4. Численный анализ. Был проведен приближенный расчет функции $J(\varphi, 1)$ из (9) по $\varphi \in [0, 2\pi)$ при $a = 1$ и некоторых значениях $b \in (0, 1]$. Результаты представлены на рисунке.

Неожиданным свойством оказалось наличие некоторого критического угла φ, начиная с которого происходит резкий рост функции. С увеличением b эта точка сдвигается вправо. При $0 < a < 1$ графики аналогичны, но размах колебаний функции становится меньше.

Представляет интерес дальнейшее исследование поведения функций $J(\varphi, 1)$ и связанных с ними констант C_1, C_2 в зависимости от параметров a, b.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gnedenko B.V.* Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire // Ann. Math. 1943. **44**, N 3. 423–453.
2. *Галамбош Я.И.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984.
3. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.
4. *Piterbarg V.I., Rodionov I.V.* Certain modern developments in stochastic extreme value theory, on occasion of 110th birthday of Boris Vladimirovich Gnedenko // Reliability: Theory and Applications. 2021. **16**, N 4. 16–25.
5. *Алексеев И.А.* Об устойчивых случайных величинах с комплексным индексом устойчивости // Докл. РАН. Матем., информ., процессы упр. 2021. **501**. 5–10.
6. *Алексеев И.А.* Устойчивые случайные величины с комплексным индексом устойчивости α. Случай $|\alpha - 1/2| < 1/2$ // Зап. науч. семинаров Петербург. отд. Матем. ин-та РАН. 2021. **505**. 17–37.
7. *Алексеев И.А.* Устойчивые случайные величины с комплексным индексом устойчивости, I // Теор. вероятн. и ее примен. 2022. **67**, № 3. 421–442.
8. *Гриневич И.В.* Макс-полуустойчивые предельные распределения, отвечающие линейной и степенной нормировке // Теор. вероятн. и ее примен. 1992. **37**, № 4. 774–776.
9. *Pancheva E.* Multivariate max-semistable distributions // Теор. вероятн. и ее примен. 1992. **37**, № 4. 794–795.
10. *Temido M.G., Canto e Castro L.* Max-semistable laws in extremes of stationary random sequences // Theory Probab. and Appl. 2003. **47**, N 2. 365–374.
11. *Canto e Castro L., Dias S., Temido M.G.* Looking for max-semistability: A new test for the extreme value condition // J. Statist. Plan. Inference. 2011. **141**, N 9. 3005–3020.
12. *Pancheva E.* Max-semistability: a survey // ProbStat Forum. 2010. **3**. 11–24.
13. *Dias S., Temido M.G.* Random fields and random sampling // Kybernetika. 2019. **55**, N 6. 897–914.
14. *Лебедев А.В.* Основы стохастической теории экстремумов. М.: Ленанд, 2018.
15. *Лебедев А.В.* Максимумы случайных признаков частиц в надкритических ветвящихся процессах // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2008. № 5. 3–6.
16. *Лебедев А.В.* Многомерные экстремумы случайных признаков частиц в надкритических ветвящихся процессах // Теор. вероятн. и ее примен. 2012. **57**, № 4. 788–794.

Поступила в редакцию
26.08.2022

УДК 519.95

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ О КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ

С. Б. Гашков[1]

Доказана алгоритмическая неразрешимость нескольких задач, связанных с кусочно-полиномиальными функциями одной действительной переменной, имеющими бесконечное число узлов.

[1] *Гашков Сергей Борисович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. дискретной математики мех.-мат. ф-та МГУ; Моск. центр фунд. и прикл. матем., e-mail: sbgashkov@gmail.com.

Gashkov Sergey Borisovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Discrete Mathematics; Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics.

Ключевые слова: кусочно-полиномиальные функции, диофантовы уравнения, алгоритмическая неразрешимость.

The algorithmic unsolvability is proved for some problems concerning piecewise polynomials of one variable with infinite number of nodes.

Key words: piece-polynomial functions, Diophantine equations, algorithmic unsolvability.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-2

Альфред Тарский доказал в 1948 г. (см., например, [1]), что для любой системы S рациональных уравнений и неравенств с действительными неизвестными $x_1, \dots, x_n$ и параметрами $a_1, \dots, a_m$ можно с помощью некоторого алгоритма построить системы $T_1, \dots, T_k$ полиномиальных уравнений и неравенств, в которые входят только параметры $a_1, \dots, a_m$ (но не переменные $x_1, \dots, x_n$), такие, что система S имеет решение относительно $x_1, \dots, x_n$ тогда и только тогда, когда параметры $a_1, \dots, a_m$ удовлетворяют хотя бы одной из систем $T_1, \dots, T_k$. Отсюда следует существование алгоритма, распознающего разрешимость любой алгебраической системы уравнений и неравенств с параметрами. Другими словами, элементарная теория поля действительных чисел (и теория вещественно-замкнутых полей) разрешима. Примером вещественно-замкнутого поля является поле всех действительных алгебраических чисел. Если многочлен с коэффициентами из него имеет действительный корень, то этот корень — алгебраическое число.

Алгоритм Тарского не практичен. Наилучший из известных сейчас алгоритмов был предложен в 1987 г. Д. Ю. Григорьевым.

Утверждение об алгоритмической разрешимости действительных полиномиальных уравнений легко расширяется на класс алгебраических уравнений, записанных с помощью не только арифметических операций, но и радикалов. В частности, есть алгоритм, распознающий разрешимость действительных рациональных уравнений, записанных с помощью знака модуля (так как $|x| = \sqrt{x^2}$). Любое такое уравнение можно записать в виде равенства двух кусочно-рациональных функций, составленных из конечного числа рациональных функций. Удобно представлять такие функции одной переменной кусочно-монотонными, т.е. составленными из монотонных (на своих отрезках) рациональных функций. Очевидно, класс таких функций одной переменной замкнут относительно арифметических операций и операции суперпозиции и содержит в себе все непрерывные функции, получающиеся из $x, |x|$ и всех констант из $\mathbb{R}$ с помощью арифметических операций и суперпозиции, а также все непрерывные кусочно-полиномиальные функции, составленные из конечного числа "кусков", т.е. все функции, порождаемые базисом $\mathbb{R} \cup \{x + y, xy, |x|\}$ посредством операций суперпозиции. В этом классе содержится класс $\mathcal{A}$ всех кусочно-полиномиальных функций, составленных из конечного числа многочленов с целыми коэффициентами, определенных на отрезках с концами из множества $\mathbb{A}$. В силу теоремы Тарского для вещественно-замкнутых полей есть алгоритм, распознающий разрешимость любого уравнения вида $f = 0$, $f \in \mathcal{A}$ в поле $\mathbb{A}$ (и в поле $\mathbb{R}$).

Непрерывная кусочно-линейная функция $\|x\| = \min\{\{x\}, 1 - \{x\}\}$ (где $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ — функция "дробная часть") равна расстоянию от точки x до ближайшего к ней целого числа. Очевидно, функция $\|x\| = 1/2$ не принадлежит классу $\mathcal{A}$, так как составлена из бесконечного числа "кусков". Функцию $\|x\|$ можно выразить через $\sin, \arcsin, \pi, 1$ и арифметические операции формулой

$$\frac{\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(4x-1)\right)\right)}{2\pi} + \frac{1}{4},$$

поэтому она является элементарной функцией. Пусть $\mathfrak{A}$ — класс всех функций одной переменной, порождаемых базисом $\{1, x-y, xy, \|x\|\}$ с помощью операций суперпозиции. Он содержит все многочлены с целыми коэффициентами. Легко видеть, что все другие функции из этого класса являются кусочно-полиномиальными, полиномы имеют целые коэффициенты, определены на отрезках, концы которых принадлежат $\mathbb{A}$, при этом разбиение прямой $\mathbb{R}$ на эти отрезки может содержать их бесконечное количество. Так как точки локальных экстремумов у целого многочлена принадлежат $\mathbb{A}$, то любую такую функцию можно рассматривать как кусочно-монотонную на отрезках с концами из $\mathbb{A}$. Действительно, пусть $f, g \in \mathfrak{A}$. Каждой функции соответствует алгебраическое разбиение прямой $\mathbb{R}$ на отрезки (так называем разбиение точками из поля $\mathbb{A}$). Пересечение этих разбиений, очевидно, алгебраическое, и на каждом его отрезке обе функции равны целым полиномам. Поскольку сумма, разность и произведение целых полиномов тоже целый полином, то $f \pm g, gf \in \mathfrak{A}$. Пусть $h = f(g)$ — суперпозиция f и g. На каждом отрезке I своего разбиения $g(x)$ является монотонным многочленом. Тогда $g(I)$ — отрезок с концами из $\mathbb{A}$, так как значение целого многочлена в точке из $\mathbb{A}$ тоже алгебраично. Разобьем отрезок $J = g(I)$ на отрезки J_i точками x_i из разбиения функции f (если они есть), получим алгебраическое разбиение и рассмотрим соответствующее разбиение отрезка I на отрезки I_i точками $y_i = g^{-1}(x_i)$. Так как $x_i \in \mathbb{A}$, то $y_i \in \mathbb{A}$ как корень уравнения $g(y_i) = x_i$ в силу вещественной замкнутости поля $\mathbb{A}$. На отрезке I_i суперпозиция $h(x) = f(g(x))$ является целым многочленом. Построенные многочлены и отрезки показывают, что $h \in \mathfrak{A}$.

Из теоремы Матиясевича–Дэвиса–Патнема–Робинсон [2] о неразрешимости проблемы распознавания разрешимости диофантовых уравнений выводится следующая

Теорема. *Задача распознавания разрешимости (в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{A}$) уравнения $f(x) = 0$ и неравенства $f(x) \geqslant 0$ одной переменной при $f(x) \in \mathfrak{A}$ алгоритмически неразрешима.*

Доказательство. Модифицируем и упростим рассуждения из [2–5], в которых рассматривается класс функций, порождаемых базисом $\{1, x \pm y, xy, \sin\}$ с помощью операций суперпозиции. Этот класс более сложен, чем $\mathfrak{A}$, и содержит трансцендентные элементарные функции.

Любое диофантово уравнение $D(y_1, \ldots, y_n) = 0$ (далее рассматриваем его разрешимость не в целых, а в натуральных числах; нуль считаем натуральным числом) можно преобразовать в равносильное уравнение в поле $\mathbb{R}$:

$$D^2(x_1^2, \ldots, x_n^2) + \sum_{i=1}^{n} \|x_i^2\| = 0.$$

Если обозначить через $\lfloor x \rceil$ ближайшую к числу x целую точку (это обозначение В.М. Храпченко; для полуцелых чисел $n + 1/2$ можно взять и n, и $n + 1$), то для любого многочлена $D \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ очевидно неравенство

$$|D(x_1, \ldots, x_n) - D(\lfloor x_1 \rceil, \ldots, \lfloor x_n \rceil)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} D_i(x_1, \ldots, x_n) \|x_i\|,$$

где $x_i = \lfloor x_i \rceil \pm \|x_i\|, x_i \geqslant 0$, D_i — подходящие многочлены из $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$. Значит,

$$|D(x_1^2, \ldots, x_n^2) - D(\lfloor x_1^2 \rceil, \ldots, \lfloor x_n^2 \rceil)| \leqslant P\delta, \ \delta = \max_i \|x_i^2\|, \ P = \sum_{i=1}^{n} D_i(x_1^2, \ldots, x_n^2).$$

Пусть $M(x_1, \ldots, x_n) = 1 + P(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда если

$$M^2(x_1, \ldots, x_n) \left(D^2(x_1^2, \ldots, x_n^2) + \sum_{i=1}^{n} \|x_i^2\| \right) < 1,$$

то $\delta < 1/M^2$, $|D(x_1^2, \ldots, x_n^2)| < 1/M$, значит,

$$|D(\lfloor x_1^2 \rceil, \ldots, \lfloor x_n^2 \rceil)| \leqslant |D(x_1^2, \ldots, x_n^2)| + |D(\lfloor x_1^2 \rceil, \ldots, \lfloor x_n^2 \rceil) - D(x_1^2, \ldots, x_n^2)| <$$

$$< 1/M + \delta P < 1/M + P/M^2 = (M + P)/M^2 = (1 + 2P)/(1 + P)^2 < 1,$$

следовательно, $D(\lfloor x_1^2 \rceil, \ldots, \lfloor x_n^2 \rceil) = 0$, так как это целое число. Поэтому диофантово уравнение

$$D(y_1, \ldots, y_n) = 0$$

разрешимо в натуральных числах тогда и только тогда, когда неравенство

$$M^2(x_1, \ldots, x_n) \left(D^2(x_1^2, \ldots, x_n^2) + \sum_{i=1}^{n} \|x_i^2\| \right) < 1$$

разрешимо в действительных числах. В самом деле, если $D(y_1, \ldots, y_n) = 0, y_i \in \mathbb{N}$, то при $x_i = \sqrt{y_i}$

$$M^2(x_1, \ldots, x_n) \left(D^2(x_1^2, \ldots, x_n^2) + \sum_{i=1}^{n} \|x_i^2\| \right) =$$

$$= M^2(x_1, \ldots, x_n) \left(D^2(y_1, \ldots, y_n) + \sum_{i=1}^{n} \|y_i\| \right) = 0 < 1,$$

и обратно, если

$$M^2(x_1,\ldots,x_n)\left(D^2(x_1^2,\ldots,x_n^2)+\sum_{i=1}^n \|x_i^2\|\right)<1,$$

то, как было доказано выше, $D(\lfloor x_1^2\rceil,\ldots,\lfloor x_n^2\rceil)=0$, значит, уравнение $D(y_1,\ldots,y_n)=0$ имеет натуральное решение.

