

уравнений для определения точки  $A$  следующая:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}, \\ \frac{y(x - x_0)}{b^2} + \frac{x(y - y_0)}{a^2} = 0, \end{cases}$$

что в итоге приводит к уравнению

$$\frac{y \left( a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} - x_0 \right)}{b^2} + \frac{a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}(y - y_0)}{a^2} = 0.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{y \left( a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} - x_0 \right)}{b^2} + \frac{a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}(y - y_0)}{a^2} \right) = \pm\infty,$$

а значит, в силу непрерывности есть хотя бы один корень, что доказывает наличие решения-луча.

Автор признателен профессору О.Э. Зубелевичу за полезные обсуждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Матем. сб. 1960. **51(93)**, № 1. 99–128.
2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, Гл. редакция физ.-мат. лит., 1985.
3. Knyazhishche L.B. Extremum condition and stability tests for solutions of gradient systems // Diff. Equat. 2019. **55**. 340–347.
4. Богавский И.А. Разрывные градиентные дифференциальные уравнения и траектории в вариационном исчислении // Матем. сб. 2006. **197**, № 12. 11–42.
5. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии, дополненные необходимыми сведениями из алгебры. М.: Наука, Гл. редакция физ.-мат. лит., 1968.

Поступила в редакцию  
31.08.2022

УДК 511

### ТЕНЗОР КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ РАСТЯГИВАЕМОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ РЕШЕТКОЙ ИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

И. Ф. Старцев<sup>1</sup>

В статье дано построение решения плоской двоякопериодической задачи нагружения бесконечной упругой изотропной плоскости с эллиптическими включениями. Плоскость находится под одной из трех нагрузок: растягивается в направлении одной из осей включения или испытывает чистый сдвиг на бесконечности. Также рассмотрено понятие тензора концентрации напряжений и показан пример его построения. Решение задачи сводится к

<sup>1</sup> Старцев Илья Федорович — асп. каф. механики композитов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: I\_kotorii\_I@mail.ru.  
Startsev Ilya Fedorovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mechanics of Composites.

поиску комплексных функций из граничных условий, полученных из равенства перемещений и нормальных сил матрицы и включений, с помощью конформных отображений и интегрирования методом Мусхелишвили. Влияние нецентральных включений выражается посредством метода малого параметра.

*Ключевые слова:* тензор концентрации напряжений, комплексные функции, конформные отображения, метод малого параметра, интегрирование методом Мусхелишвили.

This work presents the construction of a solution to the plane doubly periodic loading problem for an infinite elastic isotropic plane with elliptical inclusions. The plane is under one of three loads: it is stretched in the direction of one of the inclusion axes or it has a pure shear at infinity. The concept of stress concentration tensor is considered and an example of its construction is shown. The solution of the problem is reduced to the search for complex functions from the boundary conditions obtained from the equality of displacements and normal forces of the matrix and inclusions using conformal mappings and integration by the Muskhelishvili method. The effect of non-central inclusions is expressed by using the small parameter method.

*Key words:* stress concentration tensor, complex functions, conformal mapping, small parameter method, integration by the method of Muskhelishvili.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-2-7

**Введение.** Целью настоящей работы является решение двоякопериодической задачи растяжения плоскости с эллиптическими ядрами, а также построение *тензора концентрации напряжений* [1]. Тензор концентрации напряжений — это тензор четвертого ранга, соединяющий напряжения вблизи концентратора напряжений и напряжения без концентратора  $\sigma_{ij} = A_{ijkl}\sigma_{kl}^0$ . Актуальность данного тензора заключается в следующем: в механике для расчета прочности используются коэффициенты концентраций напряжений, однако каждый такой коэффициент дает решение только для определенного вида внешнего нагружения. Тензор концентрации напряжений позволяет определять прочность для любой внешней нагрузки.

**Постановка задачи.** Имеем изотропную матрицу, ослабленную большой теоретически бесконечной решеткой одинаковых изотропных эллиптических включений. Центры соседних включений находятся друг от друга на расстоянии  $L$  на оси  $x$  и  $L \operatorname{tg} \alpha$  на оси  $y$  и располагаются на прямых, параллельных оси  $x$  и  $y$ , где  $\alpha$  — это угол, образованный прямыми, соединяющими центры ближайших двух соседних включений, лежащих на оси  $x$  и на диагонали. Полуоси эллипса равны  $b$  вдоль оси  $x$  и  $a$  вдоль оси  $y$ . На границе включения перемещения и нормальные силы ядра и матрицы равны. На бесконечности действуют растягивающие усилия  $p$  вдоль линии центров,  $q$  — поперек и действует полный сдвиг  $k$ . Общий вид задачи представлен на рис. 1.

