T B$ для всех n, каждая нумерация μ_n будет A-вычислимой. Покажем, что каждая из этих нумераций будет минимальной. Действительно, пусть нумерация β семейства $\mathcal{R}$ сводится к μ_n посредством функции φ_e. В силу бесконечности семейства $\mathcal{R}$ имеем, что $\operatorname{ran}\varphi_e$ бесконечна. Согласно условию 1 можно выбрать конечную последовательность $b_0, \dots, b_k$, для которой

$$N/_{\theta_e} = \bigcup_{x \in \mathbb{N}} [\varphi_e(x)]_{\theta_e} \cup [b_0]_{\theta_e} \cup \dots \cup [b_k]_{\theta_e}.$$

Для каждого $i \leqslant k$ выберем такое y_i, что $\beta(y_i) = \mu_n(b_i)$. Поскольку эквивалентность θ_e является вычислимой, для каждого z можно эффективно найти такую пару $\langle x, i\rangle$, где $i \leqslant k$, что либо $\theta_e(z, \varphi_e(x))$, либо $\theta_e(z, b_i)$. Тогда из условия 2 следует, что для каждого z выполняется $\mu_n(z) = \beta(x)$, если $\theta_e(z, \varphi_e(x))$, и $\mu_n(z) = \beta(y_i)$, если $\theta_e(z, b_i)$. Стало быть, $\mu_n \leqslant \beta$. В силу произвольности выбора β получаем, что нумерация μ_n будет минимальной. Согласно условию 4 с учетом неравенства $\alpha(0) \neq \alpha(1)$ будем иметь $\mu_m \nleqslant \mu_n$ для любых различных m, n.

Отметим, что, хотя каждая из эквивалентностей θ_e будет вычислимой, она не обязательно будет равномерно вычислимой по индексу e. В построении будем использовать методы приоритета и разрешения [22].

Построение последовательностей отношений эквивалентности $\{\theta_e\}_{e\in\mathbb{N}}$ *и функций* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Шаг 0. Полагаем

$$\theta_e^0 = \{\langle a, a\rangle : a \in \mathbb{N}\},\ g_n^0(x) = 0$$

для всех e, n, x. Для выполнения условий 3 и 4 нам также понадобятся двухместные функции p и r, ставящие запрет на изменение значений отношений θ_e^s и функций g_n^s на некоторых аргументах. Для всех e положим

$$p(e, 0) = r(e, 0) = 0.$$

На каждом последующем шаге $s + 1$ будем считать, что

$$\theta_e^{s+1} = \theta_e^s,\ g_n^{s+1}(x) = g_n^s(x),\ p(e, s+1) = p(e, s),\ r(e, s+1) = r(e, s),$$

если явно не указано обратное. Также нам будет удобно считать, что для всех s

$$r(-1, s) = -1.$$

На каждом шаге $s{+}1$ построения будем выбирать строго возрастающую последовательность $\{a_{e,i}^s\}_{i\in\mathbb{N}}$, для которой

$$\mathbb{N}/_{\theta_e^s} = \{[a_{e,i}^s]_{\theta_e^s} : i \in \mathbb{N}\},\ a_{e,i}^s = \min[a_{e,i}^s]_{\theta_e^s}, i \in \mathbb{N}.$$

Шаг $s + 1 = 3c(e, u) + 1$. На шагах такого типа будем выполнять условия 1 и 2. Выберем наименьшее число $k \geqslant e$, такое, что

$$a_{e,k}^s > r(e-1, s),\ [a_{e,k}^s]_{\theta_e^s} \cap \operatorname{ran}\varphi_{e,s} = \emptyset.$$

После этого выберем наименьшее число $l > k$, для которого

$$[a_{e,l}^s]_{\theta_e^s} \cap \operatorname{ran}\varphi_{e,s} \neq \emptyset,\ B_s \restriction a_{e,l}^s \neq B_{s+1} \restriction a_{e,l}^s.$$

