Автор выражает глубокую благодарность А.Ю. Попову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пак И.Н.* О суммах тригонометрических рядов // Успехи матем. наук. 1980. **35**, № 2 (212). 91–144.
2. *Hartman Ph., Wintner A.* On sine series with monotone coefficients // J. London Math. Soc. 1953. **28**. 102–104.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965.
4. *Харди Г.Г., Рогозинский В.В.* Ряды Фурье. М.: Либроком, 2009.
5. *Vietoris L.* Über das Vorzeichen gewisser trigonometrischer Summen // Österr. Acad. Wiss. Math.-Natur. Kl., S.-Ber., Abt. II. 1958. **167**. 125–135.
6. *Белов А.С.* О примерах тригонометрических рядов с неотрицательными частными суммами // Матем. сб. 1995. **186**, № 4. 21–46.
7. *Попов А.Ю.* Оценки наибольшего положительного корня суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами // Матем. заметки. 2014. **96**, № 5. 747–761.

Поступила в редакцию
07.10.2022

УДК 511

РАССТОЯНИЕ ГРОМОВА–ХАУСДОРФА МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ ВЕРШИН ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ, ВПИСАННЫХ В ОДНУ ОКРУЖНОСТЬ

Т. К. Талипов[1]

В работе вычислено расстояние Громова–Хаусдорфа между множествами вершин правильных n- и m-угольников, наделенных метрикой, индуцированной с окружности, когда m нацело делится на n. Также вычислены все расстояния до 2- и 3-угольников.

Ключевые слова: метрическая геометрия, расстояние Громова–Хаусдорфа, метрическое пространство.

We calculate the Gromov–Hausdorff distance between vertex sets of regular polygons endowed with the round metric. We give a full answer for the case of n- and m-gons with m divisible by n. We also calculate all distances to 2-gons and 3-gons

Key words: metric geometry, Gromov–Hausdorff distance, metric space.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-4

В настоящей работе изучается пространство всех метрических компактов, рассматриваемых с точностью до изометрии, которое наделено метрикой Громова–Хаусдорфа. Заметим, что точные значения расстояния Громова–Хаусдорфа между конкретными метрическими пространствами известны лишь для малого числа случаев. Например, в работе [1] вычислено расстояние Громова–Хаусдорфа до 1-пространств — метрических пространств с одним ненулевым расстоянием. В работе [2] вычислено расстояние Громова–Хаусдорфа между отрезком и окружностью, а в [3] — расстояние Громова–Хаусдорфа между сферами разных размерностей, между вершинами правильных многоугольников и окружностью, а также между разными правильными многоугольниками, вписанными в одну окружность. Авторы работы [3] ставят задачу вычисления последнего расстояния и приводят пример решения для m-угольника и $(m+1)$-угольника. Мы делаем некоторые продвижения в решении данной задачи, а именно полностью исследован случай m- и n-угольников при условии, что m делится нацело на n, а также вычислены все расстояния до 2-угольников и 3-угольников.

1. Предварительные сведения. Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in X$ будем обозначать $d(x,y)$ или $|xy|$. Для непустых $A, B \subset X$ определим

$$d_H(A,B) = \max\Big\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(a,b)\Big\}.$$

[1] *Талипов Талант Камбарович* — студ. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: talipovtalant.live@gmail.com.

Talipov Talant Kambarovich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.

Определение. Величина $d_H(A,B)$ называется *расстоянием Хаусдорфа* между A и B.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X',Y',Z'), состоящую из метрического пространства Z' и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X,Y). Положим

$$d_{GH}(X,Y)=\inf\bigl\{r:\exists(X',Y',Z'),d_H(X',Y')\leqslant r\bigr\}.$$

Определение. Величина $d_{GH}(X,Y)$ называется *расстоянием Громова–Хаусдорфа* между метрическими пространствами X и Y.

Определение. Для множеств X,Y *соответствием* между X и Y называется $R\subset X\times Y$, такое, что для любого $x\in X$ существует $y\in Y$, для которых $(x,y)\in R$ и, обратно, для любого $y\in Y$ существует $x\in X$, для которых $(x,y)\in R$. Если X,Y — метрические пространства, то определим *искажение соответствия* R следующим образом: $\operatorname{dis}R=\sup\Bigl\{\bigl||x_1x_2|-|y_1y_2|\bigr|:(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in R\Bigr\}$. Множество всех соответствий между X и Y будем обозначать $\mathcal{R}(X,Y)$.

