согласно сделанному перед формулировкой следствия 6 замечанию $L_B(K,\epsilon) = \Theta\left(\frac{1}{\epsilon \log_2 \frac{1}{\epsilon}}\right) > L(\epsilon)$. Во втором случае через рассматриваемый базис выражается базис

$$B = \{x - y, \max(x, y), |x|, -x, 1\} \bigcup \{cx : 0 \leqslant c \leqslant 1\},$$

для которого $L_B(K,\epsilon) = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)$, а значит, и для рассматриваемого базиса $L_B(K,\epsilon) < L(\epsilon)$. Если изучаемая проблема распознавания выполнимости неравенств была бы разрешима, то была бы разрешима и проблема о диофантовых уравнениях. □

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075–15–2022–284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Матиясевич Ю.В.* Алгоритм Тарского //Компьютерные инструменты в образовании. 2008. № 6. 4–14.
2. *Матиясевич Ю.В.* Десятая проблема Гильберта. М.: Физматлит, 1993.
3. *Adler A.* Some recursively unsolvable problems in analysis // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. **22**, N 2. 523–526.
4. *Wang P.* The undecidability of the existence of zeros of real elementary functions // J. ACM. 1974. **21**, N 4. 586–589.
5. *Richardson D.* Some undecidable problems involving elementary functions od a real variable // J. Symbol. Log. 1968. **33**, N 4. 514–520.
6. *Гашков С.Б.* Сложность реализации булевых функций схемами из функциональных элементов и формулами в базисах, элементы которых реализуют непрерывные функции // Проблемы кибернетики. Вып. 37. М.: Наука, 1980. 57–118.
7. *Turan G., Vatan F.* On the computation of Boolean functions by analog circuit of bounded fan-in // J. Computer and System Sci. 1997. **54**, N 1. 199–212.
8. *Гашков С. Б., Вегнер Я.В.* О сложности реализации булевых функций вещественными формулами // Матем. заметки. 2012. **92**, №2. 181–191.
9. *Гашков С. Б., Вегнер Я.В.* О сложности приближенной реализации липшицевых функций схемами в континуальных базисах // Матем. заметки. 2012. **92**, №1. 27–43.

Поступила в редакцию
02.09.2022

УДК 517

ОЦЕНКА НАИМЕНЬШЕГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО КОРНЯ РЯДА ПО СИНУСАМ ГАРМОНИЧЕСКОЙ В КРУГЕ ФУНКЦИИ

Т. Ю. Семенова[1]

Решается задача нахождения наименьшего положительного нуля ряда по синусам гармонической в круге функции, представимой на границе круга в виде ряда с монотонными коэффициентами.

Ключевые слова: синус-ряд, монотонные коэффициенты, гармонические функции.

The problem of finding the smallest positive zero of a sine series of a harmonic function in a circle, represented on the boundary of the circle as a series with monotone coefficients, is solved.

Key words: sine series, monotone coefficients, harmonic functions.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-3

[1] *Семенова Татьяна Юрьевна* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ; Моск. центр фунд. и прикл. матем., e-mail: station@list.ru.

Semenova TatianaYuryevna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis; Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics.

1. Введение и постановка задачи. Рассмотрим ряд

$$S(x,\rho)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k\rho^k\sin(kx), \tag{1}$$

для коэффициентов b_k которого выполнены условия

$$b_1>0;\quad b_{k+1}\leqslant b_k,\ \forall k\in\mathbb{N};\quad \lim_{k\to\infty} b_k=0. \tag{2}$$

Считаем, что $\rho\in(0,1)$ — фиксированный параметр, x — переменная. Ряд (1) сходится при всех действительных значениях x, и его сумма представляет собой непрерывную 2π-периодическую функцию. Поскольку $S(0,\rho)=S(\pi,\rho)=0$ и существует $S'(0,\rho)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} kb_k\rho^k>0$, то сумма (1) положительна в некоторой правой полуокрестности нуля. Значит, она имеет наименьший положительный корень $\xi(\rho,\{b_k\})\in(0,\pi]$. Соответственно встает задача об оценке или нахождении точного значения величины

$$\xi(\rho)=\inf_{\{b_k\}}\xi(\rho,\{b_k\}),$$

где нижняя грань берется по всем последовательностям $\{b_k\}$, удовлетворяющим условиям (2). В качестве важного практического приложения результатов решения данной задачи можно отметить задачу об определении области на плоскости, где гармоническая в круге функция принимает положительные значения. При этом на границе круга эта функция представима в виде ряда по синусам с монотонными коэффициентами.

Оценке интервалов знакопостоянства и оценке корней сумм синус-рядов с монотонными коэффициентами, т.е. удовлетворяющих условию (2), посвящено большое число работ (см., например, обзор [1]). Приведем результаты, полученные для задач, наиболее близких к рассматриваемой.

Прежде всего напомним, что суммы

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kx), \tag{3}$$

коэффициенты которых удовлетворяют условию (2), положительны в некоторой правой полуокрестности нуля (см. [2]). А так как в точке $x=\pi$ сумма любого синус-ряда равна нулю, то существует величина $\xi(\{b_k\})$ — наименьший положительный корень функции (3). Зависимость наименьшего положительного корня суммы ряда (3) от последовательности $\{b_k\}$ достаточно сложна и в общем случае вряд ли может быть найдена. Отметим несколько случаев, когда величина $\xi(\{b_k\})$ принимает максимально возможное значение, равное π.

Если последовательность $\{b_k\}$ удовлетворяет условиям (2) и к тому же является выпуклой, т.е. $b_k-2b_{k+1}+b_{k+2}\geqslant 0$, то несложно показать, что $\xi(\{b_k\})=\pi$. Действительно, применив дважды преобразование Абеля к ряду (3) (см., например, [3, т. 1, с. 294] или [4, с. 56–61]), имеем представление

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kx)=\frac{1}{4\sin^2(x/2)}\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-2b_{k+1}+b_{k+2})\Big((k+1)\sin x-\sin(kx+x)\Big). \tag{4}$$

Так как $(k+1)\sin x-\sin(kx+x)>0$ для любых натуральных k и любых $x\in(0,\pi)$, то на интервале $(0,\pi)$ сумма $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kx)$ положительна и $\xi(\{b_k\})=\pi$.

В работе Л. Вьеториса [5] для монотонной неотрицательной последовательности $\{b_k\}$ без свойства выпуклости, но при дополнительных условиях

$$b_{2k}\leqslant\left(1-\frac{1}{2k}\right)b_{2k-1},\quad \forall k\in\mathbb{N},$$

также доказано равенство $\xi(\{b_k\})=\pi$.

Результат Л. Вьеториса усилен А.С. Беловым в [6]. Им доказано необходимое и достаточное условие неотрицательности всех частичных сумм ряда (3) на интервале $(0,\,\pi)$:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}kb_k\geqslant 0\ \text{ при всех }\ n\geqslant 1.$$

В то же время пример последовательности сопряженных ядер Дирихле

$$\widetilde{D}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin(x/2)},$$

которые являются синус-рядами с монотонными коэффициентами, показывает, что точная нижняя грань $\xi(\{b_k\})$, взятая по всем последовательностям $\{b_k\}$, удовлетворяющим условию (2), равна нулю.

В статье А.Ю. Попова [7] решена экстремальная задача нахождения $\inf \xi(\{b_k\})$ на подклассах последовательностей $\{b_k\}$, определяемых ограничением сверху отношения двух коэффициентов с фиксированными номерами. В частности, оказалось, что

$$\inf\left\{\xi(\{b_k\}) \,\middle|\, \{b_k\} \text{ удовлетворяют условию (2) и } \frac{b_2}{b_1} \leqslant \frac{8}{9}\right\} = 0$$

и при любом фиксированном $m \in \mathbb{N}$

$$\inf\left\{\xi(\{b_k\}) \,\middle|\, \{b_k\} \text{ удовлетворяют условию (2) и } \frac{b_{m+1}}{b_m} \leqslant 1 - \frac{1}{(2m+1)^2}\right\} = 0.$$

В настоящей работе доказано, что для рядов (1), где отношение последующего коэффициента к предыдущему всегда не превосходит $\rho < 1$, ситуация принципиально иная. Величина $\xi(\rho)$ есть положительная функция параметра ρ на всем интервале $0 < \rho < 1$. В частности, доказано, что при любом $n \geqslant 4$ сумма ряда (1) положительна на полуинтервале $0 < x < \frac{2\pi}{n}$, если $0 < \rho \leqslant \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

2. Формулировка результатов. Сразу отметим, что при $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ последовательность $\{b_k\rho^k\}$ является выпуклой, так как

$$b_k\rho^k - 2b_{k+1}\rho^{k+1} + b_{k+2}\rho^{k+2} = \rho^k(b_k - 2b_{k+1}\rho + b_{k+2}\rho^2) \geqslant \rho^k(b_k - b_{k+1} + b_{k+2}\rho^2) \geqslant 0.$$

Поэтому $S(x,\rho) > 0$ для всех $x \in (0,\pi)$ и тогда $\xi(\rho) = \pi$. Далее нас будет интересовать случай $\rho \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Обозначим

$$f_n(x,\rho) = \sin x - \rho^n \sin(nx + x) + \rho^{n+1}\sin(nx)$$

и при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$\begin{cases} x \to \min, \ \ x \in (0,\pi), \\ \rho \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \\ f_n(x,\rho) = 0, \\ \frac{\partial f_n}{\partial x}(x,\rho) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Заметим, что уравнение $f_1(x,\rho) = 0$ равносильно на интервале $0 < x < \pi$ уравнению $2\cos x = \rho + 1/\rho$ и, следовательно, корней не имеет. Уравнение $f_2(x,\rho) = 0$ при любом $\rho \in (1/2,\ 1)$ имеет на интервале $0 < x < \pi$ единственный корень $x_2(\rho) = \arccos\left(-\frac{1}{2\rho}\right)$, но частная производная $\frac{\partial f_2}{\partial x}\big(x_2(\rho), \rho\big)$ при этих значениях ρ в нуль не обращается. Поэтому задачу (5) будем рассматривать только при $n \geqslant 3$.

Предложение 1. *При $n \geqslant 3$ задача (5) имеет решение (x_n, ρ_n). При этом выполнено включение $x_n \in \left(\frac{\pi}{n+1} + \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}\right)$, последовательность ρ_n монотонно возрастает, верны асимптотика*

$$\rho_n = 1 - \frac{\pi^2}{2n^3} + o(n^{-4}), \ \ n \to \infty, \tag{6}$$

и двойное неравенство

$$\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{n}} < \rho_n < \left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{7}$$

Теорема. *Выполнено равенство*

$$\xi(\rho) = \begin{cases} \pi, & \text{если } \rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right]; \\ \arccos(-\frac{1}{2\rho}), & \text{если } \rho \in \left[\frac{1}{2}, \rho_3\right); \\ \min\{x > 0 :\ f_n(x,\rho) = 0\}, & \text{если } \rho \in [\rho_n, \rho_{n+1}),\ n \geqslant 3. \end{cases}$$

Заметим, что из доказательств предложения 1 и теоремы будет следовать, что $\xi(\rho)$ — монотонно убывающая и непрерывная на каждом из промежутков $[\rho_n, \rho_{n+1})$ функция. Часть графика $x = \xi(\rho)$ изображена на рисунке.