Определим θ_e^{s+1} как отношение эквивалентности, порожденное бинарным отношением $\theta_e^s \cup \{\langle a_{e,k}^s, a_{e,l}^s\rangle\}$, для всех $d > e$ положим

$$\theta_d^{s+1} = \theta_{d-1}^{s+1} \cup \{\langle x, y\rangle : x < a_{e,k}^s,\ y < a_{e,k}^s,\ \theta_d^s(x, y)\}, \tag{2}$$

для всех $x \in [a^s_{e,l}]_{\theta^s_e}$ и n определим

$$g^{s+1}_n(x) = g^s_n(a^s_{e,k}). \tag{3}$$

Если требуемых k и l не существует, то просто переходим к следующему шагу.

Шаг $s+1 = 3c(e,u)+2$. На шагах такого типа будем выполнять условие 3. Пусть

$$[a^s_{e,l}]_{\theta^s_e} = [p(e,s)]_{\theta^s_e}.$$

Если не существует $k < l$, такого, что

$$a^s_{e,k} > r(e-1,s),\ \forall n\,[g^s_n(a^s_{e,k}) = e], \tag{4}$$

то выберем наименьшее число $d \leqslant s$, для которого

$$a^s_{e,d} > r(e-1,s),\ B_s \upharpoonright a^s_{e,d} \neq B_{s+1} \upharpoonright a^s_{e,d}, \tag{5}$$

после чего для всех $x \in [a^s_{e,d}]_{\theta^s_e}$ и n определим

$$g^{s+1}_n(x) = e. \tag{6}$$

Также положим

$$p(e,s+1) = a^s_{e,d}. \tag{7}$$

Если же упомянутое число k существует либо не существует требуемого d, то просто переходим к следующему шагу.

Шаг $s+1 = 3c(j,m,n,u)+3$. На шагах такого типа будем выполнять условие 4. Будем считать, что $m \neq n$. В противном случае перейдем к следующему шагу. Пусть

$$[a^s_{e,l}]_{\theta^s_e} = [r(e,s)]_{\theta^s_e}.$$

Если не существует $k_0 < l$, $k_1 < l$, таких, что

$$\min\{a^s_{e,k_0}, a^s_{e,k_1}\} > p(e,s),$$

$$g^s_m(a^s_{e,k_0}) = 0,\ \exists x\,[\varphi_{j,s}(x)\downarrow \,\&\, \theta^s_e(x, a^s_{e,k_0})\,\&\,\theta^s_e(\varphi_{j,s}(x), a^s_{e,k_1})],\ g^s_n(a^s_{e,k_1}) = 1, \tag{8}$$

то выберем наименьшее число $d \leqslant s$, для которого найдутся $i_0 \leqslant s$, $i_1 \leqslant s$, такие, что $d \leqslant i_0$, $d \leqslant i_1$ и

$$\exists x\,[\varphi_{j,s}(x)\downarrow \,\&\, \theta^s_e(x, a^s_{e,i_0})\,\&\,\theta^s_e(\varphi_{j,s}(x), a^s_{e,i_1})], \tag{9}$$

$$a^s_{e,d} > p(e,s),\ B_s \upharpoonright a^s_{e,d} \neq B_{s+1} \upharpoonright a^s_{e,d}, \tag{10}$$

после чего для всех $x \in [a^s_{e,i_0}]_{\theta^s_e}$, $y \in [a^s_{e,i_1}]_{\theta^s_e}$ определим

$$g^{s+1}_m(x) = 0,\ g^{s+1}_n(y) = 1. \tag{11}$$

Также положим

$$r(e,s+1) = \max\{a^s_{e,i_0}, a^s_{e,i_1}\}. \tag{12}$$

Если же упомянутые k_0, k_1 существуют либо не существует требуемого d, то просто переходим к следующему шагу.

В конце построения полагаем $\theta_e(x,y) = \lim_s \theta^s_e(x,y)$ (при отождествлении отношений с их характеристическими функциями) и $g_n(x) = \lim_s g^s_n(x)$ для всех e, x, y, n.

Непосредственно из построения следует, что для каждого e отношение θ_e является отношением эквивалентности и $\theta_e \subseteq \theta_{e+1}$. Поскольку на каждом шаге $s+1 = 3c(e,u)+1$ требуемое число k выбирается удовлетворяющим неравенству $k \geqslant e$, каждый класс эквивалентности θ_e конечен и для всех i существует конечный предел $a_{e,i} = \lim_s a^s_{e,i}$.

Также нетрудно видеть, что выполнение проверок (4), (8) и действий (6), (11) на шагах вида $3c(e,u)+2$ и $3c(j,m,n,u)+3$ построения влечет существование конечных пределов $\lim_s r(e,s)$ и $\lim_s p(e,s)$ для всех e.

Вычислимость функций g_n относительно B следует из условия $g_n(x) = g_n^s(x)$ для всех таких s и x, что $B \restriction x = B_s \restriction x$. Покажем, что θ_e вычислима для всех e и условия 1–4 выполнены.

Лемма 1. *Для каждого e эквивалентность θ_e вычислима. Условия 1 и 2 выполнены.*

Доказательство. Фиксируем произвольно e. Предположим по индукции, что для всех $b < e$ эквивалентность θ_b вычислима, для каждого i можно эффективно указать s, для которого $[a_{b,i}^s]_{\theta_{b,s}} = [a_{b,i}]_{\theta_b}$, и если $\operatorname{ran}\varphi_b$ бесконечна, то

$$\mathbb{N}/_{\theta_b} =^* \{[\varphi_b(x)]_{\theta_b} : \varphi_b(x)\downarrow, x \in \mathbb{N}\}.$$

Пусть $b_0, \ldots, b_m$ — все индексы $b < e$, для которых $\operatorname{ran}\varphi_b$ бесконечна. Выберем такое число t, что

$$\varphi_a = \varphi_{a,t},\ r(e-1,t) = r(e-1,s)$$

для всех $a < b$, отличных от $b_0, \ldots, b_m$, и всех $s \geqslant t$. Если $\operatorname{ran}\varphi_e$ конечна, то все классы θ_e, за исключением конечного числа, одноэлементны при $e = 0$ и согласно действиям (2) исчерпываются классами θ_{e-1} при $e > 0$. Получаем, что в этом случае эквивалентность θ_e вычислима. Пусть теперь $\operatorname{ran}\varphi_e$ бесконечна. Фиксируем произвольно $k \geqslant e$, такое, что $a_{e,k} > r(e-1,t)$. Предположим по индукции, что для всех $j < k$, таких, что $j \geqslant e$ и $a_{e,j} > r(e-1,t)$, выполняется

$$[a_{e,j}]_{\theta_e} \cap \operatorname{ran}\varphi_e \neq \emptyset.$$

Выберем такое число $s \geqslant t$, что для всех таких j имеет место

$$[a_{e,j}^s]_{\theta_e^s} \cap \operatorname{ran}\varphi_{e,s} \neq \emptyset$$

и для всех $q < k$ и $b < e$ каждый класс $[a_{e,q}^s]_{\theta_e^s}$ состоит из объединения конечного числа классов вида $[a_{b,i}]_{\theta_b}$, причем $[a_{b,w}]_{\theta_b} = [a_{b,w}^s]_{\theta_b^s}$ для каждого такого i и каждого $w \leqslant i$. Выберем такое наименьшее u, что $v = 3c(e,u) \geqslant s$ и либо

$$[a_{e,k}^v]_{\theta_{e,v}} \cap \operatorname{ran}\varphi_{e,s} \neq \emptyset,$$

либо для некоторого $l > k$ выполняется

$$[a_{e,l}^v]_{\theta_e^v} \cap \operatorname{ran}\varphi_{e,v} \neq \emptyset,\ B_v \restriction a_{e,l}^v \neq B_{v+1} \restriction a_{e,l}^v$$