Теорема 1 [4]. *Для произвольных метрических пространств X и Y выполняется*

$$d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\inf\bigl\{\operatorname{dis}R:R\in\mathcal{R}(X,Y)\bigr\}.$$

В работе [3] рассматривалось следующее преобразование метрики. Для метрического пространства (X,d_X) рассмотрим псевдометрическое пространство (X,u_X), где отображение $u_X\colon X\times X\to\mathbb{R}_+$ определено следующим образом:

$$u_X\,(x,y)\mapsto\inf\bigl\{\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}d_X(x_i,x_{i+1}):x_0=x,\dots,x_n=y\bigr\}.$$

Метрическое пространство $\mathbf{U}(X)$ определим как факторпространство (X,u_X) по следующему отношению эквивалентности:

$$x\sim y\iff u_X(x,y)=0.$$

Теорема 2 [3]. *Для любых метрических пространств X и Y выполняется неравенство*

$$d_{GH}(X,Y)\geqslant d_{GH}\bigl(\mathbf{U}(X),\mathbf{U}(Y)\bigr).$$

Определение. Метрическое пространство X будем называть *симплексом*, если все его ненулевые расстояния одинаковы. Симплекс мощности m, у которого все ненулевые расстояния равны $\lambda>0$, будем обозначать $\lambda\Delta_m$.

Пусть X — произвольное метрическое пространство, m — кардинальное число, не превосходящее мощности X. Обозначим через $\mathcal{D}_m(X)$ семейство всевозможных разбиений пространства X на m непустых подмножеств. Пусть $A,B\subset X$ — произвольные непустые подмножества X, тогда положим

$$|AB|=\inf\bigl\{|ab|:a\in A,b\in B\bigr\}.$$

Для разбиения $D=\{X_i\}_{i\in I}\in\mathcal{D}_m(X)$ определим следующие величины:

$$\operatorname{diam}D=\sup_{i\in I}\operatorname{diam}X_i,\quad \alpha(D)=\inf\bigl\{|X_iX_j|:i\neq j\bigr\}.$$

Теорема 3 [1]. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m=\#\lambda\Delta\leqslant\#X$. Тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta,X)=\inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)}\max\bigl\{\operatorname{diam}D,\lambda-\alpha(D),\operatorname{diam}X-\lambda\bigr\}.$$

2. Основные результаты. Для каждого натурального $n\geqslant2$ обозначим через P_n множество вершин правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность S^1, наделенную внутренней метрикой. Отметим, что P_2 — пара диаметрально противоположных точек. Наделим множества P_n метрикой, индуцированной с окружности. Для $m,n\geqslant2$ положим $p_{m,n}=d_{GH}(P_m,P_n)$.

Предложение 1 [3]. *Для любого $m\geqslant2$ выполняется*

$$d_{GH}(S^1,P_m)=\frac{\pi}{m},\quad d_{GH}(P_m,P_{m+1})=\frac{\pi}{m+1}.$$

Перейдем к основным результатам работы.

Лемма 1. *Пусть* $n \geqslant 2$, $p \in \mathbb{N}$. *Тогда для любых* $i, j = 1, 2, \ldots, n$ *и* $k, l = 0, 1, \ldots, p-1$ *выполняется*

$$\Big|\min\big(|i-j|, n-|i-j|\big) - \min\Big(\Big|i-j+\frac{k-l}{p}\Big|, n-\Big|i-j+\frac{k-l}{p}\Big|\Big)\Big| \leqslant \frac{|k-l|}{p}.$$

Доказательство. Положим $S = \Big|\min\big(|i-j|, n-|i-j|\big) - \min\Big(\Big|i-j+\frac{k-l}{p}\Big|, n-\Big|i-j+\frac{k-l}{p}\Big|\Big)\Big|$. Заметим, что так как $\frac{|k-l|}{p} < 1$, то

$$|i-j+\frac{k-l}{p}| = \begin{cases} i-j+\frac{k-l}{p}, & \text{если } i-j>0; \\ \frac{|k-l|}{p}, & \text{если } i-j=0; \\ j-i+\frac{l-k}{p}, & \text{если } i-j<0. \end{cases}$$

Если $i-j=0$, то

$$S = \Big|\min(0,n) - \min\Big(\frac{|k-l|}{p}, n-\frac{|k-l|}{p}\Big)\Big| = \frac{|k-l|}{p}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $i-j>0$. Рассмотрим отдельно несколько случаев.