Чтобы получить из неравенства

$$M^2(x_1,\ldots,x_n)\left(D^2(x_1^2,\ldots,x_n^2)+\sum_{i=1}^n \|x_i^2\|\right)<1$$

неравенство с одной переменной, используется

Лемма. *Плоская непрерывная кривая* $\mathbb{R}_+\to r(x)$, $r(x)=(f(x),g(x))=(x\|x^3\|,x\|x\|)$ *всюду плотна на октанте* $\mathbb{R}_+^2$. *Непрерывная кривая* $\mathbb{R}_+\to r^n(x)$,

$$r^n(x)=(r_1^n(x),\ldots,r_n^n(x))=(f(x),f(g(x)),f(g(g(x))),\ldots,\underbrace{g(g(\ldots g(x))\ldots)}_{n-1})$$

всюду плотна на октанте $\mathbb{R}_+^n$.

Доказательство. Пусть $(a,b)\in\mathbb{R}_+$. Рассмотрим неравенство $g(x)\in[a-\epsilon,a]\subset\mathbb{R}_+,\epsilon<1/2$. При $n\in\mathbb{N}$ на отрезке $[n,n+1/2]$ функция $g(x)$ равна $x(x-n)$ и $g(x)\in[a-\epsilon,a]$, если при $n>2a+2$

$$x\in I_n=[a_n,b_n]=[n+(a-\epsilon)/n,n+a/(n+1/2)].$$

Если $x\in I_n$, то при $n>(a+1)/\epsilon>2a+2$ длина отрезка $|I_n|>(\epsilon-a/(2n+1))/n>\epsilon/(2n)$, следовательно, $x^3\in J_n=[a_n^3,b_n^3]$ и длина отрезка J_n

$$|J_n|>3|I_n|a_n^2>3\epsilon n/2>3(a+1)/2>3/2,$$

поэтому он содержит отрезок $[N,N+1/2],N\in\mathbb{N}$, $N\geqslant a_n^3$, а когда x пробегает отрезок $[\sqrt[3]{N},\sqrt[3]{N+1/2}]\subset I_n$, то $f(x)=x\|x^3\|=x(x^3-N)$ возрастает от 0 до $\sqrt[3]{N+1/2}/2$. При $n>2b$ в силу неравенства $\sqrt[3]{N}\geqslant a_n>n$ найдется $x\in I_n$, такое, что $g(x)\in[a-\epsilon,a]$, $f(x)=b$, значит, плоская кривая $r(x)=(f(x),g(x))$ всюду плотна на $\mathbb{R}_+^2$. Второе утверждение доказывается индукцией. База уже доказана.

Шаг индукции. Пусть $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}_+^n$ и число x таково, что

$$r^{n-1}(x)=(r_2^n(x),\ldots,r_n^n(x))\in\prod_{i=2}^n[a_i,a_i+\epsilon/2].$$

В силу непрерывности кривой найдется такое число $\delta>0$, что при любом $x\in[X,X+\delta]$

$$r^{n-1}(x)\in\prod_{i=2}^n[a_i-\epsilon,a_i+\epsilon].$$

Для кривой $r(x)=(f(x),g(x))$ найдется число x, такое, что $f(x)=a_1,g(x)\in[X,X+\delta]$. Тогда

$$(r_2^n(x),\ldots,r_n^n(x))=r^{n-1}(g(x))\in\prod_{i=2}^n[a_i-\epsilon,a_i+\epsilon],\ r_1^n(x)=f(x)=a_1,$$

значит, кривая r^n всюду плотна в $\mathbb{R}_+^n$. □

Далее вместо r_i^n пишем r_i, а r_i^2 обозначает $(r_i)^2$. Из сделанного перед формулировкой теоремы замечания о классе $\mathfrak{A}$ следует, что функции $r_1(x),\ldots,r_n(x)\in\mathfrak{A}$ и для любых $M,D\in\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$

$$h(x)=M^2(r_1(x),\ldots,r_n(x))\left(D^2(r_1^2(x),\ldots,r_n^2(x))+\sum_{i=1}^n\|r_i^2(x)\|\right)\in\mathfrak{A}.$$

Если неравенство

$$M^2(x_1,\dots,x_n)\left(D^2(x_1^2,\dots,x_n^2)+\sum_{i=1}^n \|x_i^2\|\right)<1$$

разрешимо в поле $\mathbb{R}$, то, выбирая число $x>0$ так, чтобы $\|r_i^2(x)\|\to 0$ при всех i и выполнялось условие

$$D(\lfloor r_1^2(x)\rceil,\dots,\lfloor r_n^2(x)\rceil)=0,$$

получаем, что найдется $x>0$, такое, что $0\leqslant h(x)<1/2$.