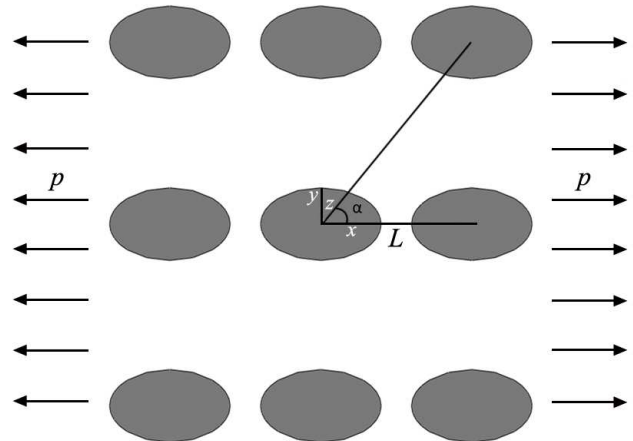


Рис. 1

Включение, в центре которого находится начало координат, назовем основным. Изучим напряженное состояние пластинки вблизи этого включения. Вблизи других включений в силу двоякопериодичности задачи оно получается таким же.

**Решение краевой задачи.** Задача о напряженном состоянии пластинки с эллиптическими включениями на границе матрицы и включения сводится к определению комплексных потенциалов  $\phi(z)$ ,  $\psi(z)$ ,  $\phi^{(r)}(z)$  и  $\psi^{(r)}(z)$  из граничных условий на контуре основного включения [2–7] — равенства на границе включения нормальных сил и перемещений включения и матрицы:

$$\begin{aligned} \varphi(t) + \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} &= \varphi^{(r)}(t) + \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\varphi'^{(r)}(t)} + \overline{\psi^{(r)}(t)}, \\ \varkappa \varphi(t) - \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} &= \frac{\mu}{\mu^{(r)}} (\varkappa^{(r)} \varphi^{(r)}(t) - \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\varphi'^{(r)}(t)} - \overline{\psi^{(r)}(t)}). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $t$  — аффикс точки на границе основного включения;  $\omega(t)$  — конформное отображение внешности эллиптического включения на внешность единичной окружности; функции без индекса  $(r)$

относятся к матрице; функции с индексом — к включению;  $\varkappa = 3 - 4\nu = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$ ;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе.

Напряжения находятся из этих комплексных функций по формуле Колосова–Мусхелишвили:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 4\operatorname{Re} \varphi'(z), \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2(\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)).\end{aligned}$$

Комплексные функции вне основного включения представим следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \varphi^0(t) + \frac{p+q}{4}t, \\ \psi(t) &= \psi^0(t) + \frac{q-p+2ik}{2}t,\end{aligned}$$

где  $\varphi^0$  и  $\psi^0$  — голоморфные вне основного включения функции.

Согласно работе Д. Эшелби [8] в случае одного включения поле напряжений однородно и соответственно комплексные функции в этом случае линейны. Поэтому для нашей задачи разложим функции напряжений в основном включении в степенной ряд до первого следующего ненулевого члена, т.е. до 3-го, так как второй член вследствие симметрии задачи равен нулю:

$$\begin{aligned}\varphi^{(r)}(z) &= A_1^{(r)}z + A_3^{(r)}z^3, \\ \psi^{(r)}(z) &= B_1^{(r)}z + B_3^{(r)}z^3.\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты при степенях  $z$  аналогично уравнениям (1) для удобства промаркированы индексом  $^{(r)}$ .

**Конформное отображение плоскости с эллиптическими включениями.** Функция, конформно отображающая внешность эллиптического включения на внешность единичного круга с центром в координатах  $(nl, sl \operatorname{tg} \alpha)$ , имеет вид

$$\begin{aligned}z - (n + is \operatorname{tg} \alpha)l &= R(\zeta_{ns} + m\zeta_{ns}^{-1}), \\ z = \omega(\zeta) &= R(\zeta + m\zeta^{-1}), \\ R = \frac{a+b}{2}, \quad m &= \frac{a-b}{a+b}.\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь основное включение отображается с помощью функции  $\omega(\zeta)$ . Без ограничения общности будем считать  $R = 1$ . Таким образом, мы произвели обезразмеривание, и переменные, имеющие размерность длины, будут измеряться по отношению к радиусу эллипсов.

**Решение краевой задачи.** Представления для функций  $\varphi^0$  и  $\psi^0$  можно взять в виде

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta_{ns}^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{-k} + \sum_{n^*=-\infty}^{\infty} \sum_{s^*=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta_{n^*s^*}^{-k}, \\ \psi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k} + \sum_{n^*=-\infty}^{\infty} \sum_{s^*=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta_{n^*s^*}^{-k}.\end{aligned}$$

Здесь принято, что  $\zeta = \zeta_0$ . Символ  $(*)$  означает отсутствие в сумме номера  $n^* = 0, s^* = 0$ .