1) Предположим, что $i-j<\frac{n}{2}$. Если $i-j+\frac{k-l}{p}>\frac{n}{2}$, то $i-j=\frac{n-1}{2}$ и $\frac{k-l}{p}>\frac{1}{2}$. В таком случае

$$S = \Big|\frac{n-1}{2} - \Big(n - \Big(\frac{n-1}{2}+\frac{k-l}{p}\Big)\Big)\Big| = \Big|\frac{k-l}{p}-1\Big| < \frac{|k-l|}{p},$$

где последнее неравенство верно в силу того, что $\frac{k-l}{p}>\frac{1}{2}$. Если $i-j+\frac{k-l}{p}\leqslant\frac{n}{2}$, то

$$S = \Big|i-j-\Big(i-j+\frac{k-l}{p}\Big)\Big| = \frac{|k-l|}{p}.$$

2) Предположим, что $i-j=\frac{n}{2}$. Тогда

$$S = \Big|\frac{n}{2} - \min\Big(\frac{n}{2}+\frac{k-l}{p}, \frac{n}{2}+\frac{l-k}{p}\Big)\Big| = \frac{|k-l|}{p}.$$

3) Предположим, что $i-j>\frac{n}{2}$. Если $i-j+\frac{k-l}{p}<\frac{n}{2}$, то $i-j=\frac{n+1}{2}$ и $\frac{l-k}{p}>\frac{1}{2}$. В таком случае

$$S = \Big|\frac{n-1}{2} - \Big(\frac{n+1}{2}+\frac{k-l}{p}\Big)\Big| = \Big|\frac{l-k}{p}-1\Big| < \frac{|k-l|}{p},$$

где последнее неравенство верно в силу того, что $\frac{l-k}{p}>\frac{1}{2}$. Если $i-j+\frac{k-l}{p}\geqslant\frac{n}{2}$, то

$$S = \Big|n-i+j-\Big(n-i+j-\frac{k-l}{p}\Big)\Big| = \frac{|k-l|}{p}.$$

Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть* $2 \leqslant n \leqslant m$ *и* m *делится на* n *без остатка, тогда*

$$p_{n,m} = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{m}.$$

Доказательство. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — вершины P_n, а $v_1, \ldots, v_m$ — вершины P_m. Докажем, что $p_{n,m} \geqslant \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{m}$. По теореме 2

$$p_{n,m} \geqslant d_{GH}\big(\mathbf{U}(P_m), \mathbf{U}(P_n)\big).$$

Заметим, что $\mathbf{U}(P_m), \mathbf{U}(P_n)$ — симплексы мощности m и n с попарными ненулевыми расстояниями $\frac{2\pi}{m}$ и $\frac{2\pi}{n}$ соответственно. Тогда по теореме 3

$$p_{n,m} \geqslant d_{GH}\big(\mathbf{U}(P_m), \mathbf{U}(P_n)\big) = \frac{1}{2}\max\Big\{\frac{2\pi}{m}, \frac{2\pi}{n}-\frac{2\pi}{m}\Big\} \geqslant \frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{m}.$$

Докажем теперь оценку сверху. Пусть $m = pn$, где $p \in \mathbb{N}$. Тогда $\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{m} = \frac{(p-1)\pi}{pn}$. Построим соответствие $R \in \mathcal{R}(P_n, P_m)$, такое, что $\operatorname{dis} R \leqslant \frac{2(p-1)\pi}{pn}$:

$$R = \bigcup_{i=1}^{n} \big\{ (u_i, v_{pi-k}) : k = 0, 1, \ldots, p-1) \big\}.$$

Тогда по лемме 1 для любых $i, j = 1, 2, \ldots, n$ и $k, l = 0, 1, \ldots, p-1$ выполняется

$$\big| d(u_i, u_j) - d(v_{pi-l}, v_{pj-k}) \big| = \Big| \frac{2\pi}{n} \min\big(|i-j|, n - |i-j|\big) - \frac{2\pi}{pn} \min\big(|pi - pj + k - l|, pn- \\ -|pi - pj + k - l|\big) \Big| \leqslant \frac{2\pi|k-l|}{pn} \leqslant \frac{2(p-1)\pi}{pn}.$$

Таким образом, $\operatorname{dis} R \leqslant \frac{2(p-1)\pi}{pn}$, и это завершает доказательство.