Следствие. *Какова бы ни была последовательность* $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, *удовлетворяющая условиям* (2), *сумма ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k\rho^k\sin(kx)$ *заведомо положительна на следующих множествах:*

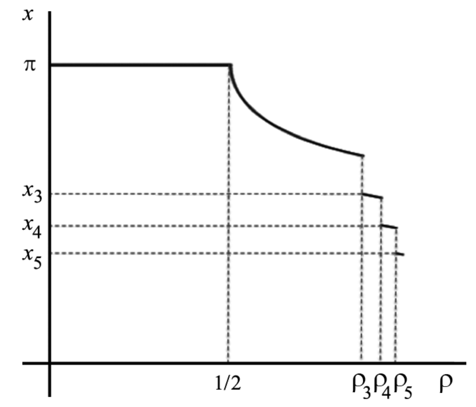

График функции $\xi(\rho)$

$$\Big\{(x,\rho)\ \Big|\ \rho\in\big(0,\,\frac{1}{2}\big],\ x\in(0,\,\pi)\Big\},$$

$$\Big\{(x,\rho)\ \Big|\ \rho\in\big(0,\,\frac{45}{52}\big],\ x\in\Big(0,\,\arccos\big(-\frac{1}{2\rho}\big)\Big]\Big\},$$

$$\Big\{(x,\rho)\ \Big|\ \rho\in\Big(0,\,\big(\cos\frac{\pi}{n}\big)^{\frac{1}{n}}\Big],\ x\in\Big(0,\,\frac{2\pi}{n}\Big]\Big\},\quad \forall n\geqslant 4.$$

3. Доказательство предложения 1. Обозначим

$$D_n(x,\rho) = \sum_{k=1}^{n}\rho^k\sin(kx).$$

Представляя $D_n(x,\rho)$ в виде $\mathrm{Im}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\rho^k e^{ikx}\Big)$, несложно получить тождество

$$D_n(x,\rho) = \rho\cdot\frac{\sin x - \rho^n\sin(nx+x) + \rho^{n+1}\sin(nx)}{1-2\rho\cos x+\rho^2} = \rho\cdot\frac{f_n(x,\rho)}{1-2\rho\cos x+\rho^2}.$$

Здесь знаменатель дроби положителен при всех $x\in\mathbb{R}$ и $\rho\in(0,\,1)$, поэтому знак и нули $D_n(x,\rho)$ совпадают со знаком и нулями $f_n(x,\rho)$.

При $n\geqslant 3$ обозначим

$$\rho_n^* = \Big(\cos\frac{\pi}{n}\Big)^{\frac{1}{n}},\quad \rho_n^{**} = \big(\cos\frac{\pi}{n+1}\big)^{\frac{1}{n}}.$$

Легко показать, что $2^{-1/3}\leqslant\rho_n^*<\rho_n^{**}<1$. Далее в леммах 1–5 значение $n\geqslant 3$.

Лемма 1. *При* $\rho<1$ *на промежутке* $0<x\leqslant\frac{2\pi}{n+1}$ *функция* $f_n(x,\rho)>0$.

Доказательство. Знак функции $f_n(x,\rho)$ совпадает со знаком $D_n(x,\rho)$, значит, на $(0,\frac{\pi}{n})$ она положительна. Если же $x\in[\frac{\pi}{n},\frac{2\pi}{n+1}]$, то $\sin(nx+x)\leqslant 0$, $\cos(nx+\frac{x}{2})<\cos\frac{x}{2}$ и поэтому

$$f_n(x,\rho) = \sin x-\rho^n\sin(nx+x)+\rho^{n+1}\sin(nx)\geqslant\sin x-\rho^{n+1}(\sin(nx+x)-\sin(nx)) =$$

$$=\sin x-2\rho^{n+1}\sin\frac{x}{2}\cos\Big(nx+\frac{x}{2}\Big)>\sin x(1-\rho^{n+1})>0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *При* $\rho\leqslant\rho_n^*$ *на промежутке* $\frac{2\pi}{n+1}<x\leqslant\frac{2\pi}{n}$ *функция* $f_n(x,\rho)>0$.

Доказательство. При $x=\frac{2\pi}{n}$ имеем

$$f_n(\frac{2\pi}{n},\rho) = (1-\rho^n)\sin\frac{2\pi}{n}>0.$$

На интервале $\Big(\frac{2\pi}{n+1},\frac{2\pi}{n}\Big)$ верны неравенства $\sin(nx)<0,\ \sin(nx+x)>0,\ \ \cos\frac{x}{2}>\cos\frac{\pi}{n}$, поэтому

$$f_n(x,\rho)\geqslant f_n(x,\rho_n^*) = \sin x-\cos\frac{\pi}{n}\sin(nx+x)+\Big(\cos\frac{\pi}{n}\Big)^{\frac{n+1}{n}}\sin(nx)>$$

$$>\sin x-\cos\frac{\pi}{n}\,(\sin(nx+x)-\sin(nx)) = \sin x-2\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{x}{2}\cos\Big(nx+\frac{x}{2}\Big)\geqslant$$

$$\geqslant\sin x-2\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\Big(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{\pi}{n}\Big)>0.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *При $\rho > \rho_n^*$ на интервале $\frac{2\pi}{n+1} < x < \frac{2\pi}{n}$ функция $f_n(x,\rho)$ выпукла вниз.*

Доказательство. На интервале $\left(\frac{2\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n}\right)$ верны неравенства $\sin(nx) < 0$, $\sin(nx+x) > 0$, поэтому при $\rho > \rho_n^*$

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(x,\rho) = -\sin x + (n+1)^2\rho^n \sin(nx+x) - n^2\rho^{n+1}\sin(nx) > \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(x,\rho_n^*) =$$

$$= -\sin x + (n+1)^2\cos\frac{\pi}{n}\sin(nx+x) - n^2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{n+1}{n}}\sin(nx) > -\sin x + \frac{n^2}{4}\sin(nx+x) - \frac{n^2}{4}\sin(nx) =$$

$$= -2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{n^2}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right) > \sin\frac{x}{2}\left(-2\cos\frac{x}{2} + \frac{n^2}{2}\cos\frac{\pi}{n}\right) > \sin\frac{x}{2}\left(-2+\frac{n^2}{4}\right) > 0$$

и функция f_n выпукла вниз. Здесь использованы неравенства

$$(n+1)^2\cos\frac{\pi}{n} > \frac{n^2}{4} \quad \text{и} \quad \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{n+1}{n}} = \cos\frac{\pi}{n}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

верные для всех $n \geqslant 3$, и неравенство $\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right) > \cos\frac{\pi}{n}$, следующее из условия $nx+\frac{x}{2} \in \left(2\pi - \frac{\pi}{n+1}, 2\pi + \frac{\pi}{n}\right)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *При $\rho > \rho_n^*$ верно неравенство $\frac{\partial f_n}{\partial x}\left(\frac{\pi}{n+1}+\frac{\pi}{n},\rho\right) < 0$.*

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}\left(\frac{\pi}{n+1}+\frac{\pi}{n},\rho\right) = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}+\frac{\pi}{n}\right) - (n+1)\rho^n\cos\frac{\pi}{n} + n\rho^{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1} <$$

$$< \cos\left(\frac{\pi}{n+1}+\frac{\pi}{n}\right) - \rho^n\left((n+1)\cos\frac{\pi}{n} - n\cos\frac{\pi}{n+1}\right). \tag{8}$$

При $n = 3$ выражение (8) приобретает вид $\cos\frac{7\pi}{12} - \rho^3\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2}\right)$ и является отрицательным при всех $\rho \in (0,1)$.

При $n \geqslant 4$ верно неравенство $(n+1)\cos\frac{\pi}{n} - n\cos\frac{\pi}{n+1} > 0$, поэтому выражение (8) при $\rho > \rho_n^*$ можно оценить сверху выражением

$$\cos\left(\frac{\pi}{n+1}+\frac{\pi}{n}\right) - \cos\frac{\pi}{n}\left((n+1)\cos\frac{\pi}{n} - n\cos\frac{\pi}{n+1}\right) = (n+1)\cos\frac{\pi}{n}\left(\cos\frac{\pi}{n+1} - \cos\frac{\pi}{n}\right) -$$

$$-\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n+1} < 2(n+1)\sin\frac{\pi}{2n(n+1)}\sin\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)} - \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}\cdot\frac{5}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n+1} <$$

$$< 2(n+1)\cdot\frac{\pi}{2n(n+1)}\cdot\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)} - \frac{20}{n(n+1)} < \frac{\pi^2}{n^2} - \frac{20}{n(n+1)} < 0.$$

Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству предложения 1. Зафиксируем $n \geqslant 3$ и исследуем поведение двух наименьших положительных нулей $\mu_n(\rho)$ и $\nu_n(\rho)$ функции $f_n(x,\rho)$. Считаем, что $\mu_n(\rho) < \nu_n(\rho)$.

Если $\rho = 1$, то $f_n(x,1) = \sin x - \sin(nx+x) + \sin(nx) = 0$ при $x = \frac{2\pi l}{n+1}$ и $x = \frac{2\pi l}{n}$, $l \in \mathbb{Z}$, поэтому $\mu_n(1) = \frac{2\pi}{n+1}$ и $\nu_n(1) = \frac{2\pi}{n}$, причем производная $\frac{\partial f_n}{\partial x}(\mu_n(1),1) = (n+1)(\cos\frac{2\pi}{n+1} - 1) < 0$, $\frac{\partial f_n}{\partial x}(\nu_n(1),1) = (n+1)(\cos\frac{2\pi}{n} + 1) > 0$.

По лемме 3 при $\rho \in (\rho_n^*, 1]$ функция f_n на $\left(\frac{2\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n}\right)$ выпукла вниз, поэтому на отрезке $\left[\frac{2\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n}\right]$ она имеет либо два нуля, либо один нуль, либо не имеет ни одного. На $\left(0, \frac{2\pi}{n}\right]$ функция $f_n(\rho,x) > 0$ при любом $\rho \leqslant \rho_n^*$ (леммы 1 и 2).

Так как на отрезке $\left[\frac{2\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n}\right]$ выполнены неравенства $\sin(nx+x) \geqslant 0$ и $\sin(nx) \leqslant 0$, то $\frac{\partial f_n}{\partial \rho} = -n\rho^{n-1}\sin(nx+x) + (n+1)\rho^n\sin(nx) < 0$. Значит, при уменьшении ρ начиная с $\rho = 1$ значение $f_n(x,\rho)$ при фиксированном x увеличивается, т.е. левый нуль $\mu_n(\rho)$ увеличивается, а правый нуль

$\nu_n(\rho)$ уменьшается до момента совпадения нулей $\mu_n(\rho) = \nu_n(\rho) = x_n$, т.е. до некоторого момента $\rho = \rho_n > \rho_n^*$, когда частная производная $\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,\rho) = \cos x - (n+1)\rho^n \cos(nx+x) + n\rho^{n+1}\cos(nx) = 0$.

Мы доказали, что задача (5) имеет решение (x_n, ρ_n), при этом $x_n \in \left(\frac{2\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n}\right)$, $\rho_n > \rho_n^* = \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$. Так как при $\rho > \rho_n^*$ верно неравенство $\frac{\partial f_n}{\partial x}\left(\frac{\pi}{n+1} + \frac{\pi}{n}, \rho\right) < 0$ (лемма 4), то $x_n > \frac{\pi}{n+1} + \frac{\pi}{n}$. Это уточняет оценку для x_n.

Докажем, что $\rho_n < \rho_n^{**} = \left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$. Для этого достаточно проверить, что $f_n(x, \rho_n^{**}) < 0$ при некотором $x \in \left(\frac{2\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n}\right)$. Возьмем $x = \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n+1}$, тогда

$$f_n\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n+1}, \rho_n^{**}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n+1}\right) - \cos\frac{\pi}{n+1}\sin\frac{\pi}{n} - \left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}}\sin\frac{\pi}{n+1} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{n+1}\left(\cos\frac{\pi}{n} - \left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right) < 0.$$

В последней оценке использовано монотонное возрастание функции $\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^n$ при $n \geqslant 3$.

Монотонность последовательности ρ_n следует из неравенств

$$\rho_n < \left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} < \left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}} < \rho_{n+1}.$$

Асимптотика (6) следует из двусторонней оценки (7). Предложение доказано.

Замечание. Для значения ρ_4 нам в дальнейшем понадобится чуть более точная оценка сверху, а именно $\rho_4 < \left(\cos\frac{\pi}{4.69}\right)^{\frac{1}{4}}$. Она проверяется вычислением величины $f_4(x,\rho)$ при $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5}$ и $\rho = \left(\cos\frac{\pi}{4.69}\right)^{\frac{1}{4}}$. Ее приближенное значение равно $-0.0000973994 < 0$.

Отметим, что в процессе доказательства предложения 1 выведено следующее важное для дальнейшего утверждение.

Предложение 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Распределение знаков функции $D_n(x,\rho)$ на промежутке $0 < x \leqslant 2\pi/n$ таково:*

1) *при $0 < \rho < \rho_n$ и $0 < x \leqslant 2\pi/n$ функция $D_n(x,\rho) > 0$;*

2) *при $\rho_n \leqslant \rho \leqslant 1$ имеются две непрерывные функции $\mu_n(\rho)$ и $\nu_n(\rho)$, обладающие следующими свойствами: μ_n убывает, ν_n возрастает, $\mu_n(\rho_n) = \nu_n(\rho_n) = x_n$, $\mu_n(1) = \frac{2\pi}{n+1}$, $\nu_n(1) = \frac{2\pi}{n}$. И тогда если $\rho = \rho_n$, то $D_n(x_n, \rho_n) = 0$, $D_n(x, \rho_n) > 0$ при $x \in (0, x_n) \cup (x_n, 2\pi/n]$. Если же $\rho_n < \rho < 1$, то $D_n(x,\rho) = 0$ при $x = \mu_n(\rho)$ или $x = \nu_n(\rho)$, $D_n(x,\rho) > 0$ при $x \in \big(0, \mu_n(\rho)\big) \cup \big(\nu_n(\rho), 2\pi/n\big]$, $D_n(x,\rho) < 0$ при $x \in \big(\mu_n(\rho), \nu_n(\rho)\big)$.*

4. Доказательство теоремы. Сначала докажем следующие леммы.

Лемма 5. *При $\rho < \rho_n$ на интервале $0 < x < \frac{4\pi}{n+1}$ функция $D_n(x,\rho) > 0$.*

Доказательство. При $\rho < \rho_n$ на промежутке $0 < x \leqslant 2\pi/n$ функция $D_n(x,\rho) > 0$ (см. предложение 2). Для $x \in \left(\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n+1}\right)$ воспользуемся представлением (4):

$$4\sin^2(x/2)\cdot D_n(x,\rho) = \sum_{k=1}^{n-2}(\rho^k - 2\rho^{k+1} + \rho^{k+2})\big((k+1)\sin x - \sin(kx+x)\big) +$$

$$+(\rho^{n-1} - 2\rho^n)\big(n\sin x - \sin(nx)\big) + \rho^n\big((n+1)\sin x - \sin(nx+x)\big) =$$

$$= (1-\rho)^2\sum_{k=1}^{n-2}\rho^k\big((k+1)\sin x - \sin(kx+x)\big) + \rho^{n-1}\Big(\rho\big((n+1)\sin x - \sin(nx+x)\big) + (1-2\rho)\big(n\sin x - \sin(nx)\big)\Big).$$

Если мы докажем, что на интервале $\frac{2\pi}{n} < x < \frac{4\pi}{n+1}$ выполнено неравенство

$$(n+1)\sin x - \sin(nx+x) > n\sin x - \sin(nx), \tag{9}$$

то тогда

$$\rho\big((n+1)\sin x - \sin(nx+x)\big) + (1-2\rho)\big(n\sin x - \sin(nx)\big) > (1-\rho)\big(n\sin x - \sin(nx)\big) > 0$$

и, очевидно, $D_n(x,\rho) > 0$. Неравенство (9) после преобразований превращается в неравенство

$$2\sin\Big(\frac{nx}{2}\Big)\sin\big(\frac{nx+x}{2}\big) > 0$$

и является верным, поскольку $\frac{nx}{2} \in (\pi,\ 2\pi - \frac{2\pi}{n+1})$ и $\frac{nx+x}{2} \in (\pi + \frac{\pi}{n},\ 2\pi)$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Для любого натурального n при $\rho \in \big(\frac{1}{2},\, \rho_3\big)$ на интервале $0 < x < \arccos\big(-\frac{1}{2\rho}\big)$ функция $D_n(x,\rho) > 0$.*

Доказательство. Сначала докажем лемму для значений $n \leqslant 4$.

Для $n = 1$ утверждение очевидно.

Для $n = 2$ наименьший положительный нуль $D_2(x,\rho)$ есть $x = \arccos\big(-\frac{1}{2\rho}\big)$.

Для $n = 3$ согласно лемме 5 на интервале $x \in (0,\,\pi)$ выполнено $D_3(x,\rho) > 0$.

Для $n = 4$ по лемме 5 на интервале $x \in \big(0,\, \frac{4\pi}{5}\big)$ верно $D_4(x,\rho) > 0$. Если $\arccos\big(-\frac{1}{2\rho}\big) \leqslant \frac{4\pi}{5}$, то для D_4 утверждение леммы доказано. Если $\arccos\big(-\frac{1}{2\rho}\big) > \frac{4\pi}{5}$, то тогда $\rho < -(2\cos\frac{4\pi}{5})^{-1} < 0.75$. В этом случае легко проверить, что при $x \in \Big[\frac{4\pi}{5}, \arccos\big(-\frac{1}{2\rho}\big)\Big)$ и при $\rho < 0.75$ верно неравенство $\sin 3x + \rho\sin 4x > \sin 3x + 0.75\sin 4x > 0$. Тогда $D_4(x,\rho) = D_2(x,\rho) + \rho^3(\sin 3x + \rho\sin 4x) > D_2(x,\rho) > 0$.

Теперь докажем лемму для $n \geqslant 5$. Запишем

$$f_n(x,\rho) = \sin x - \rho^n\sin(nx+x) + \rho^{n+1}\sin(nx) =$$
$$= \rho^n\Big(\frac{1}{2\rho^n}\sin x - \sin(nx+x)\Big) + \rho^{n+1}\Big(\frac{1}{2\rho^{n+1}}\sin x + \sin(nx)\Big). \tag{10}$$

При $\rho < 0.6$ и $n \geqslant 5$ верны неравенства $\frac{1}{2\rho^n} > n+1$ и $\frac{1}{2\rho^{n+1}} > n$, поэтому (10) можно оценить снизу таким выражением:

$$\rho^n\left((n+1)\sin x - \sin(nx+x)\right) + \rho^{n+1}\left(n\sin x + \sin(nx)\right),$$

а оно положительно, так как $(n+1)\sin x - \sin(nx+x) > 0$ и $n\sin x + \sin(nx) > 0$ для любых натуральных n и любых $x \in (0,\pi)$.

Осталось доказать лемму при $0.6 \leqslant \rho < \rho_3$ и $n \geqslant 5$. Доказательство проведем по индукции. База индукции $n = 4$.

Поскольку $D_n(x,\rho) \geqslant D_{n-1}(x,\rho)$ на отрезках $\Big[\frac{2l\pi}{n}, \frac{(2l+1)\pi}{n}\Big]$, $l \in \mathbb{Z}$, достаточно проверить положительность $D_n(x,\rho)$ на интервалах $\Big(\frac{(2l-1)\pi}{n}, \frac{2l\pi}{n}\Big)$, имеющих пересечения с интервалом $\Big(0, \arccos\big(-\frac{1}{2\rho}\big)\Big)$. В этом случае $\sin(nx) < 0$ и

$$f_n(x,\rho) = \sin x - \rho^n\sin(nx+x) + \rho^{n+1}\sin(nx) >$$
$$> \sin x - \rho^n(\sin(nx+x) - \sin(nx)) = 2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \rho^n\cos\big(nx + \frac{x}{2}\big)\right). \tag{11}$$

Если $\cos\big(nx + \frac{x}{2}\big) \leqslant 0$, то выражение (11) положительно и лемма доказана. Рассмотрим знак $\cos\frac{x}{2} - \rho^n\cos\big(nx + \frac{x}{2}\big)$ в случае $\cos\big(nx + \frac{x}{2}\big) > 0$.

Если $n = 5$, то $D_5(x,\rho) > 0$ на интервале $0 < x < \frac{2\pi}{3}$ по лемме 5. Исследовав функцию двух переменных $\cos\frac{x}{2} - \rho^5\cos\big(\frac{11x}{2}\big)$ при $(x,\rho) \in \Big[\frac{2\pi}{3},\, \arccos\big(-\frac{1}{2\rho}\big)\Big] \times [0.6,\, 0.87]$, убеждаемся, что на указанном множестве она положительна.

Если $n \geqslant 6$, оценим $\cos\frac{x}{2} - \rho^n\cos\big(nx + \frac{x}{2}\big)$ таким образом:

$$\cos\frac{x}{2} - \rho^n\cos\big(nx + \frac{x}{2}\big) > \cos\Big(\frac{1}{2}\arccos\big(-\frac{1}{2\rho}\big)\Big) - \rho^6 = \sqrt{\frac{2\rho-1}{4\rho}} - \rho^6 > 0$$

при $0.6 \leqslant \rho < 0.87$. Поскольку $\rho_3 < 0.867$, лемма доказана.

Теперь перейдем к доказательству теоремы. Если $\rho \in (0,\, 1/2]$, то, как было отмечено выше, $\xi(\rho) = \pi$. Рассмотрим $\rho > \frac{1}{2}$. Для произвольной последовательности b_k, удовлетворяющей условиям (2), с помощью преобразования Абеля получаем тождество

$$S(x,\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\rho^k\sin(kx) = \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1})D_k(x,\rho), \tag{12}$$

причем ряд в правой части является абсолютно сходящимся и имеет неотрицательные коэффициенты $b_k - b_{k+1}$.

Пусть $x = \theta_k(\rho)$ — наименьший положительный корень $D_k(x,\rho)$, а $\theta(\rho) = \inf_k \theta_k(\rho)$. Заметим, что поскольку $\theta_k(\rho) \geqslant \xi(\rho)$ для любого натурального k, то $\theta(\rho) \geqslant \xi(\rho)$. С другой стороны, при $x \in (0, \theta(\rho))$ для любого натурального k выполняется неравенство $D_k(x,\rho) > 0$ и как следствие любая сумма (12) положительна. То есть $\theta(\rho) \leqslant \xi(\rho)$. Таким образом, мы имеем равенство $\theta(\rho) = \xi(\rho)$.

Если мы покажем, что при $\rho \in (1/2, \rho_3)$ выполнено $\theta(\rho) = \theta_2(\rho)$, а при $\rho \in [\rho_n, \rho_{n+1})$ выполнено $\theta(\rho) = \theta_n(\rho)$, то это вместе с утверждением предложений 1 и 2 докажет теорему.

Действительно, при $\rho \in (1/2, \rho_3)$ из леммы 6 получаем $\theta(\rho) = \theta_2(\rho)$. Пусть $\rho \in [\rho_n, \rho_{n+1})$ для некоторого $n \geqslant 3$. Из предложения 2 следует, что $\theta_n(\rho)$ равен $\mu_n(\rho)$, лежит на интервале $(\frac{2\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n})$ и является решением уравнения

$$\sin x - \rho^n \sin(nx + x) + \rho^{n+1} \sin(nx) = 0.$$

При $k \leqslant n-1$ на интервале $(0, \frac{2\pi}{k+1})$ функция $D_k(x,\rho) > 0$ (лемма 1) и, значит, $D_k(x,\rho) > 0$ на $(0, \theta_n(\rho)) \subset (0, \frac{2\pi}{n}) \subset (0, \frac{2\pi}{k+1})$.

Пусть $k > n$, т.е. $k = n + m,\ m \in \mathbb{N}$. Докажем, что и в этом случае $D_k(x,\rho) > 0$ на $(0, \theta_n(\rho))$. Так как $\rho < \rho_{n+1} \leqslant \rho_{n+m}$, по лемме 5 функция $D_{n+m}(x,\rho) > 0$ на интервале $\left(0, \frac{4\pi}{n+m+1}\right)$. Значит, если $\frac{2\pi}{n} \leqslant \frac{4\pi}{n+m+1}$, т.е. $m \leqslant n-1$, то $D_{n+m}(x,\rho) > 0$ на $\left(0, \frac{2\pi}{n}\right) \supset (0, \theta_n(\rho))$.

Рассмотрим случай $m \geqslant n$. Доказательство проведем по индукции. База индукции $(m \leqslant n-1)$ у нас уже есть.

Поскольку $D_{n+m}(x,\rho) \geqslant D_{n+m-1}(x,\rho)$ на отрезках $\left[\frac{2l\pi}{n+m}, \frac{(2l+1)\pi}{n+m}\right],\ l \in \mathbb{Z},$ достаточно проверить положительность $D_{n+m}(x,\rho)$ на интервалах $\left(\frac{(2l-1)\pi}{n+m}, \frac{2l\pi}{n+m}\right)$, имеющих пересечения с интервалом $(0, \theta_n(\rho))$. В этом случае $\sin(nx + mx) < 0$ и

$$\sin x - \rho^{n+m} \sin(nx+mx+x) + \rho^{n+m+1} \sin(nx+mx) > \sin x - \rho^{n+m}(\sin(nx+mx+x) - \sin(nx+mx)) =$$

$$= 2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \rho^{n+m}\cos\left(nx + mx + \frac{x}{2}\right)\right).$$

Оценим $\varphi(x) = \cos\frac{x}{2} - \rho^{n+m}\cos\left(nx+mx+\frac{x}{2}\right) \geqslant \cos\frac{x}{2} - \rho^{n+m} > \cos\frac{\pi}{n} - \left(\cos\frac{\pi}{n+2}\right)^{\frac{n+m}{n+1}}$. Поскольку последнее выражение монотонно возрастает по m, при $m \geqslant n$ имеем $\varphi(x) \geqslant \cos\frac{\pi}{n} - \left(\cos\frac{\pi}{n+2}\right)^{\frac{2n}{n+1}}$. Эта функция положительна при $n \geqslant 7$, значит, $\varphi(x) > 0$ при $m \geqslant n$ и $n \geqslant 7$. Аналогично проверяем, что $\varphi(x) > 0$ при $m \geqslant n+1$ и $n \geqslant 6$, $m \geqslant n+3$ и $n \geqslant 5$, $m \geqslant n+5$ и $n \geqslant 4$, $m \geqslant n+8$ и $n \geqslant 3$.

Осталось рассмотреть случаи: $n = 3$ и $m = 3$, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; $n = 4$ и $m = 4$, 5, 6, 7, 8; $n = 5$ и $m = 5$, 6, 7; $n = 6$ и $m = 6$. Поступим следующим образом. Если $\cos\left(nx+mx+\frac{x}{2}\right) \leqslant 0$, то $\varphi(x) > 0$ и все доказано. Если $\cos\left(nx+mx+\frac{x}{2}\right) > 0$, то оценим

$$\varphi(x) \geqslant \cos\frac{x}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{n+2}\right)^{\frac{n+m}{n+1}}\cos\left(nx+mx+\frac{x}{2}\right) \quad \text{при } n = 4,\ 5,\ 6;$$

$$\varphi(x) \geqslant \cos\frac{x}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{4.69}\right)^{\frac{3+m}{4}}\cos\left(3x+mx+\frac{x}{2}\right) \quad \text{при } n = 3 \text{ (см. замечание к предложению 1).}$$

n	m						
	4	5	6	7	8	9	10
3	2.38	2.13	1.95	2.32	2.15	2.45	2.29
4	1.44	1.90	1.74	1.61	1.95		
5		1.18	1.59	1.47			
6			0.99				

Найдем наименьшие положительные нули выражений, оценивающих $\varphi(x)$. Результаты численных расчетов приведены в таблице. Погрешность вычислений 10^{-2}.

Сравним значения в таблице со значениями $\theta_n(\rho)$. Из полученных численно оценок $\theta_3(\rho) \leqslant x_3 \approx 1.8637$; $\theta_4(\rho) \leqslant x_4 \approx 1.4254$; $\theta_5(\rho) \leqslant x_5 \approx 1.15$; $\theta_6(\rho) \leqslant x_6 \approx 0.9757$ следует, что $D_{n+m}(x,\rho) > 0$ на $(0,\ \theta_n(\rho))$ для приведенных в таблице значений n и m.

Остался случай $n = 3$, $m = 3$. Согласно лемме 4 функция $D_6 > 0$ на $(0, \frac{4\pi}{7})$. Также $D_6 > D_5$ на $(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$. Так как $\theta_3(\rho) \in (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$, то $D_6 > 0$ на $(0, \theta_3(\rho))$. Теорема доказана.

Следствие из теоремы (с учетом неравенства $\frac{45}{52} < \rho_3 \approx 0.866$) очевидно.

Автор выражает глубокую благодарность А.Ю. Попову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пак И.Н.* О суммах тригонометрических рядов // Успехи матем. наук. 1980. **35**, № 2 (212). 91–144.
2. *Hartman Ph., Wintner A.* On sine series with monotone coefficients // J. London Math. Soc. 1953. **28**. 102–104.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965.
4. *Харди Г.Г., Рогозинский В.В.* Ряды Фурье. М.: Либроком, 2009.
5. *Vietoris L.* Über das Vorzeichen gewisser trigonometrischer Summen // Österr. Acad. Wiss. Math.-Natur. Kl., S.-Ber., Abt. II. 1958. **167**. 125–135.
6. *Белов А.С.* О примерах тригонометрических рядов с неотрицательными частными суммами // Матем. сб. 1995. **186**, № 4. 21–46.
7. *Попов А.Ю.* Оценки наибольшего положительного корня суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами // Матем. заметки. 2014. **96**, № 5. 747–761.

Поступила в редакцию
07.10.2022

УДК 511

РАССТОЯНИЕ ГРОМОВА–ХАУСДОРФА МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ ВЕРШИН ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ, ВПИСАННЫХ В ОДНУ ОКРУЖНОСТЬ

Т. К. Талипов[1]

В работе вычислено расстояние Громова–Хаусдорфа между множествами вершин правильных n- и m-угольников, наделенных метрикой, индуцированной с окружности, когда m нацело делится на n. Также вычислены все расстояния до 2- и 3-угольников.

Ключевые слова: метрическая геометрия, расстояние Громова–Хаусдорфа, метрическое пространство.

We calculate the Gromov–Hausdorff distance between vertex sets of regular polygons endowed with the round metric. We give a full answer for the case of n- and m-gons with m divisible by n. We also calculate all distances to 2-gons and 3-gons

Key words: metric geometry, Gromov–Hausdorff distance, metric space.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-4

В настоящей работе изучается пространство всех метрических компактов, рассматриваемых с точностью до изометрии, которое наделено метрикой Громова–Хаусдорфа. Заметим, что точные значения расстояния Громова–Хаусдорфа между конкретными метрическими пространствами известны лишь для малого числа случаев. Например, в работе [1] вычислено расстояние Громова–Хаусдорфа до 1-пространств — метрических пространств с одним ненулевым расстоянием. В работе [2] вычислено расстояние Громова–Хаусдорфа между отрезком и окружностью, а в [3] — расстояние Громова–Хаусдорфа между сферами разных размерностей, между вершинами правильных многоугольников и окружностью, а также между разными правильными многоугольниками, вписанными в одну окружность. Авторы работы [3] ставят задачу вычисления последнего расстояния и приводят пример решения для m-угольника и $(m+1)$-угольника. Мы делаем некоторые продвижения в решении данной задачи, а именно полностью исследован случай m- и n-угольников при условии, что m делится нацело на n, а также вычислены все расстояния до 2-угольников и 3-угольников.

1. Предварительные сведения. Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in X$ будем обозначать $d(x,y)$ или $|xy|$. Для непустых $A, B \subset X$ определим

$$d_H(A,B) = \max\bigl\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(a,b)\bigr\}.$$

[1] *Талипов Талант Камбарович* — студ. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: talipovtalant.live@gmail.com.

Talipov Talant Kambarovich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.