Из первого уравнения (2) видно, что величины  $\zeta_{ns}^{-k}$  зависят от малого параметра  $\varepsilon = \frac{R}{l}$ , где  $R$  в дальнейшем будет опускаться. Разложим голоморфную часть комплексных функций в ряды по степеням этого параметра, сохраняя члены, содержащие  $\varepsilon$  в степени не выше четвертой. Тогда получим

$$\begin{aligned}\varphi^0(z) &= \varphi^*(\zeta) + \varepsilon^2 l_2(z) + \varepsilon^4 l_4(z), \\ \psi^0(z) &= \psi^*(\zeta) + \varepsilon^2 p_2(z) + \varepsilon^4 p_4(z).\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 A_{-3}^* &= (A_3^{(r)} - A_3)(m^3) + (\overline{A_3^{(r)}} - \overline{A_3})(3m) + \overline{B_3^{(r)}} - \overline{B_3}, \\
 A_{-1}^* &= (A_1^{(r)} - A_1)(m) + (\overline{A_1^{(r)}} - \overline{A_1})(m) + (A_3^{(r)} - A_3)(3m^2) + (\overline{A_3^{(r)}} - \overline{A_3})(3 + 6m^2) + \\
 &+ \overline{B_1^{(r)}} - \overline{B_1} + (\overline{B_3^{(r)}} - \overline{B_3})(3m), \\
 A_1^* &= A_1^{(r)} - A_1 + \overline{A_1^{(r)}} - \overline{A_1} + (A_3^{(r)} - A_3)(3m) + (\overline{A_3^{(r)}} - \overline{A_3})(6m + 3m^3) + \\
 &+ (\overline{B_1^{(r)}} - \overline{B_1})(m) + (\overline{B_3^{(r)}} - \overline{B_3})(3m^2), \\
 A_3^* &= A_3^{(r)} - A_3 + (\overline{A_3^{(r)}} - \overline{A_3})(3m^2) + (\overline{B_3^{(r)}} - \overline{B_3})(m^3), \\
 A_{-3}^{**} &= (\varkappa^{(r)} \frac{\mu}{\mu^{(r)}} A_3^{(r)} - \varkappa A_3)(m^3) + (\frac{\mu}{\mu^{(r)}} \overline{A_3^{(r)}} - \overline{A_3})(-3m) + (\frac{\mu}{\mu^{(r)}} \overline{B_3^{(r)}} - \overline{B_3})(-1), \\
 A_{-1}^{**} &= (\varkappa^{(r)} \frac{\mu}{\mu^{(r)}} A_1^{(r)} - \varkappa A_1)(m) + (\frac{\mu}{\mu^{(r)}} \overline{A_1^{(r)}} - \overline{A_1})(-m) + (\varkappa^{(r)} \frac{\mu}{\mu^{(r)}} A_3^{(r)} - \varkappa A_3)(3m^2) + \\
 &+ (\frac{\mu}{\mu^{(r)}} \overline{A_3^{(r)}} - \overline{A_3})(-3 - 6m^2) + (\frac{\mu}{\mu^{(r)}} \overline{B_1^{(r)}} - \overline{B_1})(-1) + (\frac{\mu}{\mu^{(r)}} \overline{B_3^{(r)}} - \overline{B_3})(-3m), \\
 A_1^{**} &= \varkappa^{(r)} \frac{\mu}{\mu^{(r)}} A_1^{(r)} - \varkappa A_1 + (\frac{\mu}{\mu^{(r)}} A_1^{(r)} - A_1)(-1) + (\varkappa^{(r)} \frac{\mu}{\mu^{(r)}} A_3^{(r)} - \varkappa A_3)(3m) + \\
 &+ (\frac{\mu}{\mu^{(r)}} \overline{A_3^{(r)}} - \overline{A_3})(-6m - 3m^3) + (\frac{\mu}{\mu^{(r)}} \overline{B_1^{(r)}} - \overline{B_1})(-m) + (\frac{\mu}{\mu^{(r)}} \overline{B_3^{(r)}} - \overline{B_3})(-3m^2), \\
 A_3^{**} &= \varkappa^{(r)} \frac{\mu}{\mu^{(r)}} A_3^{(r)} - \varkappa A_3 + (\frac{\mu}{\mu^{(r)}} \overline{A_3^{(r)}} - \overline{A_3})(-3m^2) + (\frac{\mu}{\mu^{(r)}} \overline{B_3^{(r)}} - \overline{B_3})(-m^3).
 \end{aligned} \tag{3}$$

При этом

$$\begin{aligned}
 A_1 &= t_1 a_1 + t_3 a_3, & A_3 &= \frac{1}{3} t_3 a_1, \\
 B_1 &= t_1 b_1 + t_3 b_3, & B_3 &= \frac{1}{3} t_3 b_1, \\
 t_1 &= -k_2 \varepsilon^2 - 3mk_4 \varepsilon^4, & t_3 &= -3k_4 \varepsilon^4.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Из граничного условия (1) методом Н.И. Мусхелишвили [2] найдем

$$\begin{aligned}
 \varphi^*(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{-k} = \left(\frac{p-q+2ik}{2} - m \frac{p+q}{4}\right) \frac{1}{t} + A_{-1}^* \frac{1}{t} + A_{-3}^* \frac{1}{t^3}, \\
 \varkappa \varphi^*(t) &= \varkappa \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{-k} = \left(-\frac{p-q+2ik}{2} + m \frac{p+q}{4}\right) \frac{1}{t} + A_{-1}^{**} \frac{1}{t} + A_{-3}^{**} \frac{1}{t^3}, \\
 \psi^*(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{-k} = -\frac{p+q}{4} \left(\frac{1}{t} + \frac{(1+m^2)t}{t^2-m}\right) - \frac{t(1+mt^2)}{t^2-m} \varphi'^* + \overline{A_1^*} \frac{1}{t} + \overline{A_3^*} \frac{1}{t^3}, \\
 \psi^*(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{-k} = \frac{p+q}{4} \left(\varkappa \frac{1}{t} - \frac{(1+m^2)t}{t^2-m}\right) - \frac{t(1+mt^2)}{t^2-m} \varphi'^* - \overline{A_1^{**}} \frac{1}{t} - \overline{A_3^{**}} \frac{1}{t^3}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Выражение  $\frac{1}{t^2-m}$  представим в виде ряда

$$\frac{1}{t^2-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{t^{2(n+1)}}. \tag{6}$$

Таким образом, подставляем (2)–(4) и (6) в (5), приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях  $t$  в левой и правой части и получим, что коэффициенты  $A_1^{(r)}, A_3^{(r)}, B_1^{(r)}, B_3^{(r)}, a_1, a_3, b_1, b_3, b_5, \dots, b_{2n+1}$  определяются из следующей алгебраической системы:

- 1)  $a_1(1 - \varepsilon^2 k_2 m - \varepsilon^4 k_4 6m^2) + \overline{a_1}(-\varepsilon^2 k_2 m - \varepsilon^4 k_4(3 + 9m^2)) + a_3(-\varepsilon^4 k_4 3m) +$   
 $+ (\overline{a_3})(-\varepsilon^4 k_4 3m) + \overline{b_1}(-\varepsilon^2 k_2 - \varepsilon^4 k_4 6m) + \overline{b_3}(-\varepsilon^4 k_4 3) + A_1^{(r)}(-m) + \overline{A_1^{(r)}}(-m) +$   
 $+ A_3^{(r)}(-3m^2) + \overline{A_3^{(r)}}(-3(1 + 2m^2)) + \overline{B_1^{(r)}}(-1) + \overline{B_3^{(r)}}(-3m) =$   
 $= -m \frac{p+q}{4} + \frac{p-q+2ik}{2};$
- 2)  $a_1(-\varepsilon^4 k_4 m^3) + \overline{a_1}(-\varepsilon^4 k_4 3m) + a_3(1) + \overline{b_1}(-\varepsilon^4 k_4) + A_3^{(r)}(-m^3) + \overline{A_3^{(r)}}(-3m) +$   
 $+ \overline{B_3^{(r)}}(-1) = 0;$
- 3)  $(a_1 + \overline{a_1})(-\varepsilon^2 k_2(1 + m^2) - \varepsilon^4 k_4 9m(1 + m^2)) + (a_3 + \overline{a_3})(-\varepsilon^4 k_4 3(1 + m^2)) +$   
 $+ b_1 + (b_1 + \overline{b_1})(-\varepsilon^2 k_2 m - \varepsilon^4 k_4 6m^2) + (b_3 + \overline{b_3})(-\varepsilon^4 k_4 3m) +$   
 $+ (A_1^{(r)} + \overline{A_1^{(r)}})(-1 - m^2) + (A_3^{(r)} + \overline{A_3^{(r)}})(-6m(1 + m^2)) + (B_1^{(r)} + \overline{B_1^{(r)}})(-m) +$   
 $+ (B_3^{(r)} + \overline{B_3^{(r)}})(-3m^2) = -\frac{p+q}{2}(1 + m^2) + \frac{p-q+2ik}{2}m;$
- 4)  $a_1(-\varepsilon^2 k_2 m(1 + m^2) - \varepsilon^4 k_4 9m^2(1 + m^2)) + \overline{a_1}(-\varepsilon^2 k_2 m(1 + m^2) - \varepsilon^4 k_4(4 + 21m^2 + 9m^4)) +$   
 $+ (a_3 + \overline{a_3})(-\varepsilon^4 k_4 3m(1 + m^2)) + b_1(-\varepsilon^4 k_4 m^3) + \overline{b_1}(-\varepsilon^2 k_2(1 + m^2) - \varepsilon^4 k_4 3m(3 + 2m^2)) +$   
 $+ b_3 + \overline{b_3}(-\varepsilon^4 k_4 3(1 + m^2)) + (A_1^{(r)} + \overline{A_1^{(r)}})(-m(1 + m^2)) + A_3^{(r)}(-6m^2(1 + m^2)) +$   
 $+ \overline{A_3^{(r)}}(-4 - 18m^2 - 6m^4) + \overline{B_1^{(r)}}(-1 - m^2) + B_3^{(r)}(-m^3) + \overline{B_3^{(r)}}(-6m - 3m^3) =$   
 $= -\frac{p+q}{2}m(1 + m^2) + \frac{p-q+2ik}{2}(1 + m^2);$
- 5)  $a_1(-\varepsilon^2 k_2 m^2(1 + m^2) - \varepsilon^4 k_4 9m^3(1 + m^2)) + \overline{a_1}(-\varepsilon^2 k_2 m^2(1 + m^2) -$   
 $- \varepsilon^4 k_4 3m(4 + 3m^2)(1 + m^2)) + (a_3 + \overline{a_3})(-\varepsilon^4 k_4 3m^2(1 + m^2)) +$   
 $+ \overline{b_1}(-\varepsilon^2 k_2 m(1 + m^2) - \varepsilon^4 k_4(3 + 6m^2)(1 + m^2)) + \overline{b_3}(-\varepsilon^4 k_4 3m(1 + m^2)) +$   
 $+ b_5 + (A_1^{(r)} + \overline{A_1^{(r)}})(-m^2(1 + m^2)) + A_3^{(r)}(-6m^3(1 + m^2)) +$   
 $+ \overline{A_3^{(r)}}(-3m(4 + 2m^2)(1 + m^2)) + \overline{B_1^{(r)}}(-m(1 + m^2)) + \overline{B_3^{(r)}}(-3(1 + m^2)^2) =$   
 $= -\frac{p+q}{2}m^2(1 + m^2) + \frac{p-q+2ik}{2}m(1 + m^2);$
- 6)  $b_{2n+1} = mb_{2n-1}, \quad n \geq 3;$
- 7)  $a_1(\varkappa(1 - \varepsilon^2 k_2 m - \varepsilon^4 k_4 6m^2)) + \overline{a_1}(\varepsilon^2 k_2 m + \varepsilon^4 k_4 3(1 + 3m^2)) + a_3(-\varepsilon^4 k_4 3\varkappa m) +$   
 $+ \overline{a_3}(\varepsilon^4 k_4 3m) + \overline{b_1}(\varepsilon^2 k_2 + \varepsilon^4 k_4 6m) + \overline{b_3}(\varepsilon^4 k_4 3) + A_1^{(r)}(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}}\varkappa^{(r)}m) + \overline{A_1^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}m) +$   
 $+ A_3^{(r)}(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}}3\varkappa^{(r)}m^2) + \overline{A_3^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}3(1 + 2m^2)) + \overline{B_1^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}) + \overline{B_3^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}3m) =$   
 $= \frac{p+q}{4}m - \frac{p-q+2ik}{2};$
- 8)  $a_1(-\varepsilon^4 k_4 \varkappa m^3) + \overline{a_1}(\varepsilon^4 k_4 3m) + a_3(\varkappa) + \overline{b_1}(\varepsilon^4 k_4) + A_3^{(r)}(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}}\varkappa^{(r)}m^3) +$   
 $+ \overline{A_3^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}3m) + \overline{B_3^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}) = 0;$
- 9)  $a_1(-\varepsilon^2 k_2(1 + m^2) - \varepsilon^4 k_4 9m(1 + m^2)) + \overline{a_1}(\varepsilon^2 k_2(\varkappa - m^2) + \varepsilon^4 k_4(6\varkappa m - 3m - 9m^3)) +$   
 $+ a_3(-\varepsilon^4 k_4 3(1 + m^2)) + \overline{a_3}(\varepsilon^4 k_4 3(\varkappa - m^2)) + b_1 + (b_1 + \overline{b_1})(-\varepsilon^2 k_2 m - \varepsilon^4 k_4 6m^2) +$   
 $+ (b_3 + \overline{b_3})(-\varepsilon^4 k_4 3m) + A_1^{(r)}(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}} - m^2) + \overline{A_1^{(r)}}(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}\varkappa^{(r)} - m^2) +$

$$\begin{aligned}
 &+ A_3^{(r)}\left(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}}3m(2+m^2) - 3m^3\right) + \overline{A_3^{(r)}}\left(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}3\chi^{(r)}m - 3m(1+2m^2)\right) + B_1^{(r)}\left(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}}m\right) + \\
 &+ \overline{B_1^{(r)}}(-m) + B_3^{(r)}\left(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}}3m^2\right) + \overline{B_3^{(r)}}(-3m^2) = \frac{p+q}{4}(\chi - 1 - 2m^2) + \frac{p-q+2ik}{2}m; \\
 10) &a_1(-\varepsilon^2 k_2 m(1+m^2) - \varepsilon^4 k_4 9m^2(1+m^2)) + \overline{a_1}(-\varepsilon^2 k_2 m(1+m^2) + \\
 &+ \varepsilon^4 k_4 (\chi - 3 - 21m^2 - 9m^4)) + (a_3 + \overline{a_3})(-\varepsilon^4 k_4 3m(1+m^2)) + b_1(-\varepsilon^4 k_4 m^3) + \\
 &+ \overline{b_1}(-\varepsilon^2 k_2(1+m^2) - \varepsilon^4 k_4 3m(3+2m^2)) + b_3 + \overline{b_3}(-\varepsilon^4 k_4 3(1+m^2)) + \\
 &+ (A_1^{(r)} + \overline{A_1^{(r)}})(-m(1+m^2)) + A_3^{(r)}\left(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}}3m^2 - 3m^2 - 6m^4\right) + \\
 &+ \overline{A_3^{(r)}}\left(\frac{\mu}{\mu^{(r)}}\chi^{(r)} - 3 - 18m^2 - 6m^4\right) + \overline{B_1^{(r)}}(-1-m^2) + B_3^{(r)}\left(-\frac{\mu}{\mu^{(r)}}m^3\right) + \\
 &+ \overline{B_3^{(r)}}(-3m(2+m^2)) = \frac{p+q}{2}(-m(1+m^2)) + \frac{p-q+2ik}{2}(1+m^2).
 \end{aligned}$$

Стоит отметить, что данная система также подходит для периодических задач с отверстиями, для этого следует занулить коэффициенты с индексом  $^{(r)}$ , и непериодической задачи с одним концентратором напряжений, тогда необходимо занулить  $\varepsilon$ . Помимо этого ее можно использовать для задач с круглыми отверстиями или включениями, при этом зануляя  $m$ , и задач с узкими щелями, приравнявая  $m$  к единице и зануляя коэффициенты с индексом  $r$ .

Результат сверен со справочником [9, с. 90] для случая отверстий. На рис. 2 приведен для двоякопериодической задачи с круглыми отверстиями и квадратной ячейкой периодичности растяжения по оси  $y$  с напряжением  $q$  сравнительный график зависимости коэффициента концентраций напряжений  $k$  от отношения расстояния между соседними отверстиями  $L$  к их диаметру  $D$ . Сплошной линией обозначен результат данной работы, а пунктирной — примерный график из справочника.

**Частный случай.** Решим следующую задачу для случая  $\alpha = 45^\circ$ ,  $m = 0.5$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{3.75}$ ,  $\frac{E^{(r)}}{E} = 100$ ,  $\nu = \nu^{(r)} = 0.3$  (расстояние между включениями равно одной четвертой большой оси эллипса):

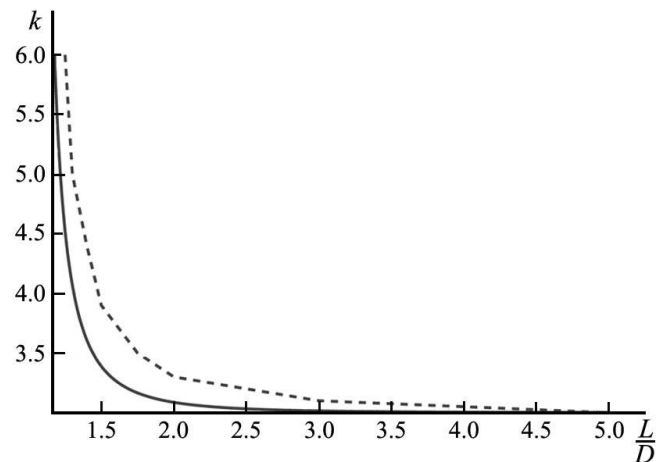


Рис. 2

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -0.18663p + 0.32167q - 0.36839ik, & b_{2n+1} &= 0.5b_{2n-1}, \quad n \geq 3, \\
 a_3 &= 0.00185p - 0.00629q - 0.00112ik, & A_1^{(r)} &= 0.64336p + 0.15623q + 26.2699ik, \\
 b_1 &= 0.02605p + 0.31142q + 0.5ik, & A_3^{(r)} &= 0.00484p - 0.00765q + 0.03722ik, \\
 b_3 &= -0.38364p + 0.23171q - 0.47526ik, & B_1^{(r)} &= -1.19093p + 0.78108q + 1.32458ik, \\
 b_5 &= -0.18783p + 0.09932q - 0.23445ik, & B_3^{(r)} &= -0.0016p - 0.00715q - 0.04995ik.
 \end{aligned}$$

Так как переменных  $b_n$  бесконечное количество, найдем, используя формулу Колосова–Мусхелишвили, значения напряжений в семи точках и аппроксимируем их функцией 6-й степени,  $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= (3.8482 - 1.3695\theta - 21.5938\theta^2 + 49.288\theta^3 - 50.0568\theta^4 + 24.4716\theta^5 - 4.6226\theta^6)p + \\
 &+ (0.8694 + 0.6656\theta + 7.712\theta^2 - 24.1332\theta^3 + 25.611\theta^4 - 12.205\theta^5 + 2.2406\theta^6)q + \\
 &+ (15.7195\theta - 46.8183\theta^2 + 63.9011\theta^3 - 47.5299\theta^4 + 18.484\theta^5 - 2.945\theta^6)k; \\
 \sigma_{\theta\theta} &= (-0.4386 - 0.2498\theta - 1.516\theta^2 + 8.2657\theta^3 - 9.2277\theta^4 + 4.2923\theta^5 - 0.7648\theta^6)p + \\
 &+ (-1.3494 + 0.3226\theta + 6.3728\theta^2 - 10.8784\theta^3 + 10.4371\theta^4 - 5.2846\theta^5 + 1.0353\theta^6)q + \\
 &+ (23.2402\theta - 71.124\theta^2 + 97.4957\theta^3 - 72.2384\theta^4 + 28.0379\theta^5 - 4.4751\theta^6)k;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\theta} &= (-9.285\theta + 33.36478\theta^2 - 46.8881\theta^3 + 33.9758\theta^4 - 12.93\theta^5 + 2.0499\theta^6)p + \\
&+ (7.3303\theta - 16.1288\theta^2 + 20.7932\theta^3 - 16.5178\theta^4 + 6.7798\theta^5 - 1.1039\theta^6)q + \\
&+ (1.6748 - 1.9513\theta - 27.5247\theta^2 + 69.9062\theta^3 - 72.2038\theta^4 + 34.9643\theta^5 - 6.5353\theta^6)k; \\
\sigma_{rr}^{(r)} &= (3.8206 - 1.2893\theta - 20.378\theta^2 + 45.9499\theta^3 - 46.5825\theta^4 + 22.8068\theta^5 - 4.3146\theta^6)p + \\
&+ (0.8808 + 0.5667\theta + 6.3171\theta^2 - 20.2944\theta^3 + 21.623\theta^4 - 10.2992\theta^5 + 1.889\theta^6)q + \\
&+ (16.8686\theta - 50.6579\theta^2 + 69.2211\theta^3 - 51.4282\theta^4 + 19.9978\theta^5 - 3.1909\theta^6)k; \\
\sigma_{\theta\theta}^{(r)} &= (2.433 + 1.2746\theta + 14.4112\theta^2 - 46.5289\theta^3 + 49.5741\theta^4 - 23.5891\theta^5 + 4.3228\theta^6)p + \\
&+ (3.1376 - 0.5835\theta - 12.2185\theta^2 + 19.7297\theta^3 - 18.6806\theta^4 + 9.539\theta^5 - 1.8847\theta^6)q + \\
&+ (-15.6897\theta + 50.6606\theta^2 - 69.9841\theta^3 + 51.3596\theta^4 - 19.7593\theta^5 + 3.14\theta^6)k; \\
\sigma_{r\theta}^{(r)} &= (-8.5605\theta + 30.9407\theta^2 - 43.4672\theta^3 + 31.4211\theta^4 - 11.9282\theta^5 + 1.8873\theta^6)p + \\
&+ (6.4655\theta - 13.3414\theta^2 + 16.8922\theta^3 - 13.6024\theta^4 + 5.6383\theta^5 - 0.9197\theta^6)q + \\
&+ (1.843 - 2.1439\theta - 29.8495\theta^2 + 76.0871\theta^3 - 78.6582\theta^4 + 38.0952\theta^5 - 7.1207\theta^6)k.
\end{aligned}$$

По найденным напряжениям составляем тензоры концентрации напряжений для матрицы и для включения:

$$\begin{aligned}
A_{1111} &= 3.8482 - 1.3695\theta - 21.5938\theta^2 + 49.288\theta^3 - 50.0568\theta^4 + 24.4716\theta^5 - 4.6226\theta^6; \\
A_{1122} &= 0.8694 + 0.6656\theta + 7.712\theta^2 - 24.1332\theta^3 + 25.611\theta^4 - 12.205\theta^5 + 2.2406\theta^6; \\
A_{1112} &= 15.7195\theta - 46.8183\theta^2 + 63.9011\theta^3 - 47.5299\theta^4 + 18.484\theta^5 - 2.945\theta^6; \\
A_{2211} &= -0.4386 - 0.2498\theta - 1.516\theta^2 + 8.2657\theta^3 - 9.2277\theta^4 + 4.2923\theta^5 - 0.7648\theta^6; \\
A_{2222} &= -1.3494 + 0.3226\theta + 6.3728\theta^2 - 10.8784\theta^3 + 10.4371\theta^4 - 5.2846\theta^5 + 1.0353\theta^6; \\
A_{2212} &= 23.2402\theta - 71.124\theta^2 + 97.4957\theta^3 - 72.2384\theta^4 + 28.0379\theta^5 - 4.4751\theta^6; \\
A_{1211} &= -9.285\theta + 33.36478\theta^2 - 46.8881\theta^3 + 33.9758\theta^4 - 12.93\theta^5 + 2.0499\theta^6; \\
A_{1222} &= 7.3303\theta - 16.1288\theta^2 + 20.7932\theta^3 - 16.5178\theta^4 + 6.7798\theta^5 - 1.1039\theta^6; \\
A_{1212} &= 1.6748 - 1.9513\theta - 27.5247\theta^2 + 69.9062\theta^3 - 72.2038\theta^4 + 34.9643\theta^5 - 6.5353\theta^6; \\
A_{1111}^{(r)} &= 3.8206 - 1.2893\theta - 20.378\theta^2 + 45.9499\theta^3 - 46.5825\theta^4 + 22.8068\theta^5 - 4.3146\theta^6; \\
A_{1122}^{(r)} &= 0.8808 + 0.5667\theta + 6.3171\theta^2 - 20.2944\theta^3 + 21.623\theta^4 - 10.2992\theta^5 + 1.889\theta^6; \\
A_{1112}^{(r)} &= 16.8686\theta - 50.6579\theta^2 + 69.2211\theta^3 - 51.4282\theta^4 + 19.9978\theta^5 - 3.1909\theta^6; \\
A_{2211}^{(r)} &= 2.433 + 1.2746\theta + 14.4112\theta^2 - 46.5289\theta^3 + 49.5741\theta^4 - 23.5891\theta^5 + 4.3228\theta^6; \\
A_{2222}^{(r)} &= 3.1376 - 0.5835\theta - 12.2185\theta^2 + 19.7297\theta^3 - 18.6806\theta^4 + 9.539\theta^5 - 1.8847\theta^6; \\
A_{2212}^{(r)} &= -15.6897\theta + 50.6606\theta^2 - 69.9841\theta^3 + 51.3596\theta^4 - 19.7593\theta^5 + 3.14\theta^6; \\
A_{1211}^{(r)} &= -8.5605\theta + 30.9407\theta^2 - 43.4672\theta^3 + 31.4211\theta^4 - 11.9282\theta^5 + 1.8873\theta^6; \\
A_{1222}^{(r)} &= 6.4655\theta - 13.3414\theta^2 + 16.8922\theta^3 - 13.6024\theta^4 + 5.6383\theta^5 - 0.9197\theta^6; \\
A_{1212}^{(r)} &= 1.843 - 2.1439\theta - 29.8495\theta^2 + 76.0871\theta^3 - 78.6582\theta^4 + 38.0952\theta^5 - 7.1207\theta^6.
\end{aligned}$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбачев В.И., Михайлов А.Л. Тензор концентрации напряжений для случая N-мерного упругого пространства со сферическим включением // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993. № 2. 78–83.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1966.
3. Мальков В.М., Малькова Ю.В. Деформация пластины с упругим эллиптическим включением // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 2015. **2(60)**, вып. 4. 617–632.
4. Григolloк Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970.
5. Натанзон В.Я. О напряжениях в растягиваемой пластинке, ослабленной одинаковыми отверстиями, расположенными в шахматном порядке // Матем. сб. 1935. **42**, № 5. 617–636.
6. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968.
7. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями и выступами. Киев: Вища школа, Головное изд-во, 1975.
8. Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. Math. and Phys. Sci. 1957. **241**, N 1226. 376–396.
9. Савин Г.Н., Тульчий В.И. Справочник по концентрации напряжений. Киев: Вища школа, 1976.

Поступила в редакцию  
31.08.2022