Теорема 5. *Пусть $m \geqslant 2$, тогда*

$$p_{2,m} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}, & \text{если } m \text{ нечетное;} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}, & \text{если } m \text{ четное.} \end{cases}$$

Доказательство. Случай четного m напрямую следует из теоремы 4. Пусть теперь m — нечетное число. Пусть u_1, u_2 — вершины P_2, а $v_1, \ldots, v_m$ — вершины P_m. Заметим, что P_2 — симплекс мощности 2 со стороной длины π, т.е. $P_2 = \pi\Delta_2$. Тогда по теореме 3

$$d_{GH}(P_2, P_m) = \frac{1}{2} \inf_{D \in \mathcal{D}_2} \max\big\{ \operatorname{diam} D, \pi - \alpha(D), \operatorname{diam} P_m - \pi \big\},$$

где $\mathcal{D}_2$ — множество разбиений P_m на два непустых подмножества. В нашем случае $\alpha(D) = \frac{2\pi}{m}$ и $\operatorname{diam} P_m = \pi - \frac{\pi}{2m}$. Поэтому

$$d_{GH}(P_2, P_m) = \frac{1}{2} \inf_{D \in \mathcal{D}_2} \max\{ \operatorname{diam} D, \pi - \frac{\pi}{2m} \}.$$

Покажем, что для любого $D \in \mathcal{D}_2$ будет выполняться неравенство

$$\operatorname{diam} D \geqslant \pi - \frac{\pi}{2m}.$$

Предположим, что для разбиения $D = \{X_1, X_2\}$ верно обратное, т.е. $d = \operatorname{diam} D < \pi - \frac{\pi}{2m}$. Не ограничивая общности, можем считать, что $\operatorname{diam} X_1 = d$. Тогда найдутся вершины $v_i, v_j \in P_m$, такие, что $v_i, v_j \in X_1$ и $d(v_i, v_j) = d$. Рассмотрим вершины $v_k, v_l \in P_m$, соседние с v_i и v_j соответственно и не лежащие внутри меньшей дуги окружности S^1, соединяющей v_i с v_j. Вершина v_k не может принадлежать множеству разбиения X_1, так как иначе

$$d = \operatorname{diam} X_1 \geqslant d(v_k, v_j) = d(v_i, v_j) + \frac{2\pi}{m} = d + \frac{2\pi}{m} > d.$$

Аналогично $v_l \in X_2$. Тогда

$$d = \operatorname{diam} D \geqslant \operatorname{diam} X_2 \geqslant d(v_k, v_l) \geqslant d(v_i, v_j) + \frac{2\pi}{m} = d + \frac{2\pi}{m} > d.$$

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть $m \geqslant 3$, а r — остаток от деления m на 3, тогда*

$$p_{3,m} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{m}, & \text{если } r = 0; \\ \frac{\pi}{3} - \frac{r\pi}{3m}, & \text{если } r \neq 0. \end{cases}$$

Доказательство. Случай $r = 0$ напрямую следует из теоремы 4. Пусть теперь $r > 0$. Заметим, что P_3 — симплекс мощности 3 со стороной длины $\frac{2\pi}{3}$, т.е. $P_3 = \frac{2\pi}{3}\Delta_3$. Тогда по теореме 3

$$d_{GH}(P_3, P_m) = \frac{1}{2} \inf_{D \in \mathcal{D}_3} \max\Big\{\operatorname{diam} D, \frac{2\pi}{3} - \alpha(D), \operatorname{diam} P_m - \frac{2\pi}{3}\Big\},$$

где $\mathcal{D}_3$ — множество разбиений P_m на три непустых подмножества. В нашем случае $\alpha(D) = \frac{2\pi}{m}$ и $\operatorname{diam} P_m \leqslant \pi$. Из предложения 1 следует, что $p_{3,4} = \frac{\pi}{4}$. Теперь будем считать, что $m \geqslant 5$. Поэтому

$$d_{GH}(P_3, P_m) = \frac{1}{2} \inf_{D \in \mathcal{D}_3} \max\{\operatorname{diam} D, \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{m}\}.$$

Положим $q = [\frac{m}{3}]$. Пусть $r = 1$. Рассмотрим следующее разбиение $D = \{X_1, X_2, X_3\}$:

$$X_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}, \quad X_2 = \{v_{q+1}, v_{q+2}, \dots, v_{2q}\}, \quad X_3 = \{v_{2q+1}, v_{2q+2}, \dots, v_m\}.$$

Тогда $\operatorname{diam} D = (\frac{m-1}{3})\frac{2\pi}{m} = \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3m}$. Покажем, что для любого $D \in \mathcal{D}_3$ будет выполняться неравенство

$$\operatorname{diam} D \geqslant \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3m}.$$

Предположим, что для разбиения $D = \{X_1, X_2, X_3\}$ верно обратное, т.е. $d = \operatorname{diam} D < \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3m}$. Не ограничивая общности, будем считать, что множество X_1 содержит больше одной точки. Тогда найдутся вершины $v_i, v_j \in P_m$, такие, что $v_i, v_j \in X_1$ и $d(v_i, v_j) = \operatorname{diam} X_1$. Покажем, что всякая вершина $v_k \in X_1$ обязана лежать внутри меньшей дуги окружности S^1, соединяющей v_i, v_j. Предположим, что $v_k \in X_1$ лежит вне этой дуги. Тогда окружность разбивается на три дуги: v_iv_j, v_jv_k, v_kv_i. Длина каждой из них должна быть не больше $\operatorname{diam} X_1 \leqslant d$. Тогда

$$2\pi = d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) + d(v_k, v_i) \leqslant 3d < 2\pi - \frac{2\pi}{m} < 2\pi.$$

Таким образом, каждое из множеств X_1, X_2 и X_3 представляет собой множество подряд идущих вершин P_m диаметра не больше $\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3m} - \frac{2\pi}{m}$. Тогда

$$2\pi - \frac{6\pi}{m} = \operatorname{diam} X_1 + \operatorname{diam} X_2 + \operatorname{diam} X_3 \leqslant 2\pi - \frac{6\pi}{m} - \frac{2\pi}{m} < 2\pi - \frac{6\pi}{m}.$$

Значит, $d_{GH}(P_3, P_m) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3m}$. Пусть $r = 2$. Рассмотрим следующее разбиение $D = \{X_1, X_2, X_3\}$:

$$X_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}, \quad X_2 = \{v_{q+1}, v_{q+2}, \dots, v_{2q+1}\}, \quad X_3 = \{v_{2q+2}, v_{2[\frac{m}{3}]+2}, \dots, v_m\}.$$

Тогда

$$\operatorname{diam} D = (\frac{m-2}{3})\frac{2\pi}{m} = \frac{2\pi}{3} - \frac{4\pi}{3m}.$$

Повторяя рассуждения для случая $r = 1$, получим, что для любого $D \in \mathcal{D}_3$ будет выполняться неравенство

$$\operatorname{diam} D \geqslant \frac{2\pi}{3} - \frac{4\pi}{3m}.$$

Значит, $d_{GH}(P_3, P_m) = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3m}$. Теорема доказана.

Автор приносит благодарность научному руководителю А. А. Тужилину и А. О. Иванову за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григорьев Д.С., Иванов А.О., Тужилин А.А.* Расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов // Чебышёвский сб. 2019. **20**, № 2. 108–122.
2. *Ji Y., Tuzhilin A.A.* Gromov–Hausdorff distance between segment and circle // ArXiv e-prints, arXiv:2101.05762v1, 2021.
3. *Lim S., Memoli F., Smith Z.* The Gromov–Hausdorff distance between spheres // ArXiv e-prints, arXiv:2105.00611 v5, 2022.
4. *Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В.* Курс метрической геометрии. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2004.

Поступила в редакцию
14.10.2022