и для всех $q \leqslant l$, $b < e$ каждый класс $[a_{e,q}^v]_{\theta_e^v}$ состоит из объединения конечного числа классов вида $[a_{b,i}]_{\theta_b}$, причем $[a_{b,w}]_{\theta_b} = [a_{b,w}^v]_{\theta_b}$ для всех таких i и всех $w \leqslant i$. Такое число v обязательно существует, поскольку в противном случае с учетом выбора вычислимого перечисления множества B, применив метод разрешения (см. [22, гл. V, § 3]), получили бы, что B_0 вычислимо. Непосредственно из построения следует, что тогда

$$[a_{e,k}^{v+1}]_{\theta_{e,v+1}} = [a_{e,k}]_{\theta_e},\ [a_{e,k}]_{\theta_e} \cap \operatorname{ran}\varphi_e \neq \emptyset.$$

Таким образом, эквивалентность θ_e вычислима, для каждого i можно эффективно указать такое s, что $[a_{e,i}^s]_{\theta_e^s} = [a_{e,i}]_{\theta_e}$, и θ_e удовлетворяет условию (1). Согласно действиям (3) условие 2 также справедливо. Этим завершается доказательство леммы.

Лемма 2. *Условия 3 и 4 выполнены.*

Доказательство. Фиксируем произвольно e и j, m, n, для которых $\operatorname{ran}\varphi_j$ бесконечна и $m \neq n$. Используя невычислимость B_0 и выбор вычислимого перечисления множества B, получаем существование бесконечного множества чисел u, для которых существует число $d \leqslant s = 3c(e,u)+1$, удовлетворяющее условию (5) и равенству $a_{e,d}^s = a_{e,d}$. Также отсюда получаем существование бесконечного множества чисел u, для которых существует число $d \leqslant s = 3c(j,m,n,u)+2$, удовлетворяющее условиям (9), (10) и равенству $a_{e,d}^s = a_{e,d}$. Теперь выполнение условий 3 и 4 получается с учетом установки запретов (7), (12), значение которых может меняться лишь конечное число раз, и вычислимости θ_e применением метода разрешения. Этим завершается доказательство леммы и теоремы в целом.

Следствие. *Пусть B — невычислимое в.п. множество, $B \leqslant_T A$ и $\mathcal{R}$ — A-вычислимое семейство. Тогда $\mathcal{R}$ обладает с точностью до эквивалентности либо одной, либо бесконечным числом минимальных A-вычислимых нумераций.*

Доказательство. Если семейство $\mathcal{R}$ конечно и $\mathcal{R} = \{R_0, \ldots, R_n\}$, то его разрешимая нумерация $\mu(x) = R_x$ при $x \leqslant n$ и $\mu(x) = R_0$ при $x > n$ является наименьшей. Если $\mathcal{R}$ бесконечно, то следствие сразу вытекает из теоремы 1.

В работах [7, 15] доказано существование вычислимых семейств без минимальных вычислимых нумераций. Согласно результатам настоящего пункта для рассмотренных здесь оракулов A таких A-вычислимых семейств не существует.

4. Позитивные нумерации. Из результатов работы [8] следует полезное достаточное условие существования (бесконечного числа попарно неэквивалентных) позитивных вычислимых нумераций бесконечных семейств в.п. множеств. Оно заключается в наличии в них наибольших по включению множеств. В следующей теореме описываются оракулы $A \leqslant_T \emptyset'$, для которых это достаточное условие также справедливо.

Теорема 2. *Пусть $A \leqslant_T \emptyset'$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *множество A низкое;*

2) *любое бесконечное A-вычислимое семейство, содержащее наибольшее по включению множество, обладает бесконечным числом попарно неэквивалентных позитивных A-вычислимых нумераций;*

3) *любое A-вычислимое семейство, содержащее наибольшее по включению множество, обладает хотя бы одной позитивной A-вычислимой нумерацией.*

Доказательство. Сначала докажем справедливость импликации ($1 \Rightarrow 2$). Пусть множество A является низким и α — A-вычислимая нумерация некоторого семейства $\mathcal{F}$ с наибольшим по включению множеством M. Не ограничивая общности, будем считать, что $M = \alpha(0)$. Поскольку $A' \leqslant_T \emptyset'$, выполняется

$$G_\alpha \in \Sigma^0_1(A) \subseteq \Delta^0_2(A) = \Delta^0_1(A') = \Delta^0_1(\emptyset') = \Delta^0_2.$$

Поэтому можем выбрать сильно вычислимую двойную последовательность конечных множеств $\{\alpha_s(x)\}_{s,x\in\mathbb{N}}$, такую, что для всех x выполняется

$$\alpha(x) = \lim_s \alpha_s(x)$$

при отождествлении множеств с их характеристическими функциями. Для произвольно выбранных конечных бинарных строк $\sigma_0, \ldots \sigma_{x-1}$ и чисел $i_0, \ldots, i_{x-1} \in \{0, 1\}$ обозначим через R набор

$$R = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{x-1}, i_0, \ldots, i_{x-1}). \tag{13}$$

Для произвольного $s \in \mathbb{N}$ через $R\langle s\rangle$ будем обозначать набор

$$R\langle s\rangle = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{x-1}, i_0, \ldots, i_{x-1}, s).$$

Скажем, что α *удовлетворяет* набору $R\langle s\rangle$, и обозначим этот факт как $\alpha \models R\langle s\rangle$, если для всех $z < x$ выполняется

$$\sigma_z \prec \alpha_s(z),\ \ \sigma_z \prec \alpha_s(x),$$

$$\chi_{\alpha_s(z)}(|\sigma_z|) = i_z \neq \chi_{\alpha_s(x)}(|\sigma_z|).$$

Заметим, что если $x > 0$ и $\alpha(x) \neq \alpha(z)$ для всех $z < x$, то существует единственная пара (R, s), где R — набор вида (13) и $s \in \mathbb{N}$, для которой

$$\forall t \geqslant s\, [\alpha \models R\langle t\rangle]\, \&\, [s > 0 \Rightarrow \alpha \not\models R\langle s-1\rangle]. \tag{14}$$

Обратно: если существует пара (R, s), удовлетворяющая (14), то $\alpha(x) \neq \alpha(z)$ для всех $z < x$. Далее, все наборы вида $R\langle s\rangle$ будем отождествлять с положительными натуральными числами (фиксировав их некоторую однозначную эффективную нумерацию).

Теперь определим позитивную A-вычислимую нумерацию β семейства $\mathcal{F}$. Положим $\beta(0) = \alpha(0)$. Для произвольных набора R вида (13) и числа $s \in \mathbb{N}$ определим

$$\beta\big(R\langle s\rangle\big) = \begin{cases} \alpha(x), & \text{если выполняется (14);} \\ M & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что нумерация β является A-вычислимой и $\beta(\mathbb{N}) = \mathcal{F}$. Кроме того, для каждого x, такого, что $\alpha(x) \neq M$, существует единственное число y, для которого $\beta(y) = \alpha(x)$, и множество всех y, для которых $\beta(y) = M$ в.п. Отсюда следует, что нумерация β позитивна. Рассмотрим семейство

$$\mathcal{C} = \{\{y\} : \beta(y) \neq M\} \cup \{\mathbb{N}\} = \{\{y\} : \neg\eta_\beta(y, 0)\} \cup \{\mathbb{N}\}.$$

В силу определения нумерации β оно вычислимо. Поскольку $\mathcal{C}$ содержит наибольшее по включению множество, согласно теореме 2 [8], оно обладает бесконечным числом попарно неэквивалентных позитивных вычислимых нумераций $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Для каждого n положим

$$\beta_n(z) = \begin{cases} \beta(y), & \text{если } \gamma_n(z) = \{y\}; \\ M, & \text{если } \gamma_n(z) = \mathbb{N}. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что для всех n выполняется $\beta_n(\mathbb{N}) = \mathcal{F}$ и, поскольку $\eta_{\beta_n} = \eta_{\gamma_n}$, нумерация β_n позитивна. Кроме того, для всех n и m имеет место

$$\beta_n \leqslant \beta_m \Leftrightarrow \gamma_n \leqslant \gamma_m.$$

Отсюда получаем, что $\mathcal{F}$ обладает бесконечным числом попарно неэквивалентных позитивных A-вычислимых нумераций $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Импликация $(2 \Rightarrow 3)$ очевидна. Докажем справедливость импликации $(3 \Rightarrow 1)$. Пусть любое A-вычислимое семейство, содержащее наибольшее по включению множество, обладает позитивной A-вычислимой нумерацией. Пусть β — позитивная A-вычислимая нумерация семейства $\{\{e\} : e \in \overline{A'}\} \cup \{\mathbb{N}\}$. Зафиксируем число x_0, для которого $\beta(x_0) = \mathbb{N}$. Тогда для произвольного e выполняется

$$e \in \overline{A'} \Leftrightarrow \exists x\, [\neg\eta_\beta(x, x_0) \,\&\, e \in \beta(x)]. \tag{15}$$

Отсюда вытекает, что $\overline{A'} \in \Sigma^0_2$. Поскольку $A \leqslant_T \emptyset'$, получаем $A' \leqslant_m \emptyset''$. Стало быть, и $A' \in \Sigma^0_2$. Таким образом, $A' \in \Delta^0_2$. Следовательно, $A' \leqslant_T \emptyset'$. Этим завершается доказательство теоремы.

Из доказательства теоремы 2 следует, что если любое A-вычислимое семейство, содержащее наибольшее по включению множество, обладает позитивной A-вычислимой нумерацией, то согласно (15) множество A принадлежит классу $\mathrm{GL}_1 = \{Z : Z' \equiv_T \emptyset' \oplus Z\}$. Полное описание оракулов, для которых верно заключение теоремы 2, автору неизвестно.

Работа поддержана грантом РНФ (проект № 22–21–20024) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075–02–2023–944).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Успенский В.А.* Колмогоров, каким я его помню // Колмогоров в воспоминаниях учеников / Сост. А.Н. Ширяев. М.: МЦНМО, 2006. 272–371.
2. *Успенский В.А.* Несколько замечаний о перечислимых множествах // Z. math. Log. und Grundl. Math. 1957. **3**, N 12. 157–170.
3. *Успенский В.А.* Лекции о вычислимых функциях. М.: Физматгиз, 1960.
4. *Успенский В.А.* О сводимости вычислимых и потенциально вычислимых нумераций // Матем. заметки. 1969. **6**, № 1. 3–9.
5. *Мальцев А.И.* Конструктивные алгебры, I // Успехи матем. наук. 1961. **16**, № 3. 3–60.
6. *Ершов Ю.Л.* Нумерации семейств общерекурсивных функций // Сиб. матем. журн. 1967. **8**, № 5. 1015–1025.
7. *Вьюгин В.В.* О некоторых примерах верхних полурешеток вычислимых нумераций // Алгебра и логика. 1973. **12**, № 3. 512–529.
8. *Бадаев С.А.* О позитивных нумерациях // Сиб. матем. журн. 1977. **18**, № 3. 483–496.
9. *Ершов Ю.Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
10. *Гончаров С.С., Сорби А.* Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика. 1997. **36**, № 6. 621–641.
11. *Бадаев С.А., Гончаров С.С.* Обобщенно вычислимые универсальные нумерации // Алгебра и логика. 2014. **53**, № 5. 555–569.
12. *Файзрахманов М.Х.* О полурешетках Роджерса обобщенно вычислимых нумераций // Сиб. матем. журн. 2017. **58**, № 6. 1418–1427.

13. *Вьюгин В.В.* О минимальных нумерациях вычислимых классов рекурсивно-перечислимых множеств // Докл. АН СССР. 1973. **212**, № 2. 273–275.
14. *Марченков С.С.* О существовании семейств без позитивных нумераций // Матем. заметки. 1973. **13**, № 4. 597–604.
15. *Бадаев С.А.* Минимальные нумерации // Тр. Ин-та математики СО РАН. 1993. **25**. 3–34.
16. *Friedberg R.M.* Three theorems on recursive enumeration. I. Decomposition. II. Maximal set. III. Enumeration without duplication // J. Symb. Log. 1958. **23**, N 3. 309–316.
17. *Гончаров С.С., Лемпп С., Соломон Д.* Фридберговские нумерации семейств n-вычислимо перечислимых множеств // Алгебра и логика. 2002. **41**, № 2. 143–154.
18. *Гончаров С.С.* Семейства с единственной позитивной нумерацией // Вычисл. системы. 1992. **146**. 96–104.
19. *Ershov Yu.L.* Theory of numberings // Handbook of computability theory / Ed. by E.R. Griffor; Stud. Logic Found. Math. Vol. 140. Amsterdam: Elsevier, 1999. 473–503.
20. *Бадаев С.А., Гончаров С.С.* О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств // Алгебра и логика. 2001. **40**, № 5. 507–522.
21. *Подзоров С.Ю.* О локальном строении полурешеток Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций // Алгебра и логика. 2005. **44**, № 2. 148–172.
22. *Soare R.I.* Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets. Perspectives in mathematical logic. Berlin; Heidelberg; N.Y., etc.: Springer-Verlag, 1987.
23. *Nies A.* Computability and Randomness. Oxford: Oxford Logic Guides, 2009.
24. *Badaev S.A., Goncharov S.S.* On computable minimal enumerations. Algebra // Proc. Third Int. Conf. on Algebra in memory of M.I. Kargopolov. Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter, 1995. 21–32.
25. *Badaev S.A., Lempp S.* A decomposition of the Rogers semilattice of a family of d.c.e. sets // J. Symb. Log. 2009. **74**, N 2. 618–640.
26. *Гончаров С.С.* Вычислимые однозначные нумерации // Алгебра и логика. 1980. **19**, № 5. 507–551.
27. *Goncharov S.S., Harizanov V., Knight J., McCoy C., Miller R., Solomon R.* Enumerations in computable structure theory // Ann. Pure and Appl. Log. 2005. **136**, N 3. 219–246.
28. *Файзрахманов М.Х.* Минимальные обобщенно вычислимые нумерации и высокие степени // Сиб. матем. журн. 2017. **58**, № 3. 710–716.
29. *Faizrahmanov M.Kh.* Extremal numberings and fixed point theorems // Math. Log. Quart. 2022. **68**, N 4. 398–408.

Поступила в редакцию
14.11.2022

УДК 517.93

МНОЖЕСТВО ПРЕДЕЛЬНО РЕАЛИЗУЕМЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ МНОЖЕСТВА КАНТОРА

А. Н. Ветохин[1]

Установлено, что в любой окрестности каждого непрерывного отображения совершенного множества Кантора найдется отображение с заданной топологической энтропией.

Ключевые слова: топологическая энтропия, символическая динамика.

It is established that in any neighborhood of each continuous mapping of a Cantor perfect set there is a mapping with a given topological entropy.

Key words: topological entropy, symbolic dynamics.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-6

В качестве меры "массивности" компактного метрического пространства X А. Н. Колмогоров в статье [1] ввел понятие ε-емкости, которая определяется как максимальное число ε-различимых

[0] *Ветохин Александр Николаевич* — доктор физ.-мат. наук, доцент каф. дифференциальных уравнений мех.-мат. ф-та МГУ; проф. каф. ФН-1 "Высшая математика" МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: anveto27@yandex.ru.

Vetokhin Alexander Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mathematics and Mechanics, Chair of Differential Equations; Professor, Bauman Moscow State Technical University, Chair of Higher Mathematics.