Выбирая число $x>0$ так, чтобы $\|r_i^2(x)\|\to 1/2$, получаем, что найдется $x>0$, такое, что $h(x)>1/2$ (в случае $n=1$ следует выбрать полуцелое $y_1=x_1^2$ так, что $D(y_1)\neq 0$). Значит, в случае разрешимости диофантова уравнения $D(y_1,\dots,y_n)=0$ в натуральных числах уравнение $2h(x)=1$ имеет корни в $\mathbb{R}_+$. В силу замечания перед формулировкой теоремы они принадлежат полю $\mathbb{A}$. Если уравнение $D=0$ не имеет решений в $\mathbb{N}$, то неравенство

$$M^2(x_1,\dots,x_n)\left(D^2(x_1^2,\dots,x_n^2)+\sum_{i=1}^n \|x_i^2\|\right)<1$$

не имеет решений в $\mathbb{R}$ (иначе были бы решения в $\mathbb{N}$ у уравнения $D=0$), значит, всегда выполнено неравенство

$$M^2(x_1,\dots,x_n)\left(D^2(x_1^2,\dots,x_n^2)+\sum_{i=1}^n \|x_i^2\|\right)\geqslant 1,$$

поэтому $h(x)\geqslant 1$ и уравнение $2h(x)=1$ не имеет корней в $\mathbb{R}$.

Так как проблема разрешимости диофантовых уравнений в $\mathbb{N}$ неразрешима, то равносильная ей проблема разрешимости (в полях $\mathbb{R},\mathbb{A}$) уравнений вида $2h=1$, а значит, и любых уравнений, записанных с помощью функций из $\mathfrak{A}$, неразрешима. Проблема разрешимости неравенств вида $h(x)<1$ также неразрешима, так как она равносильна проблеме разрешимости диофантова уравнения $D=0$ в $\mathbb{N}$. Поэтому неразрешима и проблема распознавания по произвольному уравнению $f(x)=0$ или неравенству $f(x)<0$, $f\in\mathfrak{A}$, имеет ли оно решения в полях $\mathbb{R}$ и $\mathbb{A}$.

Если вместо класса $\mathfrak{A}$ взять класс, состоящий из сужений функций класса $\mathfrak{A}$ на данный конечный отрезок, то утверждение теоремы становится неверным, так как алгоритм Тарского позволяет решить рассматриваемые в ней задачи.

Далее аналогично [2] выводятся следствия 1–3.

Следствие 1. *Если кроме функции $\|x\|$ разрешить использовать функцию $|x|$, то неразрешима и проблема проверки истинности произвольного тождества $f(x)=g(x)$.*

Доказательство. Действительно, тождество $f(x)+|f(x)|=0$ выполнено тогда и только тогда, когда неравенство $f>0$ не имеет действительных решений, а проблема распознавания разрешимости неравенств, записанных с помощью функции $\|x\|$, неразрешима. □

Следствие 2. *В классе функций одной переменной, порожденных базисом $\{1,1/x,x-y,xy,\|x\|\}$ с помощью операций суперпозиции, неразрешима проблема определить, сходится или нет несобственный интеграл.*

Доказательство. Пусть $h_D(x)$ — функция, построенная в доказательстве теоремы по произвольному диофантову уравнению $D=0$. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(2h_D(x)-1)^2}.$$

Если уравнение $D=0$ неразрешимо в $\mathbb{N}$, то $h_D\geqslant 1$ и интеграл сходится. Иначе найдется корень x_0 уравнения $2h_D(x_0)-1=0$ и, например, слева от x_0 выполняется равенство по порядку $2h_D(x)-1=\Theta(x-x_0)^k$ (функция $2h_D(x)-1$ на некотором отрезке полиномиальна и не равна нулю). Тогда интеграл

$$\int_{-\infty}^{x_0}\frac{dx}{(x^2+1)(2h_D(x)-1)^2}$$

расходится, так как расходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{x_0}\frac{dx}{(x-x_0)^{2k}}.\qquad\square$$

Следствие 3. *В классе функций одной переменной, порожденных базисом* $\{1, x-y, xy, \sqrt{|x|}, \|x\|\}$ *с помощью операций суперпозиции, неразрешима проблема определить, берется ли данный интеграл в элементарных функциях.*

Доказательство. Пусть $f(x) = \sqrt{1+x^6}$. Этот дифференциальный бином не интегрируется в элементарных функциях. Очевидно, функция f принадлежит рассматриваемому классу, так же как и функция $g(x) = 1 + |4x-4| - |4x-3|$. Поскольку $g(x) = 0$ при $x \geqslant 1$ и $g(x) = 2$ при $x \leqslant 3/4$, то функция $s_D(x) = g(h_D(x))f(x)$ принадлежит данному классу, в случае разрешимого диофантова уравнения $D = 0$ она равна тождественно $2f(x)$ в некоторой окрестности корня x_0 уравнения $h_D(x) = 1/2$, а в случае неразрешимого уравнения $D = 0$ выполнено неравенство $h_D(x) \geqslant 1$ и функция $s(x) = 0$ тождественно. В первом случае она неинтегрируема в элементарных функциях, а во втором — интегрируема. □

Укажем еще несколько следствий.

Конечную систему непрерывных функций назовем *полным* базисом, если любую непрерывную функцию можно на любом компакте сколь угодно точно приблизить в равномерной метрике функциями, выразимыми в виде суперпозиций базисных функций. Например, из теоремы Вейерштрасса следует полнота базиса $\{1/2, x-y, xy\}$. Очевидно, что базис $\{1, x-y, xy\}$ неполный, так как согласно теореме С. Н. Бернштейна на отрезках длины, большей 4, сколь угодно точно аппроксимировать многочленами с целыми коэффициенами можно только сами эти многочлены. Пусть $\mathcal{K}$ — класс всех полиномиальных и кусочно-полиномиальных функций, полиномы которых имеют целые или полуцелые коэффициенты и определены на отрезках с концами, принадлежащими полю $\mathbb{A}$, при этом разбиение прямой $\mathbb{R}$ на эти отрезки может содержать их бесконечное количество.

Следствие 4. *Проблема распознавания полноты для базисов, выразимых через функции из* $\mathcal{K}$, *алгоритмически неразрешима.*

Доказательство. Проблема распознавания разрешимости диофантовых уравнений $D = 0$, у которых свободный член полинома по модулю не меньше 2, очевидно неразрешима (иначе была бы разрешима эта проблема для произвольных диофантовых уравнений). Пусть $h_D(x)$ — функция, определенная в доказательстве теоремы. Так как для функций из леммы $f(m) = g(m) = 0$ при $m \in \mathbb{Z}$, то функции r_i^n тоже равны нулю в целых точках. Из рассуждений в доказательстве теоремы следует, что если уравнение $D = 0$ разрешимо, то $h_D(x) < 1$, а если нет, то $h_D(x) \geqslant 1$, где

$$h_D = M^2(r_1(x), \ldots, r_n(x)) \left(D^2(r_1^2(x), \ldots, r_n^2(x)) + \sum_{i=1}^{n} \|r_i^2(x)\| \right) \in \mathcal{K}.$$

В случае $h_D(x) \geqslant 1$ тогда имеем $h_D(m) = M^2(0, \ldots, 0)D^2(0, \ldots, 0) \geqslant 4$ при $m \in \mathbb{Z}$. Пусть

$$s(x) = (1 + |x-1| - |x-2|)/4,$$

тогда $s(x) = 0$ при $x \leqslant 1$, $s(x) = (x-1)/2$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$, $s(x) = 1/2$ при $x \geqslant 2$ и функция $H_D(x) = s(h_D(x)) \in \mathcal{K}$. В случае разрешимости уравнения $D = 0$ очевидно H_D — тождественный нуль, иначе $H_D(m) = 1/2$ при $m \in \mathbb{Z}$. В первом случае базис $\{H_D(x), 1, x-y, xy\}$ неполный, а во втором — полный, так как $H_D(1) = 1/2$. Значит, проблема распознавания полноты базисов вида $\{H_D(x), 1, x-y, xy\}$ неразрешима. Базис $\{s(x), 1, x-y, xy\}$ очевидно полный, так как $s(2) = 1/2$, а базис $\{h_D(x), 1, x-y, xy\}$ — нет, так как $h_D(m) \in \mathbb{Z}$, значит, все функции базиса сохраняют множество $\mathbb{Z}$, поэтому константа $1/2$ не может быть аппроксимирована с погрешностью, меньшей $1/2$. □

Далее рассматриваем базисы, состоящие из кусочно-полиномиальных функций, *полные в булевом смысле*, т.е. такие, в которых можно формулами выразить любую булеву функцию (формула выражает булеву функцию, если при подстановке в нее вместо переменных нулей или единиц значение формулы будет нулем или единицей). Для произвольной булевой функции f наименьшую сложность реализующей ее формулы в данном базисе B обозначаем $L_B^\Phi(f)$ и называем сложностью реализации данной функции f формулами над B, а через $L_B^\Phi(n)$ обозначаем $\max_{f(x_1,\ldots,x_n)}\{L_B^\Phi(f)\}$. Аналогично определяется $L_B(n)$ в случае реализации не формулами, а схемами (неветвящимися программами). Для конечных базисов известно [6], что $L_B(n) = \Theta(2^n/n)$, $L_B^\Phi(n) = \Theta(2^n/\log n)^{C_B}$, где C_B — некоторая константа. Интересны также базисы, содержащие кроме конечного числа функций еще и континуум констант. Например, для базиса $B = \{(x-y)/2, |x|, x/2, \min(x,y), 1-x\} \cup [0,1]$ известно [6], что $L_B(n) = \Theta(2^n/n)$, а для базиса $B = \{x-y, |x|, x/2, \min(x,y), 1-x\} \cup [0,1]$ известно [6–8], что $L_B(n) = \Theta(2^{n/2})$.

Из [6] можно вывести, что для базиса $B = \{x - y, xy, \|x\|, |x|, x^2\} \cup [0,1]$ справедливо равенство по порядку $L_B(n) = \Theta(n)$ (оно верно и без функции x^2), $L_B^\Phi(n) = \Theta(n)$, а для базиса $B = \{x - y, xy, \|x\|, |x|\} \cup [0,1]$ — равенство по порядку $L_B(n) = \Theta(n)$, и из [6–8] можно вывести, что $L_B^\Phi(n) = \Theta(2^{n/2})$.

Следствие 5. *В классе полных в булевом смысле кусочно-полиномиальных конечных базисов с континуумом констант неразрешимы проблемы распознавания выполнимости любого из следующих соотношений:*

$$L_B(n) = \Theta(L_B^\Phi(n)),\ L_B^\Phi(n) > \Theta(2^{n/2}),\ L_B(n) > n2^{n/2}.$$

Доказательство. Возьмем определенную в доказательстве следствия 4 функцию $H_D(x) = s(h_D(x)) \in \mathcal{K}$. Если разрешимо уравнение $D = 0$, она тождественно равна нулю, иначе $H_D(m) = 1/2$ при $m \in \mathbb{Z}$. Пусть $F_D(x, y) = 2H_D(y)x^2$. Тогда в случае разрешимости уравнения $D = 0$ функция $F_D(x, y) = 0$, иначе $F_D(x, 0) = x^2$. Рассмотрим класс базисов $B = \{x - y, xy, \|x\|, |x|, F_D(x, y)\} \cup [0, 1]$. В случае разрешимости уравнения $D = 0$ имеем $B = \{x - y, xy, \|x\|, |x|, 0\} \cup [0, 1]$, значит, $L_B^\Phi(n) = \Theta(2^{n/2})$, $L_B(n) = \Theta(n)$, иначе в базисе B функция x^2 представляется в виде формулы $F_D(x, 0)$, значит, $L_B(n) = \Theta(n)$, $L_B^\Phi(n) = \Theta(n)$, так как эти равенства верны для $B = \{x - y, xy, \|x\|, |x|, x^2\} \cup [0, 1]$. Поэтому проблема распознавания по данному базису, верно ли равенство $L_B(n) = \Theta(L_B^\Phi(n))$, неразрешима. По аналогичной причине неразрешима проблема распознавания, верно ли равенство $L_B^\Phi(n) \geqslant \Theta(2^{n/2})$, и другие подобные проблемы.

Например, возьмем функцию $F_D(x, y, z) = (H_D(z) + 1/2) * (x - y)$. Тогда, если разрешимо уравнение $D = 0$, имеем $F_D(x, y, z) = (x - y)/2$, иначе $F_D(x, y, 0) = x - y$. Рассмотрим класс базисов

$$B = \{xy, |x|, \min(x, y), 1 - x, x/2, F_D(x, y, z)\} \cup [0, 1].$$

Тогда в случае разрешимости уравнения $D = 0$ имеем $L_B(n) = \Theta(2^n/n)$, иначе $L_B(n) = O(2^{n/2})$. Поэтому неразрешима проблема распознавания, верно ли для данного базиса неравенство $L_B(n) > n2^{n/2}$. □

Для произвольного полного базиса B и непрерывной функции f можно для любого $\epsilon > 0$ определить сложность ее ϵ-приближения $L_B(f, \epsilon)$ как наименьшее число элементов в схеме, построенной из функций базиса B и вычисляющей функцию, равномерно уклоняющуюся от f на ее области определения не более чем на ϵ. Для любого компактного функционального класса K можно определить $L_B(K, \epsilon)$ как $\max_{f \in K} L_B(f, \epsilon)$. Например, для класса $K = W(1/8, 1/8, [0, 1])$, состоящего из функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, ограниченных по модулю константой $1/8$ и удовлетворяющих условию Липшица с той же константой, и базиса $B = \{\frac{x-y}{2}, \max(x, y), |x|, -x, 1\} \bigcup \{cx : 0 \leqslant c \leqslant 1\}$ в [6] доказано, что $L_B(K, \epsilon) = \Theta\left(\frac{1}{\epsilon \log_2 \frac{1}{\epsilon}}\right)$ (нижняя оценка справедлива для любого липшицева класса $W(M, N, [a, b])$), а в [9] доказано, что для любого липшицева класса $W(M, N, [a, b])$ и базиса

$$B = \{x - y, \max(x, y), |x|, 1\} \bigcup \{cx : 0 \leqslant c \leqslant 1\}\}$$

справедливо равенство по порядку $L_B(W, \epsilon) = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)$.

Следствие 6. *В классе полных кусочно-полиномиальных базисов, содержащих конечное число кусочно-полиномиальных функций и континуум линейных функций* $\{cx : 0 \leqslant c \leqslant 1\}$, *для любой функции* $L(\epsilon)$, *такой, что*

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \log \frac{1}{\epsilon} < L(\epsilon) < \frac{1}{\epsilon \log_2^2 \frac{1}{\epsilon}},$$

неразрешимы для липшицевых классов K проблемы распознавания выполнимости неравенств

$$L_B(K, \epsilon) > L(\epsilon),\ L_B(K, \epsilon) < L(\epsilon).$$

Доказательство. Допустим противное. Пусть $D = 0$ — произвольное диофантово уравнение. Возьмем функцию $F_D(x, y, z) = (H_D(z) + 1/2) * (x - y)$ из доказательства следствия 5. Рассмотрим класс $W(1/8, 1/8, [0, 1]$ и базис $B = \{F_D(x, y, z), \max(x, y), |x|, -x, 1\} \bigcup \{cx : 0 \leqslant c \leqslant 1\}$. Согласно доказательству следствия 5 при разрешимости уравнения $D = 0$ имеем $F_D(x, y, z) = (x - y)/2$, иначе $F_D(x, y, 0) = x - y$. В первом случае базис $B = \{(x - y)/2, \max(x, y), |x|, -x, 1\} \bigcup \{cx : 0 \leqslant c \leqslant 1\}$, и согласно сделанному перед формулировкой следствия 6 замечанию $L_B(K,\epsilon) = \Theta\left(\frac{1}{\epsilon \log_2 \frac{1}{\epsilon}}\right) > L(\epsilon)$. Во втором случае через рассматриваемый базис выражается базис

$$B = \{x - y, \max(x, y), |x|, -x, 1\} \bigcup \{cx : 0 \leqslant c \leqslant 1\},$$

для которого $L_B(K,\epsilon) = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)$, а значит, и для рассматриваемого базиса $L_B(K,\epsilon) < L(\epsilon)$. Если изучаемая проблема распознавания выполнимости неравенств была бы разрешима, то была бы разрешима и проблема о диофантовых уравнениях. □

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075–15–2022–284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Матиясевич Ю.В.* Алгоритм Тарского //Компьютерные инструменты в образовании. 2008. № 6. 4–14.
2. *Матиясевич Ю.В.* Десятая проблема Гильберта. М.: Физматлит, 1993.
3. *Adler A.* Some recursively unsolvable problems in analysis // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. **22**, N 2. 523–526.
4. *Wang P.* The undecidability of the existence of zeros of real elementary functions // J. ACM. 1974. **21**, N 4. 586–589.
5. *Richardson D.* Some undecidable problems involving elementary functions od a real variable // J. Symbol. Log. 1968. **33**, N 4. 514–520.
6. *Гашков С.Б.* Сложность реализации булевых функций схемами из функциональных элементов и формулами в базисах, элементы которых реализуют непрерывные функции // Проблемы кибернетики. Вып. 37. М.: Наука, 1980. 57–118.
7. *Turan G., Vatan F.* On the computation of Boolean functions by analog circuit of bounded fan-in // J. Computer and System Sci. 1997. **54**, N 1. 199–212.
8. *Гашков С. Б., Вегнер Я.В.* О сложности реализации булевых функций вещественными формулами // Матем. заметки. 2012. **92**, №2. 181–191.
9. *Гашков С. Б., Вегнер Я.В.* О сложности приближенной реализации липшицевых функций схемами в континуальных базисах // Матем. заметки. 2012. **92**, №1. 27–43.

Поступила в редакцию
02.09.2022

УДК 517

ОЦЕНКА НАИМЕНЬШЕГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО КОРНЯ РЯДА ПО СИНУСАМ ГАРМОНИЧЕСКОЙ В КРУГЕ ФУНКЦИИ

Т. Ю. Семенова[1]

Решается задача нахождения наименьшего положительного нуля ряда по синусам гармонической в круге функции, представимой на границе круга в виде ряда с монотонными коэффициентами.

Ключевые слова: синус-ряд, монотонные коэффициенты, гармонические функции.

The problem of finding the smallest positive zero of a sine series of a harmonic function in a circle, represented on the boundary of the circle as a series with monotone coefficients, is solved.

Key words: sine series, monotone coefficients, harmonic functions.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-3

[1] *Семенова Татьяна Юрьевна* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ; Моск. центр фунд. и прикл. матем., e-mail: station@list.ru.

Semenova TatianaYuryevna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis; Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics.