# Математика

УДК 519.21

## О КОМПЛЕКСИФИКАЦИИ МАКСИМУМ-УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

**А. В. Лебедев**[1]

По аналогии с обобщением устойчивых распределений на область комплексных индексов устойчивости $\alpha$ с помощью представления стохастическим интегралом по пуассоновской случайной мере производится комплексификация максимум-устойчивого распределения Фреше. В результате получается максимум-полуустойчивое распределение на первой четверти комплексной плоскости. Выведены оценки для маргинальных функций распределения.

*Ключевые слова:* максимум-устойчивые распределения, максимум-полуустойчивые распределения, комплексные числа, теория экстремумов.

By analogy with the generalization of stable distributions to the domain of complex stability indices $\alpha$ and using the representation by a stochastic integral over a Poisson random measure, the complexification of the max-stable Frechet distribution is carried out. The result is a max-semistable distribution on the first quarter of the complex plane. Estimates are derived for marginal distribution functions.

*Key words:* max-stable distribution, max-semistable distribution, complex numbers, extreme value theory.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-1

**1. Введение.** Стохастическая теория экстремумов (extreme value theory) занимается изучением максимумов и минимумов (а также других порядковых статистик) систем случайных величин. Начало современного этапа развития этой теории обычно датируется 1943 годом с появления фундаментальной работы Б. В. Гнеденко [1], где была доказана знаменитая теорема об экстремальных типах. А именно было показано, что если для максимумов независимых одинаково распределенных случайных величин существует невырожденное предельное распределение при линейной нормировке, то оно относится к одному из трех экстремальных типов (получивших впоследствии наименования законов Гумбеля, Фреше и Вейбулла). В качестве классических монографий по теме можно указать [2, 3]. Отметим также обзор [4], посвященный 110-летию со дня рождения Б. В. Гнеденко.

*Максимум-устойчивыми распределениями* (распределениями экстремальных типов, распределениями экстремальных значений) называются распределения, обладающие следующим свойством: максимумы любого числа $n \geqslant 2$ независимых одинаково распределенных случайных величин с таким распределением имеют распределения того же типа (т.е. отличаются от исходного преобразованиями сдвига и масштаба).

Невырожденное распределение является максимум-устойчивым тогда и только тогда, когда его функция распределения (ф.р.) имеет вид $G_i(ax+b)$, $a>0$, $i=1,2,3$, где

$$G_1(x) = \exp\{-e^{-x}\},$$

$$G_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, & x > 0, \end{cases} \qquad \alpha > 0;$$

$$G_3(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{\alpha}\}, & x < 0; \\ 1, & x \geqslant 0, \end{cases} \qquad \alpha > 0.$$

Распределения $G_1$, $G_2$, $G_3$ называются стандартными распределениями Гумбеля, Фреше и Вейбулла соответственно, а распределения с ф.р. вида $G_i(ax+b)$, $a>0$, — просто распределениями

[1] *Лебедев Алексей Викторович* — доктор физ.-мат. наук, доцент каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: avlebed@yandex.ru.

*Lebedev Alexey Viktorovich* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Probability Theory.

Гумбеля, Фреше и Вейбулла. Распределения Гумбеля образуют тип, а Фреше и Вейбулла — семейства типов (при каждом $\alpha > 0$ свой тип). Всех вместе их называют *экстремальными типами*. Часто говорят о *трех экстремальных типах*, имея в виду данные классы распределений.

Классы максимум-устойчивых распределений и возможных предельных распределений линейно нормированных максимумов совпадают и исчерпываются экстремальными типами.

Максимум-устойчивые распределения можно рассматривать как экстремальные аналоги устойчивых распределений. При этом индекс $\alpha$ для распределения Фреше оказывается аналогом индекса устойчивости $\alpha$ для устойчивого распределения. Так, в случае стандартного распределения Фреше максимум $n$ независимых случайных величин распределен как произведение исходной случайной величины на $n^{1/\alpha}$. В терминах функций распределения имеем

$$G_2^n(x) = \exp\{-nx^{-\alpha}\} = \exp\{-(n^{-1/\alpha}x)^{-\alpha}\} = G_2(n^{-1/\alpha}x), \quad x > 0.$$

В общем случае может добавляться некоторый сдвиг.

Аналогично легко показать, что для любых $c_1, c_2 > 0$ верно

$$G_2\left(\frac{x}{c_1}\right) G_2\left(\frac{x}{c_2}\right) = G_2\left(\frac{x}{c_3}\right), \quad c_3^\alpha = c_1^\alpha + c_2^\alpha,$$

или в терминах случайных величин

$$c_1\xi_1 \vee c_2\xi_2 \stackrel{d}{=} c_3\xi_3,$$

где $\xi_i$, $i = 1, 2, 3$, — независимые случайные величины со стандартным распределением Фреше $G_2$, а через $\vee$ обозначается максимум.

Настоящая работа мотивирована публикациями [5–7] по обобщению устойчивых распределений на область комплексных индексов устойчивости $\alpha$ с помощью представления стохастическим интегралом по пуассоновской случайной мере, что можно интерпретировать как сумму по точкам пуассоновского потока. От суммы в свою очередь можно перейти к максимуму. Далее мы применяем этот подход. При этом максимумы комплексных чисел понимаются покомпонентно.

Для комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ будем иметь в виду, что

$$z_1 \vee z_2 = (x_1 \vee x_2) + i(y_1 \vee y_2),$$

а под неравенством $z_1 \leqslant z_2$ будем понимать систему неравенств $x_1 \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y_2$.

Следует отметить, что сумма однородна относительно умножения на комплексное число (иначе говоря, из-под нее можно вынести любой такой множитель), а максимум — нет (он однороден только относительно умножения на действительное положительное число). Этим объясняется различие в результатах, к которым мы приходим. При обобщении мы получаем не максимум-устойчивые, а только максимум-полуустойчивые распределения.

*Максимум-полуустойчивыми распределениями* (при линейной нормировке) называют распределения $F$, для которых существует такое действительное число $r > 1$, что степень ф.р. $F^r(x)$ описывает распределение того же типа.

Понятно, что если это верно для $r$, то верно и для $r^2$, $r^3$ и т.д. Для определенности среди показателей $r > 1$ можно выбрать наименьший.

Максимум-полуустойчивые распределения представляют собой более широкий и менее изученный класс распределений, чем максимум-устойчивые. Они были введены в работах [8, 9], впоследствии изучались, например, в [10, 11], им посвящен также обзор [12]. Из недавних работ отметим [13], где можно найти более обширную литературу, а также главу в учебнике [14, гл. 4].

Обобщения максимум-полуустойчивых распределений, связанные с экстремумами признаков частиц в ветвящихся процессах, рассматривались в [15, 16].

Важным направлением в стохастической теории экстремумов является ее распространение на многомерный случай (экстремумы случайных векторов). Многомерным максимум-устойчивым распределениям уделено большое внимание в монографии [2]. В нашем случае комплекснозначным случайным величинам можно поставить в соответствие двумерные случайные векторы и распределения. Однако возникающие далее распределения не представляют собой двумерные максимум-устойчивые, поскольку их маргинальные распределения не относятся ни к одному из трех экстремальных типов.

**2. Схема максимумов по точкам пуассоновского потока.** Прежде всего представим данную схему в действительном случае с помощью следующего простого утверждения.

**Утверждение 1.** *Пусть*

$$V = \bigvee_{n=1}^{\infty} \tau_n^{-1/\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

*где* $\tau_n$, $n \geqslant 1$, *— последовательность точек пуассоновского потока интенсивности* $\lambda > 0$ *на* $\mathbb{R}_+$, *тогда* $V$ *имеет распределение Фреше с индексом* $\alpha$:

$$\mathbf{P}(V \leqslant x) = \exp\{-\lambda x^{-\alpha}\}, \quad x > 0.$$

**Доказательство.** Воспользуемся известным свойством пуассоновского потока: при условии, что число точек на отрезке известно, они равномерно распределены на этом отрезке. Пусть $N(T)$ — число точек на $[0, T]$, $T > 0$, и

$$V_T = \bigvee_{n=1}^{N(T)} \tau_n^{-1/\alpha},$$

тогда

$$\mathbf{P}(V_T \leqslant x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T} \left( \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{I}\{t^{-1/\alpha} \leqslant x\}\, dt \right)^n =$$

$$= \exp\left\{ -\lambda T + \lambda \int_0^T \mathbf{I}\{t^{-1/\alpha} \leqslant x\}\, dt \right\} = \exp\left\{ -\lambda \int_0^T (1 - \mathbf{I}\{t^{-1/\alpha} \leqslant x\})\, dt \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -\lambda \int_0^T \mathbf{I}\{t^{-1/\alpha} > x\}\, dt \right\} \to \exp\left\{ -\lambda \int_0^\infty \mathbf{I}\{t^{-1/\alpha} > x\}\, dt \right\} =$$

$$= \exp\{-\lambda x^{-\alpha}\}, \quad T \to \infty, \quad x > 0. \quad \square \tag{1}$$

Перейдем к случаю комплексного $\alpha$, полагая $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Следуя [5–7], обозначим

$$1/\alpha = a + bi, \quad \rho = 1/a, \quad \gamma = b/a.$$

Из условия $\operatorname{Re} \alpha > 0$ следует $a > 0$.

Под ф.р. $F_Z(z)$ комплексной случайной величины $Z$ с комплексным аргументом $z = x + iy$ будем понимать

$$F_Z(z) = \mathbf{P}(Z \leqslant z) = \mathbf{P}(\operatorname{Re} Z \leqslant x, \operatorname{Im} Z \leqslant y).$$

**Теорема 1.** *Пусть*

$$Z = \bigvee_{n=1}^{\infty} e^{-i\varphi} \tau_n^{-1/\alpha}, \tag{2}$$

*где* $\tau_n$, $n \geqslant 1$, *— последовательность точек пуассоновского потока интенсивности* $\lambda > 0$ *на* $\mathbb{R}_+$, $\varphi \in \mathbb{R}$, *тогда при сделанных предположениях верно*

$$F_Z(z) = \exp\left\{ -\lambda \int_0^\infty \mathbf{I}\left\{ \left\{ \frac{\cos(b \ln t + \varphi)}{t^a} > x \right\} \bigcup \left\{ -\frac{\sin(b \ln t + \varphi)}{t^a} > y \right\} \right\} dt \right\}. \tag{3}$$

**Доказательство.** Для любого $t > 0$ имеем

$$t^{-1/\alpha} = t^{-a-bi} = \frac{\cos(b \ln t)}{t^a} - \frac{i \sin(b \ln t)}{t^a}.$$

Аналогично доказательству утверждения 1 полагаем

$$Z_T = \bigvee_{n=1}^{N(T)} e^{-i\varphi} \tau_n^{-1/\alpha}$$

и, следуя ходу вычислений (1), получаем

$$\mathbf{P}(Z_T \leqslant z) = \exp\left\{ -\lambda \int_0^T (1 - \mathbf{I}\{e^{-i\varphi} t^{-1/\alpha} \leqslant z\})\, dt \right\} =$$

$$= \exp\left\{-\lambda \int_0^T \left(1 - \mathbf{I}\left\{\frac{\cos(b\ln t+\varphi)}{t^a} \leqslant x, -\frac{\sin(b\ln t+\varphi)}{t^a} \leqslant y\right\}\right) dt\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\lambda \int_0^T \mathbf{I}\left\{\left\{\frac{\cos(b\ln t+\varphi)}{t^a} > x\right\} \bigcup \left\{-\frac{\sin(b\ln t+\varphi)}{t^a} > y\right\}\right\} dt\right\} \to$$

$$\to \exp\left\{-\lambda \int_0^\infty \mathbf{I}\left\{\left\{\frac{\cos(b\ln t+\varphi)}{t^a} > x\right\} \bigcup \left\{-\frac{\sin(b\ln t+\varphi)}{t^a} > y\right\}\right\} dt\right\}, \quad T \to \infty. \qquad \square$$

Очевидно, если $x \leqslant 0$ или $y \leqslant 0$, интеграл в (3) расходится, что соответствует $F_Z(z) = 0$, таким образом, случайная величина $Z$ распределена в области $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$.

**Замечание 1.** Комплексные точки $\tau_n^{-1/\alpha}$, $n \geqslant 1$, расположены на упоминавшемся в [5–7] множестве

$$\Gamma_0 = \{t^{-1/\alpha}, t > 0\} = \{s^{1+\gamma i}, s > 0\},$$

которое представляет собой логарифмическую спираль в комплексной плоскости. Однако значения $Z$ не обязательно расположены на спирали (с учетом поворота на $\varphi$), поскольку могут получать действительную и комплексную части от разных точек.

**Следствие 1.** *Распределение $Z$ из (2) является максимум-полуустойчивым с показателем $r = \exp\{2\pi/b\}$ и индексом $\alpha$ в том смысле, что*

$$F_Z^r(z) = F_Z(r^{-1/\alpha} z)$$

*для любого $z \in \mathbb{C}$.*

**Доказательство.** Заметим, что $b \ln r = 2\pi$, откуда получаем $r^{-1/\alpha} = r^{-a}$. Пусть $s = t/r$, тогда

$$\left\{\frac{\cos(b\ln t+\varphi)}{t^a} > r^{-a}x\right\} = \left\{\frac{\cos(b\ln(rs)+\varphi)}{(rs)^a} > r^{-a}x\right\} = \left\{\frac{\cos(b\ln s+\varphi)}{s^a} > x\right\}, \tag{4}$$

аналогично

$$\left\{-\frac{\sin(b\ln t+\varphi)}{t^a} > r^{-a}x\right\} = \left\{-\frac{\sin(b\ln s+\varphi)}{s^a} > x\right\}. \tag{5}$$

С учетом (4), (5) и соотношения $dt = r\,ds$ получаем

$$F_Z(r^{-1/\alpha}z) = \exp\left\{-\lambda \int_0^\infty \mathbf{I}\left\{\left\{\frac{\cos(b\ln t+\varphi)}{t^a} > r^{-a}x\right\} \bigcup \left\{-\frac{\sin(b\ln t+\varphi)}{t^a} > r^{-a}y\right\}\right\} dt\right\} =$$

$$= \exp\left\{-r\lambda \int_0^\infty \mathbf{I}\left\{\left\{\frac{\cos(b\ln s+\varphi)}{s^a} > x\right\} \bigcup \left\{-\frac{\sin(b\ln s+\varphi)}{s^a} > y\right\}\right\} ds\right\} = F^r(z). \qquad \square$$

**Следствие 2.** *Если существуют такие целые $n_1, n_2, n_3$, что для некоторого $r > 1$ верно*

$$r^{n_1} + r^{n_2} = r^{n_3}, \tag{6}$$

*то*

$$F_Z\left(\frac{z}{c_1}\right) F_Z\left(\frac{z}{c_2}\right) = F_Z\left(\frac{z}{c_3}\right), \quad c_3^\alpha = c_1^\alpha + c_2^\alpha$$

*для любого $z \in \mathbb{C}$, где $c_i = r^{n_i/\alpha} = \exp\{2\pi\gamma n_i\}$, $i = 1, 2, 3$.*

Утверждение следует из того, что $F_Z(z/c_i) = F_Z^{r^{n_i}}(z)$, в силу следствия 1.

**Замечание 2.** Множество чисел $r$, которые могут удовлетворять условию (6), полностью описывается множеством превосходящих единицу действительных решений уравнений вида $x^n = x^m + 1$, $1 \leqslant m < n$ (такие решения существуют и единственны при каждых $m, n$). Таким образом, их множество счетно.

**3. Маргинальные распределения.** Введем случайные величины $X = \operatorname{Re} Z$, $Y = \operatorname{Im} Z$, тогда

$$X = \bigvee_{n=1}^\infty \frac{\cos(b\ln\tau_n+\varphi)}{\tau_n^a}, \quad Y = \bigvee_{n=1}^\infty \frac{-\sin(b\ln\tau_n+\varphi)}{\tau_n^a}.$$

Обозначим их ф.р. через $F_X(x)$ и $F_Y(y)$. Введем функцию

$$J(\varphi, x) = \int_0^\infty \mathbf{I}\left\{\frac{\cos(b\ln t + \varphi)}{t^a} > x\right\} dt, \quad x > 0, \tag{7}$$

тогда из (3) следует

$$F_X(x) = \exp\{-\lambda J(\varphi, x)\}, \quad F_Y(y) = \exp\{-\lambda J(\varphi + \pi/2, y)\}, \quad x, y > 0. \tag{8}$$

Достаточно изучать $F_X(x)$, поскольку $F_Y(y)$ отличается только сдвигом $\varphi$.

Заметим, что из (7) заменой $t = e^u$ можно получить более удобное представление:

$$J(\varphi, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{I}\left\{\frac{\cos(bu + \varphi)}{e^{au}} > x\right\} e^u \, du.$$

Изучив свойства функции $J$, мы установим полезные результаты для $F_X$.

**Лемма 1.** *Имеем*

$$J(\varphi, x) = J(\varphi - \gamma \ln x, 1) x^{-\rho}, \quad x > 0.$$

**Доказательство.** Используя замену переменных $v = u + \rho \ln x$, получаем

$$J(\varphi, x)x^\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{I}\left\{\frac{\cos(bu + \varphi)}{e^{au}} > x\right\} e^u x^\rho \, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{I}\left\{\frac{\cos(bv + \varphi - \gamma \ln x)}{e^{av}} > 1\right\} e^v \, dv = J(\varphi - \gamma \ln x, 1). \qquad \square$$

Далее, из (7) имеем

$$J(\varphi, 1) = \int_0^\infty \mathbf{I}\left\{\frac{\cos(b\ln t + \varphi)}{t^a} > 1\right\} dt < \int_0^\infty \mathbf{I}\{t^{-a} > 1\}\, dt = 1. \tag{9}$$

Понятно, что $J(\varphi, 1)$ — положительная ограниченная непрерывная функция с периодом $2\pi$. Введем следующие константы, зависящие от $\alpha$:

$$C_1 = \min_{\varphi \in [0, 2\pi]} J(\varphi, 1), \quad C_2 = \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} J(\varphi, 1). \tag{10}$$

Ввиду непрерывности функция принимает минимальное значение в некоторой точке отрезка $[0, 2\pi]$, и с учетом ее положительности отсюда следует $C_1 > 0$.

С использованием формул (8), (9) и леммы 1 доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** *Существуют такие константы* $0 < C_1 < C_2 < 1$, *зависящие от* $\alpha$ *и определенные в* (10), *что*

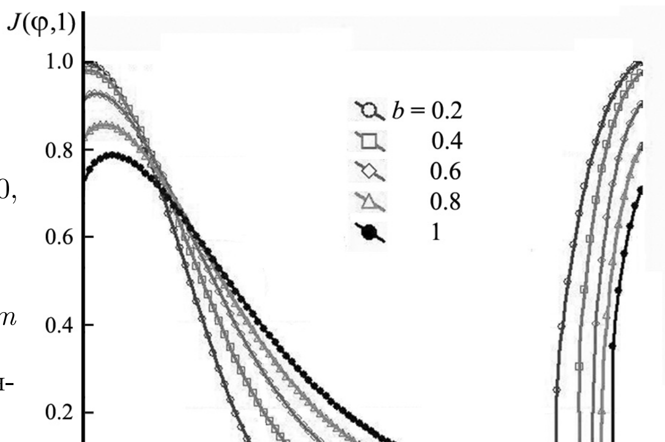
$$\exp\{-\lambda C_2 x^{-\rho}\} \leqslant F_X(x) \leqslant \exp\{-\lambda C_1 x^{-\rho}\}, \; x > 0,$$

*причем обе границы достигаются при сколь угодно больших значениях аргумента.*

**Следствие 3.** *При* $\rho > s > 0$ *существуют* $\mathbf{E}X^s, \mathbf{E}Y^s < \infty$.

Это следует из соответствующего неравенства для хвостов распределений.

В частности, при $\rho > 1$ существуют конечные средние, при $\rho > 2$ — конечные дисперсии и коэффициенты корреляции $X$ и $Y$. Эти и другие характеристики, а также их зависимости от параметров являются предметом изучения на будущее.




Графики функции $J(\varphi, 1)$ для $\varphi \in [0, 2\pi)$ при $a = 1$ и различных значениях $b$

**4. Численный анализ.** Был проведен приближенный расчет функции $J(\varphi, 1)$ из (9) по $\varphi \in [0, 2\pi)$ при $a = 1$ и некоторых значениях $b \in (0, 1]$. Результаты представлены на рисунке.

Неожиданным свойством оказалось наличие некоторого критического угла $\varphi$, начиная с которого происходит резкий рост функции. С увеличением $b$ эта точка сдвигается вправо. При $0 < a < 1$ графики аналогичны, но размах колебаний функции становится меньше.

Представляет интерес дальнейшее исследование поведения функций $J(\varphi, 1)$ и связанных с ними констант $C_1$, $C_2$ в зависимости от параметров $a$, $b$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Gnedenko B.V.* Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire // Ann. Math. 1943. **44**, N 3. 423–453.
2. *Галамбош Я.И.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984.
3. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.
4. *Piterbarg V.I., Rodionov I.V.* Certain modern developments in stochastic extreme value theory, on occasion of 110th birthday of Boris Vladimirovich Gnedenko // Reliability: Theory and Applications. 2021. **16**, N 4. 16–25.
5. *Алексеев И.А.* Об устойчивых случайных величинах с комплексным индексом устойчивости // Докл. РАН. Матем., информ., процессы упр. 2021. **501**. 5–10.
6. *Алексеев И.А.* Устойчивые случайные величины с комплексным индексом устойчивости $\alpha$. Случай $|\alpha - 1/2| < 1/2$ // Зап. науч. семинаров Петербург. отд. Матем. ин-та РАН. 2021. **505**. 17–37.
7. *Алексеев И.А.* Устойчивые случайные величины с комплексным индексом устойчивости, I // Теор. вероятн. и ее примен. 2022. **67**, № 3. 421–442.
8. *Гриневич И.В.* Макс-полуустойчивые предельные распределения, отвечающие линейной и степенной нормировке // Теор. вероятн. и ее примен. 1992. **37**, № 4. 774–776.
9. *Pancheva E.* Multivariate max-semistable distributions // Теор. вероятн. и ее примен. 1992. **37**, № 4. 794–795.
10. *Temido M.G., Canto e Castro L.* Max-semistable laws in extremes of stationary random sequences // Theory Probab. and Appl. 2003. **47**, N 2. 365–374.
11. *Canto e Castro L., Dias S., Temido M.G.* Looking for max-semistability: A new test for the extreme value condition // J. Statist. Plan. Inference. 2011. **141**, N 9. 3005–3020.
12. *Pancheva E.* Max-semistability: a survey // ProbStat Forum. 2010. **3**. 11–24.
13. *Dias S., Temido M.G.* Random fields and random sampling // Kybernetika. 2019. **55**, N 6. 897–914.
14. *Лебедев А.В.* Основы стохастической теории экстремумов. М.: Ленанд, 2018.
15. *Лебедев А.В.* Максимумы случайных признаков частиц в надкритических ветвящихся процессах // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2008. № 5. 3–6.
16. *Лебедев А.В.* Многомерные экстремумы случайных признаков частиц в надкритических ветвящихся процессах // Теор. вероятн. и ее примен. 2012. **57**, № 4. 788–794.


Поступила в редакцию
26.08.2022

---

УДК 519.95

# НЕРАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ О КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ

**С. Б. Гашков**[1]

Доказана алгоритмическая неразрешимость нескольких задач, связанных с кусочно-полиномиальными функциями одной действительной переменной, имеющими бесконечное число узлов.

[1] *Гашков Сергей Борисович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. дискретной математики мех.-мат. ф-та МГУ; Моск. центр фунд. и прикл. матем., e-mail: sbgashkov@gmail.com.

*Gashkov Sergey Borisovich* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Discrete Mathematics; Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics.