Краткие сообщения

УДК 517.5

α-МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ТЕОРЕМА ЛОРЕНЦА

Е. Д. Алферова[1], М. И. Дьяченко[2]

Изучаются свойства α-монотонных последовательностей. Установлена связь между α-монотонностью и предельной скоростью изменения коэффициентов. Обсуждается, какие операции над последовательностями не выводят их из класса M_α. Кроме того, для тригонометрических рядов с коэффициентами из классов M_α при $0 < \alpha < 1$ доказан аналог теоремы Лоренца.

Ключевые слова: монотонные коэффициенты, монотонность дробного порядка, косинус-ряды, тригонометрические ряды, теорема Лоренца.

Properties of α-monotone sequences are studied. A relationship between α-monotonicity and the limiting rate of change of coefficients is revealed. Operations on sequences that do not lead out of the class M_α are discussed. An analogue of the Lorentz theorem for trigonometric series with coefficients from the classes M_α for $0 < \alpha < 1$ is proved.

Key words: monotone coefficients, fractional monotonicity coefficients, cosine series, trigonometric series, Lorenz theorem.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-2-8

1. Об одном свойстве α-монотонных последовательностей. Во многих задачах анализа важную роль играют неотрицательные, монотонные и выпуклые последовательности.

Определение 1. Пусть $-\infty < \alpha < \infty$. Числами Чезаро $\{A_n^\alpha\}_{n=0}^\infty$ называются коэффициенты разложения

$$(1-x)^{-\alpha-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha x^n$$

при $x \in (0,1)$.

Известны следующие свойства этих чисел (см. [1, с. 130–131]).

1. $A_n^0 = 1$ при $n = 0, 1, \dots$ и $A_0^\alpha = 1$ при любом α.

2. Если $\alpha \neq -1, -2, \dots$, то существуют постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, зависящие лишь от α, такие, что

$$C_2 n^\alpha \leqslant |A_n^\alpha| \leqslant C_1 n^\alpha$$

при всех $n > 0$.

3. Числа $A_n^\alpha > 0$ для любого $\alpha > -1$ и любого n, причем если $\alpha > 0$, то числа $A_n^\alpha \uparrow \infty$ при $n \to \infty$, а если $-1 < \alpha < 0$, то числа $A_n^\alpha \downarrow 0$ при $n \to \infty$.

4. При всех α и β и $n = 0, 1, \dots$ верно равенство

$$A_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\alpha A_k^\beta.$$

В частности, $A_n^\alpha - A_{n-1}^\alpha = A_n^{\alpha-1}$.

[1] *Алферова Елена Дмитриевна* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ; Моск. центр фунд. и прикл. матем., e-mail: elena.alferova@gmail.com.

Alferova Elena Dmitrievna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis; Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics.

[2] *Дьяченко Михаил Иванович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ; Моск. центр фунд. и прикл. матем., e-mail: dyach@mail.ru.

Dyachenko Mikhail Ivanovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Functions and Functional Analysis; Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics.

5. При $\alpha > -1$ и $n = 0, 1, \ldots$ справедлива формула

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}.$$

Если заданы числовая последовательность $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0}^\infty$ и действительное α, то будем обозначать

$$\Delta^\alpha(\mathbf{a})_n = \sum_{k=0}^\infty A_k^{-\alpha-1} a_{n+k}$$

при $n = 0, 1, \ldots$ в том случае, когда такая сумма существует, например если $\alpha > 0$ и последовательность $\mathbf{a}$ ограничена.

Определение 2. Пусть $\alpha > 0$ и $\mathbf{a}$ — последовательность действительных чисел. Тогда скажем, что $\mathbf{a} \in M_\alpha$, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\Delta^\alpha(\mathbf{a})_n \geqslant 0$ при $n = 0, 1, \ldots$.

Из определения 2 вытекает, что класс M_0 совпадает с классом стремящихся к нулю последовательностей неотрицательных чисел, M_1 — класс стремящихся к нулю монотонно невозрастающих последовательностей и т.д.

Следует сказать, что многие важные вспомогательные результаты для изучения монотонности дробного порядка были установлены в работе А. Андерсена [2]. М.И. Дьяченко в работе [3] ввел в рассмотрение классы тригонометрических рядов с коэффициентами дробной монотонности и установил некоторые свойства сумм этих рядов. В частности, в [3, лемма 1, п. б] было доказано, что при $\alpha > \beta \geqslant 0$ справедливо включение $M_\alpha \subset M_\beta$. В статье М.И. Дьяченко [4] получены окончательные в своих терминах асимптотические (вблизи нуля) оценки сумм косинус-рядов с коэффициентами из классов M_α.

Вызывает интерес и изучение внутренних свойств α-монотонных последовательностей. Настоящая заметка посвящена установлению одного из таких свойств и получению с его помощью аналога теоремы Лоренца. В силу упомянутого выше включения при $\alpha \geqslant 1$ любая α-монотонная последовательность будет монотонной и в обычном смысле. При $0 < \alpha < 1$ это уже не так, однако справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $0 < \alpha < 1$ и $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0}^\infty$ — α-монотонная последовательность. Тогда при любом $n \geqslant 1$ при всех $0 \leqslant k \leqslant n-1$ выполняется неравенство $a_k \geqslant a_n A_{n-k}^{\alpha-1}$, причем данный результат является окончательным.*

Доказательство. Обозначим $b_n = \Delta^\alpha(\mathbf{a})_n \geqslant 0$ при $n = 0, 1, \ldots$. Тогда, согласно установленному в [2, лемма 1, п. в] результату, имеем

$$a_n = \Delta^{-\alpha}(\Delta^\alpha(\mathbf{a}))_n = \sum_{k=0}^\infty A_k^{\alpha-1} b_{n+k}$$

при $n = 0, 1, \ldots$. Будем считать, что $a_n > 0$, иначе доказываемое неравенство очевидно. Рассмотрим отношение

$$\frac{a_k}{a_n} = \frac{\sum\limits_{r=k}^\infty A_{r-k}^{\alpha-1} b_r}{\sum\limits_{r=n}^\infty A_{r-n}^{\alpha-1} b_r} \geqslant \frac{\sum\limits_{r=n}^\infty A_{r-k}^{\alpha-1} b_r}{\sum\limits_{r=n}^\infty A_{r-n}^{\alpha-1} b_r}. \tag{1}$$

Заметим, что (см. свойство 5 чисел Чезаро)

$$\frac{A_{r-k}^{\alpha-1}}{A_{r-n}^{\alpha-1}} = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+r-k-1)}{(r-k)!} \times$$

$$\times \frac{(r-n)!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+r-n-1)} = \frac{(\alpha+r-n)\ldots(\alpha+r-k-1)}{(r-n+1)\ldots(r-k)}. \tag{2}$$

В то же время

$$A_{n-k}^{\alpha-1} = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-k-1)}{(n-k)!}. \tag{3}$$

Поскольку $0 < \alpha < 1$, при любом $r \geqslant n$ имеем $(\alpha-1)(r-n) \leqslant 0$, откуда при любом $q \geqslant 1$ получаем

$$\alpha r - \alpha n + \alpha q + qr - nq + q^2 - r + n - q \leqslant \alpha q + rq - nq - q + q^2$$

или, что то же самое,

$$\frac{\alpha+q-1}{q} \leqslant \frac{\alpha+r-n+q-1}{r-n+q}.$$

Перемножая эти неравенства для $q = 1, 2, \ldots, n-k$, заключаем (см. (2) и (3)), что

$$\frac{A^{\alpha-1}_{r-k}}{A^{\alpha-1}_{r-n}} \geqslant A^{\alpha-1}_{n-k}.$$

Поскольку эта оценка выполнена при всех $r \geqslant n$, из (1) вытекает, что

$$\frac{a_k}{a_n} \geqslant \frac{A^{\alpha-1}_{n-k}\sum\limits_{r=n}^{\infty} A^{\alpha-1}_{r-n} b_r}{\sum\limits_{r=n}^{\infty} A^{\alpha-1}_{r-n} b_r} = A^{\alpha-1}_{n-k},$$

а это и необходимо было установить.

Покажем теперь на примере, что полученный результат является окончательным. Пусть n — натуральное число, последовательность $\mathbf{b}$ такова, что $b_n = 1$, а остальные $b_l = 0$. Тогда если $a_r = \Delta^{-\alpha}(\mathbf{b})_r$ при $r = 0, 1, \ldots$, то $\mathbf{a} \in M_\alpha$. В то же время при всех $0 \leqslant k \leqslant n-1$ имеем $a_k = A^{\alpha-1}_{n-k} \equiv a_n A^{\alpha-1}_{n-k}$, что и демонстрирует окончательность оценки теоремы 1.

Интересен также вопрос о том, какие операции не выводят последовательности из классов M_α. Очевидно, что сложение и умножение на неотрицательное число обладают этим свойством. Однако с произведением последовательностей все не так просто. Очевидно, что классы M_0 и M_1 инвариантны относительно перемножения входящих в них последовательностей. Несколько сложнее установить, что аналогичное утверждение верно и для класса M_2. Это следует из равенства

$$a_n b_n - 2a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} = (a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2})b_n +$$

$$+ a_{n+1}(b_n - 2b_{n+1} + b_{n+2}) + (a_{n+1} - a_{n+2})(b_n - b_{n+1}) + (b_{n+1} - b_{n+2})(a_{n+1} - a_{n+2})$$

и того, что $M_2 \subset M_1$.

В то же время справедлив такой результат.

Теорема 2. *При $0 < \alpha < 1$ существует последовательность $\mathbf{a}_\alpha \in M_\alpha$, такая, что ее квадрат уже не лежит в M_α.*

Доказательство. Пример для теоремы 2 был построен в конце доказательства теоремы 1. Действительно, у этой последовательности $a_n^2 = 1$, в то время как при $0 \leqslant k \leqslant n-1$ имеем $a_k^2 = \left(A^{\alpha-1}_{n-k}\right)^2 \leqslant C(n-k)^{2(\alpha-1)}$. С учетом свойства 2 чисел Чезаро и того, что $\alpha < 1$, из теоремы 1 следует, что последовательность $\{a_j^2\}_{j=0}^{\infty} \notin M_\alpha$.

Можно высказать предположение, что при любом $\alpha > 1$ произведение двух последовательностей из M_α также лежит в этом классе, но доказать это пока не получилось.

2. Аналог теоремы Лоренца. Теорема 1 дает возможность установить для тригонометрических рядов с коэффициентами из классов M_α при $0 < \alpha < 1$ аналог теоремы Лоренца о рядах Фурье с монотонными коэффициентами функций из классов $\operatorname{Lip}\beta$. Мы рассмотрим случай косинус-рядов (для синус-рядов все аналогично). Пусть дан ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \tag{4}$$

Если число $\beta \in (0,1)$ и коэффициенты ряда (4) удовлетворяют для некоторого $C > 0$ условию $|a_n| \leqslant \frac{C}{n^{1+\beta}}$ при $n = 1, 2, \ldots$, то ряд (4) является рядом Фурье некоторой функции $f(x) \in \operatorname{Lip}\beta$. Г. Лоренц [5] доказал, что если коэффициенты ряда монотонны, то имеет место и обратное утверждение. Для классов M_α при $0 < \alpha < 1$ справедлив более слабый результат.

Теорема 3. *Пусть четная 2π-периодическая функция $f(x) \in \mathrm{Lip}\beta$, а ее косинус-коэффициенты Фурье принадлежат классу M_α при некотором $0 < \alpha < 1$. Тогда для некоторого $C > 0$ имеем $a_n \leqslant \frac{C}{n^{\alpha+\beta}}$ при $n = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. Поскольку ряды Фурье функций класса $\mathrm{Lip}\,\beta$ сходятся равномерно, при любом n имеем (см. теорему 1)

$$\frac{C}{n^\beta} \geqslant f(0) - f\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \geqslant \sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^{n} a_k \left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant a_n \sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} \geqslant C_1 a_n n^\alpha, \tag{5}$$

где положительная постоянная C — из определения класса $\mathrm{Lip}\,\beta$, а $C_1 > 0$ зависит только от α. Теперь результат теоремы вытекает из оценки (5).

Как показывает следующее утверждение, результат теоремы 3 нельзя улучшить.

Теорема 4. *Пусть $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$. Тогда существует четная 2π-периодическая функция $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\beta$, такая, что ее косинус-коэффициенты Фурье принадлежат классу M_α и существует монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел $\{l_r\}_{r=1}^{\infty}$, такая, что коэффициенты Фурье $a_{l_r}(f) \geqslant l_r^{-\alpha-\beta}$ при всех r.*

Доказательство. Положим

$$b_k = \begin{cases} 2^{-n(\alpha+\beta)} & \text{при } k = 2^n, \quad n = 1, 2, ...; \\ 0 & \text{при остальных } k \end{cases}$$

и $a_l = \Delta^{-\alpha}(\mathbf{b})_l$ при $l = 0, 1, \ldots$. Существование чисел a_l очевидно ввиду определения последовательности $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$. В [2, лемма 1, п. в] было установлено, что $\Delta^\alpha(\mathbf{a})_l = b_l$ при всех l. Отсюда следует, что $\{a_l\}_{l=0}^{\infty} \in M_\alpha$. Кроме того, при любом n имеем $a_{2^n} \geqslant b_{2^n} = 2^{-n(\alpha+\beta)}$. Рассмотрим ряд (4). Поскольку

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=l}^{\infty} A_{s-l}^{\alpha-1} b_s = \sum_{s=0}^{\infty} b_s \sum_{l=0}^{s} A_{s-l}^{\alpha-1} \leqslant C \sum_{s=0}^{\infty} b_s s^\alpha = C \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(\alpha+\beta)} 2^{n\alpha} < \infty,$$

ряд (4) равномерно сходится к непрерывной функции $f(x)$. Кроме того, из предыдущей оценки вытекает, что тем более

$$\sum_{l=0}^{\infty} l^{-\alpha} a_l < \infty.$$

Тогда, как было доказано в [3, лемма 2, п. 1], при $x \in (0, \pi]$ имеем

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \Delta^\alpha(\mathbf{a})_l K_l^\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(\alpha+\beta)} K_{2^n}^\alpha(x), \tag{6}$$

где

$$K_l^\alpha(x) = \sum_{s=1}^{l} A_{l-s}^{\alpha-1} \cos sx + \frac{1}{2} A_l^{\alpha-1}.$$

Учитывая свойства чисел Чезаро, приходим к оценке

$$|K_l^\alpha(x)| \leqslant C l^\alpha \tag{7}$$

при всех $l \geqslant 1$ и x. Тогда в силу непрерывности обеих частей равенство (6) выполнено уже при всех $x \in [0, \pi]$. Кроме того, из неравенства Бернштейна и оценки (7) получаем, что

$$|(K_l^\alpha(x))'| \leqslant C l^{\alpha+1} \tag{8}$$

при всех $l \geqslant 1$ и x.

Проверим, что $f(x) \in \operatorname{Lip}\beta$. Пусть $0 \leqslant y < x \leqslant \pi$, $t = x - y \leqslant 1$ и натуральное N таково, что $2^{-N} < t \leqslant 2^{-N+1}$. Тогда (см. (7) и (8))

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(\alpha+\beta)} |K_{2^n}^{\alpha}(x) - K_{2^n}^{\alpha}(y)| \leqslant$$

$$\leqslant t \sum_{n=1}^{N} 2^{-n(\alpha+\beta)} \max_z |(K_{2^n}^{\alpha}(z))'| + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n(\alpha+\beta)} \max_z |K_{2^n}^{\alpha}(z)| \leqslant Ct^{\beta}.$$

Теорема доказана.

Исследование выполнено за счет гранта РНФ (проект № 22–21–00545) в МГУ им. М. В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
2. *Andersen A.F.* Comparison theorems in the theory of Cesaro summability // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1927. **27**. 39–71.
3. *Дьяченко М.И.* Тригонометрические ряды с обобщенно-монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 1986. № 7. 39–50.
4. *Дьяченко М.И.* Асимптотика сумм косинус-рядов с коэффициентами дробной монотонности // Матем. заметки. 2021. **110**, № 6. 865–874.
5. *Lorentz G.G.* Fourier-Koeffizienten und Funktionenklassen // Math. Z. 1948. **51**. 135–149.

Поступила в редакцию
06.07.2022

УДК 515.12

ПОЛУНОРМАЛЬНЫЕ ФУНКТОРЫ И ПАРАНОРМАЛЬНОСТЬ

А. А. Иванов[1]

Известно, что если пространство $\mathcal{F}(X)$ наследственно паранормально для паракомпактного p-пространства X и нормального функтора $\mathcal{F}$ степени $\geqslant 3$ в категории $\mathcal{P}$ паракомпактных p-пространств и их совершенных отображений, то пространство X метризуемо. В работе доказано обобщение этой теоремы на случай полунормальных функторов в категории $\mathcal{P}$.

Ключевые слова: полунормальный функтор, паракомпактное p-пространство, наследственная паранормальность, метризуемость.

It is known that if a space $\mathcal{F}(X)$ is hereditarily paranormal for a paracompact p-space X and normal functor $\mathcal{F}$ of degree $\geqslant 3$ in the category $\mathcal{P}$ of paracompact p-spaces and their perfect maps, then X is metrizable. In this paper, a generalization of this theorem is proved for seminormal functors in the category $\mathcal{P}$.

Key words: seminormal functor, paracompact p-space, hereditarily paranormality, metrizability.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-2-9

В настоящей работе все топологические пространства предполагаются регулярными. Терминология и обозначения, не разъясняемые ниже, следуют книге [1].

[1] *Иванов Андрей Александрович* — асп. каф. общей топологии и геометрии мех.-мат. ф-та МГУ; стажер-исследователь Моск. центра фунд. и прикл. матем., e-mail: an98iv@yandex.ru.

Ivanov Andrei Alexandrovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Topology and Geometry; Researcher, Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics.