

8. Козлов В.В., Онищенко Д.А. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Докл. АН СССР. 1982. 266. 1298–1300.
9. Онищенко Д.А. Приведение к нормальной форме уравнений канонической системы, зависящей от параметра // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1982. № 3. 78–81.
10. Гаджиев М.М., Кулешов А.С. О движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2022. № 3. 58–68.

Поступила в редакцию
01.07.2022

УДК 517.911.5

О ДВИЖЕНИИ ДВУХ СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРОВ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОСРЕДСТВОМ СИЛЫ СУХОГО ТРЕНИЯ

Е. Е. Борисенко¹

Рассматривается движение двух соприкасающихся цилиндров, взаимодействующих посредством силы сухого трения. Для исследования системы с разрывной правой частью используется теория Филиппова. Доказана правосторонняя единственность решений системы, построен фазовый портрет, изучены его возможные бифуркации. Полученные результаты позволяют охарактеризовать движения исходной механической системы, в частности установить условия заклинивания цилиндров и стационарного вращения.

Ключевые слова: дифференциальные включения, регуляризация по Филиппову, системы с трением.

This paper concerned with the motion of two contacting cylinders, there is dry friction between them. Filippov's theory of discontinuous differential equations is used to study ODE system. The forward uniqueness of the solution is proven, the phase portrait is drawn, its bifurcation is studied. These results allow us to describe the motions of the given mechanical system, in particular, to describe the seizing and permanent rotation conditions.

Key words: differential inclusions, Filippov's regularization, systems with friction.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-2-6

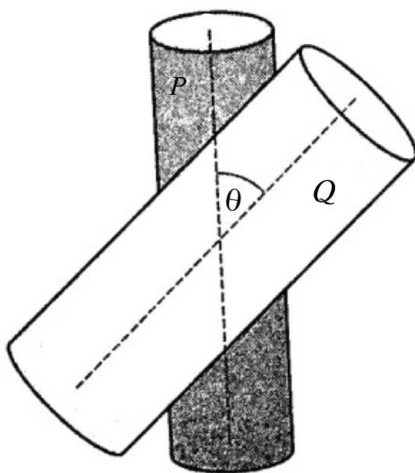


Рис. 1. Механическая система

1. Постановка задачи и математическая модель.

Рассмотрим механическую систему, представленную на рис. 1.

Два круглых цилиндра P и Q радиусов r_P , r_Q прижаты друг к другу с силой N , коэффициент сухого трения между цилиндрами равен k . Оси цилиндров неподвижны, и угол между ними равен $\theta \in (0; \pi/2]$. Цилиндры поворачиваются вокруг своих осей под действием приложенных к ним моментов сил M_P , M_Q соответственно. Моменты направлены вдоль осей цилиндров. Масса каждого цилиндра распределена осесимметрично. Моменты инерции цилиндров относительно осей равны соответственно J_P , J_Q .

Изучим движения этой системы и построим ее фазовый портрет в терминах ω_P , ω_Q — угловых скоростей вращения цилиндров вокруг своих осей.

Движение в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ описывается следующей системой дифференциальных уравнений (подробный вывод приведен в п. 6.1):

¹Борисенко Евгений Егорович — студ. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: yevhenii16@yandex.ru.

Borisenko Evgenii Egorovich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.

$$\begin{cases} J_P \dot{\omega}_P = M_P - \frac{kNr_P(\omega_P r_P + \omega_Q r_Q \cos \theta)}{\sqrt{\omega_P^2 r_P^2 + \omega_Q^2 r_Q^2 + 2\omega_P r_P \omega_Q r_Q \cos \theta}}, \\ J_Q \dot{\omega}_Q = M_Q - \frac{kNr_Q(\omega_P r_P \cos \theta + \omega_Q r_Q)}{\sqrt{\omega_P^2 r_P^2 + \omega_Q^2 r_Q^2 + 2\omega_P r_P \omega_Q r_Q \cos \theta}}. \end{cases} \quad (1)$$

Чтобы доопределить систему во всем пространстве \mathbb{R}^2 , воспользуемся приведенным в [1, 2] определением решения дифференциального уравнения с разрывной правой частью.

Определение [1, 2]. Вектор-функция $\bar{x}(t)$, определенная на интервале (t_1, t_2) , называется решением системы

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{x}),$$

если она абсолютно непрерывна и при почти всех $t \in (t_1, t_2)$ верно включение

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\mu(N)=0} \text{conv}(\bar{f}(t, U(\bar{x}(t), \varepsilon)) \setminus N),$$

где $\text{conv} A$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее подмножество A линейного пространства; $U(\bar{x}, \varepsilon)$ — ε -окрестность точки \bar{x} .

Это определение обладает простым механическим смыслом: коэффициент трения покоя совпадает с коэффициентом трения скольжения.

2. Приведение системы (1) к градиентной системе. Сделаем в системе (1) следующую замену переменных:

$$u_P = \omega_P r_P \sqrt{m_P}, \quad u_Q = \omega_Q r_Q \sqrt{m_Q},$$

где $m_P = \frac{J_P}{kNr_P^2}$, $m_Q = \frac{J_Q}{kNr_Q^2}$. Введем обозначения

$$F_P = \frac{M_P}{kNr_P}, \quad F_Q = \frac{M_Q}{kNr_Q}.$$

Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{u}_P = \frac{F_P}{\sqrt{m_P}} - \frac{1}{\sqrt{m_P}} \frac{\frac{u_P}{\sqrt{m_P}} + \frac{u_Q}{\sqrt{m_Q}} \cos \theta}{\sqrt{\left(\frac{u_P}{\sqrt{m_P}}\right)^2 + \left(\frac{u_Q}{\sqrt{m_Q}}\right)^2 + 2\frac{u_P u_Q}{\sqrt{m_P m_Q}} \cos \theta}}, \\ \dot{u}_Q = \frac{F_Q}{\sqrt{m_Q}} - \frac{1}{\sqrt{m_Q}} \frac{\frac{u_P}{\sqrt{m_P}} \cos \theta + \frac{u_Q}{\sqrt{m_Q}}}{\sqrt{\left(\frac{u_P}{\sqrt{m_P}}\right)^2 + \left(\frac{u_Q}{\sqrt{m_Q}}\right)^2 + 2\frac{u_P u_Q}{\sqrt{m_P m_Q}} \cos \theta}}. \end{cases} \quad (2)$$

Фазовый портрет в терминах u_P и u_Q от выполненного в терминах угловых скоростей отличается лишь “масштабом” по осям. Система (2) — гладкая система дифференциальных уравнений на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, интегрируемая в квадратурах.

Рассмотрим следующую функцию:

$$G = F_P \frac{u_P}{\sqrt{m_P}} + F_Q \frac{u_Q}{\sqrt{m_Q}} - \sqrt{\left(\frac{u_P}{\sqrt{m_P}}\right)^2 + \left(\frac{u_Q}{\sqrt{m_Q}}\right)^2 + 2\frac{u_P u_Q}{\sqrt{m_P m_Q}} \cos \theta}.$$

Легко видеть, что систему (2) в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ можно переписать в виде

$$\dot{\bar{u}} = \text{grad } G,$$

где $\bar{u} = (u_P, u_Q)$, $\text{grad } G = \left(\frac{\partial G}{\partial u_P}, \frac{\partial G}{\partial u_Q}\right)$. Таким образом, фазовый портрет в терминах переменных u_P, u_Q в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ является векторным полем $\text{grad } G$, т.е. фазовые кривые нормальны к линиям уровня функции G на плоскости (u_P, u_Q) .

Замечание 1. Система (2) является градиентной системой — объектом, исследуемым во многих работах (см., например, [3, 4]). В некоторых публикациях (например, в [4]) даже делают обобщения

на случаи, когда градиент нельзя задать как набор первых производных по координатам, определяя градиент для произвольной выпуклой функции.

В настоящей работе мы не будем пользоваться такими определениями, поскольку они не соотносятся с определением решения с разрывной правой частью из [1, 2].

3. Исследование линий уровня функции G . Составим уравнение линии уровня G :

$$F_P \frac{u_P}{\sqrt{m_P}} + F_Q \frac{u_Q}{\sqrt{m_Q}} - \sqrt{\left(\frac{u_P}{\sqrt{m_P}}\right)^2 + \left(\frac{u_Q}{\sqrt{m_Q}}\right)^2} + 2 \frac{u_P u_Q}{\sqrt{m_P m_Q}} \cos \theta = c.$$

Преобразовав это уравнение, получим

$$g(u_P, u_Q) = \frac{1 - F_P^2}{m_P} u_P^2 + \frac{1 - F_Q^2}{m_Q} u_Q^2 + 2 \frac{\cos \theta - F_P F_Q}{\sqrt{m_P m_Q}} u_P u_Q + 2 \frac{F_P c}{\sqrt{m_P}} u_P + 2 \frac{F_Q c}{\sqrt{m_Q}} u_Q - c^2 = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) не является уравнением второго порядка относительно u_P и u_Q , когда

$$F_P^2 = 1, \quad F_Q^2 = 1, \quad F_P F_Q = \cos \theta \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0,$$

что не удовлетворяет условию $\theta \in (0, \pi/2]$, а значит, это уравнение всегда задает кривую второго порядка.

Чтобы описать линии уровня функции G , к уравнению (3) следует добавить неравенство

$$F_P \frac{u_P}{\sqrt{m_P}} + F_Q \frac{u_Q}{\sqrt{m_Q}} - c \geq 0. \quad (4)$$

Таким образом, линия уровня $G = c$ задается системой

$$\begin{cases} \frac{1 - F_P^2}{m_P} u_P^2 + \frac{1 - F_Q^2}{m_Q} u_Q^2 + 2 \frac{\cos \theta - F_P F_Q}{\sqrt{m_P m_Q}} u_P u_Q + 2 \frac{F_P c}{\sqrt{m_P}} u_P + 2 \frac{F_Q c}{\sqrt{m_Q}} u_Q - c^2 = 0, \\ F_P \frac{u_P}{\sqrt{m_P}} + F_Q \frac{u_Q}{\sqrt{m_Q}} - c \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Для определения типа кривых воспользуемся ортогональными инвариантами кривых второго порядка

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{1 - F_P^2}{m_P} & \frac{\cos \theta - F_P F_Q}{\sqrt{m_P m_Q}} \\ \frac{\cos \theta - F_P F_Q}{\sqrt{m_P m_Q}} & \frac{1 - F_Q^2}{m_Q} \end{vmatrix} = \frac{\sin^2 \theta - (F_P^2 - 2 \cos \theta F_P F_Q + F_Q^2)}{m_P m_Q},$$

$$s = \frac{1 - F_P^2}{m_P} + \frac{1 - F_Q^2}{m_Q},$$

$$\Delta = c^2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1 - F_P^2}{m_P} & \frac{\cos \theta - F_P F_Q}{\sqrt{m_P m_Q}} & \frac{F_P}{\sqrt{m_P}} \\ \frac{\cos \theta - F_P F_Q}{\sqrt{m_P m_Q}} & \frac{1 - F_Q^2}{m_Q} & \frac{F_Q}{\sqrt{m_Q}} \\ \frac{F_P}{\sqrt{m_P}} & \frac{F_Q}{\sqrt{m_Q}} & -1 \end{vmatrix} = -c^2 \frac{\sin^2 \theta}{m_P m_Q} \leq 0,$$

причем $\Delta = 0 \Leftrightarrow c = 0$.

Эти параметры позволяют сформулировать следующую лемму.

Лемма 1. Система (5) при определенных значениях параметра c допускает упрощение.

1. В случае $\delta > 0$ система при $c > 0$ задает пустое множество, при $c \leq 0$ система эквивалентна только уравнению (3).

2. В случае $\delta = 0$ система при $c > 0$ задает пустое множество, при $c < 0$ система эквивалентна только уравнению (3), при $c = 0$ система задает луч, исходящий из начала координат.

3. В случае $\delta < 0$ система при $c = 0$ задает пару лучей, исходящих из начала координат, а при $c \neq 0$ — одну из ветвей гиперболы, задаваемой уравнением (3), причем ее асимптоты сонаправлены с лучами, задаваемыми при $c = 0$.

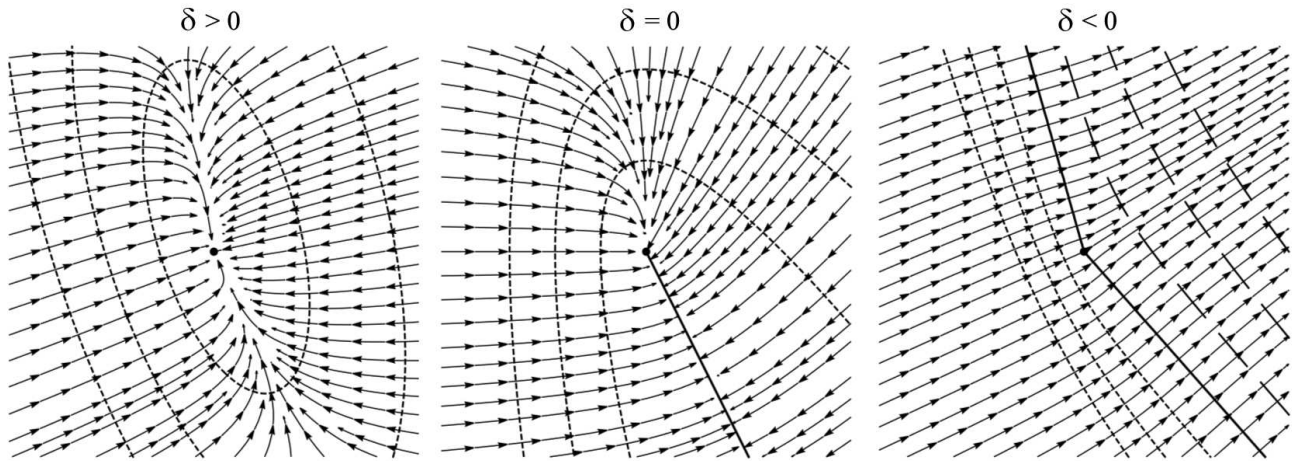


Рис. 2. Линии уровня функции G и фазовый портрет системы (2)

Эта лемма позволяет классифицировать линии уровня функции G ; пунктирные линии на рис. 2 наглядно демонстрируют утверждение леммы. Доказательство леммы приведено в п. 6.2.

Теорема 1. Условие на знак δ имеет следующий физический смысл:

- 1) $\delta > 0$ – положением равновесия системы (1) является только начало координат;
- 2) $\delta = 0$ – положениями равновесия системы (1) являются только начало координат и точки луча, исходящего из начала координат, причем в терминах переменных u_P , u_Q этот луч соответствует $G = 0$;
- 3) $\delta < 0$ – положений равновесия нет.

Доказательство. Изучим вопрос о том, когда момент силы сухого трения может уравновесить моменты, приложенные к цилиндрам. Для этого вернемся к исходной системе (1). Представим силу трения в виде $\vec{f}_{\text{тр}} = f_P \vec{e}_P + f_Q \vec{e}_Q$, где f_P, f_Q – известные нам функции угловых скоростей, если ω_P и ω_Q не равны нулю одновременно; \vec{e}_P и \vec{e}_Q – единичные векторы вдоль осей цилиндров P и Q соответственно².

Проекция моментов сил, приложенных к цилиндру P , на его ось:

$$M_P + \left(\left[-r_P \frac{[\vec{e}_P, \vec{e}_Q]}{\sin \theta}, f_P \vec{e}_P + f_Q \vec{e}_Q \right], \vec{e}_P \right) = M_P + r_P \sin \theta f_Q.$$

Для цилиндра Q аналогично получаем $M_Q - r_Q \sin \theta f_P$.

Эти моменты равны нулю, если выполнено условие

$$\begin{cases} f_P = -\frac{M_P}{r_P \sin \theta}, \\ f_Q = \frac{M_Q}{r_Q \sin \theta}. \end{cases}$$

При этом модуль вектора $\vec{f}_{\text{тр}}$ не превосходит kN , если $\omega_P = \omega_Q = 0$, т.е.

$$f_P^2 + 2f_P f_Q \cos \theta + f_Q^2 \leq (kN)^2,$$

и равен kN в противном случае.

Подставим в неравенство для модуля силы трения условие равенства моментов нулю:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{M_P}{r_P \sin \theta} \right)^2 - 2 \frac{M_P}{r_P \sin \theta} \frac{M_Q}{r_Q \sin \theta} \cos \theta + \left(\frac{M_Q}{r_Q \sin \theta} \right)^2 \leq (kN)^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{M_P}{r_P kN} \right)^2 - 2 \frac{M_P}{r_P kN} \frac{M_Q}{r_Q kN} \cos \theta + \left(\frac{M_Q}{r_Q kN} \right)^2 \leq \sin^2 \theta \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow F_P^2 - 2F_P F_Q \cos \theta + F_Q^2 \leq \sin^2 \theta \Leftrightarrow 0 \leq \delta. \end{aligned}$$

²Векторы выбраны так, что угол между ними равен θ (см. вывод уравнений (1) в п. 6.1).

В итоге имеем:

1) $\delta > 0$ — сила трения должна быть по модулю меньше kN , а значит, это сила трения покоя, т.е. $\omega_P = \omega_Q = 0 \Leftrightarrow u_P = u_Q = 0$;

2) $\delta < 0$ — требуемая сила трения больше максимально возможной, поэтому равновесие невозможно;

3) $\delta = 0$ — сила трения, необходимая для равенства нулю моментов, равна по модулю максимальному модулю силы трения покоя, совпадающему с модулем силы трения скольжения. В итоге положениями равновесия может быть начало координат и, возможно, некоторое множество ненулевых точек, которое в силу инвариантности правой части системы (1) относительно замены $\omega_P \rightarrow \lambda\omega_P$, $\omega_Q \rightarrow \lambda\omega_Q$, где λ — произвольное положительное число, представляет собой объединение лучей, исходящих из начала координат.

Чтобы доказать, что луч единственный, обратимся к функции G . Ее производная в силу системы равна квадрату модуля ее вектора градиента и поэтому неотрицательна. Поскольку по лемме 1 при $\delta = 0$ функция G неотрицательна, на луче $G = 0$, $(u_P, u_Q) \neq \bar{0}$ производная G в силу системы равна нулю, а значит, и векторное поле системы (2) на этом луче нулевое.

Из определения силы сухого трения очевиден тот факт, что начало координат должно являться положением равновесия при $\delta \geq 0$. Далее мы подробно изучим поведение решения системы (2) при попадании в начало координат.

4. Исследования поведения системы (2) в нуле.

4.1. Правосторонняя единственность решений системы (2). Докажем, пользуясь следующим утверждением, правостороннюю единственность решений системы (2).

Теорема 2 [1]. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{x})$$

обладает правосторонней единственностью, если функция $\bar{f}(t, \bar{x})$ ограничена и при этом для почти всех (t, \bar{x}) и (t, \bar{z}) , где $|\bar{x} - \bar{z}| < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$, имеем

$$(\bar{x} - \bar{z}) (\bar{f}(t, \bar{x}) - \bar{f}(t, \bar{z})) \leq B |\bar{x} - \bar{z}|^2, \quad B = \text{const}.$$

Введем обозначения

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_P \\ u_Q \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_P} & \frac{\cos \theta}{\sqrt{m_P m_Q}} \\ \frac{\cos \theta}{\sqrt{m_P m_Q}} & \frac{1}{m_Q} \end{pmatrix}.$$

С помощью этих обозначений можно переписать градиент функции G следующим образом:

$$\text{grad } G = \begin{pmatrix} \frac{F_P}{\sqrt{m_P}} \\ \frac{F_Q}{\sqrt{m_Q}} \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{(A\bar{u}, \bar{u})}} A\bar{u}.$$

Напомним, что $\text{grad } G$ является правой частью рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (2), поэтому левая часть проверяемого неравенства равна

$$\begin{aligned} (\bar{x} - \bar{z}) (\text{grad } G(\bar{x}) - \text{grad } G(\bar{z})) &= (\bar{x} - \bar{z}) \left(\frac{1}{\sqrt{(A\bar{z}, \bar{z})}} A\bar{z} - \frac{1}{\sqrt{(A\bar{x}, \bar{x})}} A\bar{x} \right) = \\ &= \left(A(\bar{x} - \bar{z}), \left(\frac{1}{\sqrt{(A\bar{z}, \bar{z})}} \bar{z} - \frac{1}{\sqrt{(A\bar{x}, \bar{x})}} \bar{x} \right) \right) = \frac{(A\bar{x}, \bar{z})}{\sqrt{(A\bar{z}, \bar{z})}} - \frac{(A\bar{z}, \bar{z})}{\sqrt{(A\bar{z}, \bar{z})}} - \frac{(A\bar{x}, \bar{x})}{\sqrt{(A\bar{x}, \bar{x})}} + \frac{(A\bar{z}, \bar{x})}{\sqrt{(A\bar{x}, \bar{x})}}. \end{aligned}$$

Матрица A — положительно определенная, поэтому с ее помощью можно задать скалярное произведение в \mathbb{R}^2 (и соответствующую сопряженную норму). Следовательно, справедливо неравенство Коши–Буняковского

$$(A\bar{x}, \bar{z}) \leq \sqrt{(A\bar{z}, \bar{z})} \cdot \sqrt{(A\bar{x}, \bar{x})}.$$

В итоге имеем

$$(\bar{x} - \bar{z}) (\text{grad } G(\bar{x}) - \text{grad } G(\bar{z})) \leq \sqrt{(A\bar{x}, \bar{x})} - \sqrt{(A\bar{z}, \bar{z})} - \sqrt{(A\bar{x}, \bar{x})} + \sqrt{(A\bar{z}, \bar{z})} = 0.$$

Таким образом, мы для любых ненулевых $\bar{x}, \bar{z} \in \mathbb{R}^2$ получаем

$$(\bar{x} - \bar{z}) (\text{grad } G(\bar{x}) - \text{grad } G(\bar{z})) \leq B |\bar{x} - \bar{z}|^2,$$

где B — произвольная положительная константа, т.е. система (2) удовлетворяет условиям теоремы 2, а значит, система (2) обладает правосторонней единственностью.

4.2. О поведении решения после попадания в начало координат. Пользуясь выбранным определением решения дифференциального уравнения с разрывной правой частью, легко понять, что в случае $\delta \geq 0$ решения, попадая в начало координат, остаются в начале координат, а в случае $\delta < 0$ — выходят из начала координат по решению-лучу — решению, на котором отношение угловых скоростей постоянно (более подробно — в п. 6.3). Это очевидным образом следует из доказанных свойств линий уровня функции G и правосторонней единственности решений системы (2), а также непрерывности правой части системы (2) в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Напомним, что для решения $\bar{x}(t)$ дифференциального уравнения с разрывной правой частью верно включение

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\mu(N)=0} \text{conv} (\bar{f}(t, U(\bar{x}(t), \varepsilon)) \setminus N),$$

которое заменяется на равенство

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{f}(t, \bar{x}(t)),$$

если $\bar{x}(t)$ является точкой непрерывности функции \bar{f} .

При $\delta \leq 0$ в сколь угодно малой окрестности начала координат содержится вместе с некоторой своей окрестностью точка \bar{u}_0 решения-луча³, исходящего из начала координат в случае $\delta < 0$ и стационарного⁴ в случае $\delta = 0$. Выпуклое замыкание подмножества содержится в выпуклом замыкании всего множества, поэтому $\bigcap_{\mu(N)=0} \text{conv} (\text{grad } G(U(\bar{0}, \varepsilon)) \setminus N)$ содержит

$$\bigcap_{\xi > 0} \bigcap_{\mu(N)=0} \text{conv} (\text{grad } G(U(\bar{u}_0, \xi)) \setminus N).$$

Но точка \bar{u}_0 — точка непрерывности $\text{grad } G$, поэтому

$$\begin{aligned} \bigcap_{\xi > 0} \bigcap_{\mu(N)=0} \text{conv} (\text{grad } G(U(\bar{u}_0, \xi)) \setminus N) &= \text{grad } G(\bar{u}_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\mu(N)=0} \text{conv} (\text{grad } G(U(\bar{0}, \varepsilon)) \setminus N) &\ni \text{grad } G(\bar{u}_0). \end{aligned}$$

Система (2) обладает правосторонней единственностью, и, таким образом, в случае $\delta \leq 0$ утверждение доказано.

Для $\delta > 0$ можно провести аналогичные рассуждения, только в этом случае мы покажем, что множество

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\mu(N)=0} \text{conv} (\text{grad } G(U(\bar{0}, \varepsilon)) \setminus N)$$

содержит два противоположных вектора, из чего следует, что оно должно содержать и нулевой вектор, поскольку является выпуклым множеством.

Действительно, в случае $\delta > 0$ линиями уровня функции G являются эллипсы. Так как эллипс симметричен относительно своего центра, то поле нормалей к нему состоит из противоположных векторов. В силу непрерывности функции G в \mathbb{R}^2 в любой сколь угодно малой окрестности начала координат содержится хотя бы один эллипс, являющийся линией уровня функции G . Таким образом, множество $\bigcap_{\mu(N)=0} \text{conv} (\text{grad } G(U(\bar{0}, \varepsilon)) \setminus N)$ содержит поле нормалей к этому эллипсу, а значит, и нулевой вектор, что доказывает утверждение для $\delta > 0$.

5. Заключение. Определенные нами свойства функции G позволяют построить фазовый портрет в терминах переменных u_P, u_Q .

³Факт существования хотя бы одного решения-луча для $\delta < 0$ легко доказывается геометрически (более подробно см. в п. 6.4).

⁴Стационарного в том смысле, что по теореме 1 луч $G = 0$ состоит из положений равновесия.

Теорема 3. Фазовый портрет системы (2) в зависимости от знака δ может быть одного из следующих трех видов, представленных на рис. 2 (штриховой линией обозначены линии уровня, на которых $G \neq 0$: короткие штрихи — линии уровня в случае $G < 0$, длинные — линии уровня в случае $G > 0$. Сплошная линия — линия уровня $G = 0$. Точкой обозначено начало координат).

Полученные результаты позволяют описать поведение исходной механической системы в зависимости от определенного в п. 3 безразмерного параметра δ :

1) $\delta > 0$ — угловые скорости цилиндров стремятся к нулю, происходит заклинивание механической системы;

2) $\delta = 0$ — в зависимости от параметров системы существует либо целая область, либо луч⁵ начальных угловых скоростей цилиндров, для которых происходит заклинивание системы. Для других начальных скоростей, не являющихся положениями равновесия, определенными в теореме 1, отношение угловых скоростей цилиндров стремится к константе, соответствующей лучу положений равновесия;

3) $\delta < 0$ — в этом случае систему никогда не заклинивает.

6. Дополнения.

6.1. Вывод системы уравнений (1). Введем два единичных вектора вдоль осей цилиндров — \bar{e}_P и \bar{e}_Q соответственно. В этом случае векторы угловых скоростей цилиндров P и Q равны $\omega_P \bar{e}_P$ и $\omega_Q \bar{e}_Q$.

Уравнение для кинетического момента цилиндра запишем относительно точки на оси цилиндра в проекции на эту ось:

$$\begin{cases} J_P \dot{\omega}_P = M_P + (\bar{M}_P^{\text{тр}}, \bar{e}_P), \\ J_Q \dot{\omega}_Q = M_Q + (\bar{M}_Q^{\text{тр}}, \bar{e}_Q). \end{cases}$$

Для определения направления силы трения вычислим вектор скорости относительного движения точек соприкосновения цилиндров. Ввиду условия $\theta \in (0, \pi/2]$ скорость ненулевая, если ω_P и ω_Q не равны нулю одновременно.

Скорости точек касания обозначим $\bar{V}_P^{\text{кас}}$ и $\bar{V}_Q^{\text{кас}}$. Единичные векторы в направлении точки касания:

$$\bar{e}_P^{\text{кас}} = -\frac{[\bar{e}_P, \bar{e}_Q]}{\sin \theta}, \quad \bar{e}_Q^{\text{кас}} = \frac{[\bar{e}_P, \bar{e}_Q]}{\sin \theta}.$$

Таким образом, скорости точек касания имеют вид

$$\bar{V}_P^{\text{кас}} = [\bar{\omega}_P, r_P \bar{e}_P^{\text{кас}}] = \frac{\omega_P r_P}{\sin \theta} [\bar{e}_P, [\bar{e}_Q, \bar{e}_P]] = \frac{\omega_P r_P}{\sin \theta} (\bar{e}_Q - (\bar{e}_P, \bar{e}_Q) \bar{e}_P) = \frac{\omega_P r_P}{\sin \theta} (\bar{e}_Q - \cos \theta \bar{e}_P),$$

$$\bar{V}_Q^{\text{кас}} = [\bar{\omega}_Q, r_Q \bar{e}_Q^{\text{кас}}] = \frac{\omega_Q r_Q}{\sin \theta} [\bar{e}_Q, [\bar{e}_P, \bar{e}_Q]] = \frac{\omega_Q r_Q}{\sin \theta} (\bar{e}_P - (\bar{e}_Q, \bar{e}_P) \bar{e}_Q) = \frac{\omega_Q r_Q}{\sin \theta} (\bar{e}_P - \cos \theta \bar{e}_Q).$$

Скорость точки касания цилиндра Q относительно цилиндра P равна

$$\bar{V}_Q^{\text{кас.отн}} = \bar{V}_Q^{\text{кас}} - \bar{V}_P^{\text{кас}} = \frac{(\omega_Q r_Q + \omega_P r_P \cos \theta) \bar{e}_P - (\omega_P r_P + \omega_Q r_Q \cos \theta) \bar{e}_Q}{\sin \theta}.$$

Модуль относительной скорости

$$V_{\text{отн}}^2 = \frac{(\omega_Q r_Q + \omega_P r_P \cos \theta)^2 + (\omega_P r_P + \omega_Q r_Q \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} - \frac{2(\omega_Q r_Q + \omega_P r_P \cos \theta)(\omega_P r_P + \omega_Q r_Q \cos \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \omega_P^2 r_P^2 + \omega_Q^2 r_Q^2 + 2\omega_P r_P \omega_Q r_Q \cos \theta.$$

Нормируя вектор относительной скорости (при $V_{\text{отн}} \neq 0$), получим

$$\bar{e}_Q^{\text{тр}} = -\frac{\bar{V}_Q^{\text{кас.отн}}}{V_{\text{отн}}}, \quad \bar{e}_P^{\text{тр}} = \frac{\bar{V}_Q^{\text{кас.отн}}}{V_{\text{отн}}}.$$

⁵Составив в случае $\delta = 0$ уравнение для определения решения-луча, аналогичное уравнению для $\delta < 0$, приведенному в п. 6.4, легко заключить, что возможны одно или три решения-луча (помимо соответствующего лучу $G = 0$). Когда их три, эти лучи и ограничивают область заклинивания системы (в силу единственности решений в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$). Если же луч один, то только точки этого луча приходят в начало координат.

Таким образом, при ненулевой относительной скорости получаем выражение для проекции момента силы трения

$$\begin{aligned} (\bar{M}_P^{\text{TP}}, \bar{e}_P) &= \left(\left[r_P \bar{e}_P^{\text{кас}}, kN \frac{(\omega_Q r_Q + \omega_P r_P \cos \theta) \bar{e}_P - (\omega_P r_P + \omega_Q r_Q \cos \theta) \bar{e}_Q}{V_{\text{отн}} \sin \theta} \right], \bar{e}_P \right) = \\ &= \left(\left[-r_P \frac{[\bar{e}_P, \bar{e}_Q]}{\sin \theta}, kN \frac{(\omega_Q r_Q + \omega_P r_P \cos \theta) \bar{e}_P - (\omega_P r_P + \omega_Q r_Q \cos \theta) \bar{e}_Q}{V_{\text{отн}} \sin \theta} \right], \bar{e}_P \right) = \\ &= \left(-\frac{kN r_P}{V_{\text{отн}}} (\omega_P r_P \bar{e}_P + \omega_Q r_Q \bar{e}_Q), \bar{e}_P \right) = -\frac{kN r_P (\omega_P r_P + \omega_Q r_Q \cos \theta)}{V_{\text{отн}}}. \end{aligned}$$

Аналогично для цилиндра Q

$$(\bar{M}_Q^{\text{TP}}, \bar{e}_Q) = -\frac{kN r_Q (\omega_P r_P \cos \theta + \omega_Q r_Q)}{V_{\text{отн}}}.$$

В итоге в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ выполнена следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} J_P \dot{\omega}_P = M_P - \frac{kN r_P (\omega_P r_P + \omega_Q r_Q \cos \theta)}{\sqrt{\omega_P^2 r_P^2 + \omega_Q^2 r_Q^2 + 2\omega_P r_P \omega_Q r_Q \cos \theta}}, \\ J_Q \dot{\omega}_Q = M_Q - \frac{kN r_Q (\omega_P r_P \cos \theta + \omega_Q r_Q)}{\sqrt{\omega_P^2 r_P^2 + \omega_Q^2 r_Q^2 + 2\omega_P r_P \omega_Q r_Q \cos \theta}}. \end{cases}$$

6.2. Доказательство леммы 1. Определим тип кривой, задаваемой уравнением (3).

Лемма 2. Если $\delta > 0$, то $s > 0$.

Доказательство. Рассмотрим числитель δ как квадратный трехчлен от переменной F_P . Дискриминант этого многочлена равен

$$D = 4 \cos^2 \theta F_Q^2 + 4(\sin^2 \theta - F_Q^2) = 4(1 - F_Q^2) \sin^2 \theta,$$

при этом старший коэффициент этого трехчлена отрицательный. Таким образом, чтобы было верно $\delta > 0$, необходимо условие $F_Q^2 < 1$. Аналогично получаем $F_P^2 < 1$, рассматривая числитель как квадратный трехчлен относительно F_Q . При этом

$$s = \frac{1 - F_P^2}{m_P} + \frac{1 - F_Q^2}{m_Q},$$

значит, при $\delta > 0$ будем иметь $s > 0$. Лемма доказана.

Лемма 3. Кривые семейства (3) при фиксированных θ, F_P, F_Q классифицируются следующим образом:

- 1) $\delta > 0$ – эллипсы при $c \neq 0$ и пара мнимых пересекающихся прямых при $c = 0$;
- 2) $\delta = 0$ – параболы при $c \neq 0$ и пара совпадающих прямых при $c = 0$;
- 3) $\delta < 0$ – гиперболы при $c \neq 0$ и пара действительных пересекающихся прямых при $c = 0$.

Доказательство⁶. 1) $\delta > 0$. В силу леммы 2 имеем $s > 0$. При $c \neq 0$ получаем $s\Delta < 0$, значит, кривые при $c \neq 0$ являются эллипсами. При $c = 0$ имеем $\Delta = 0$, поэтому уравнение (3) задает пару мнимых пересекающихся прямых.

2) $\delta = 0$. При $c \neq 0$ получаем $\Delta \neq 0$, значит, кривые являются парабололами. При $c = 0$ получаем $\Delta = 0$. Следовательно, выражение

$$K = \begin{vmatrix} \frac{1-F_P^2}{m_P} c \frac{F_P}{\sqrt{m_P}} & \\ c \frac{F_P}{\sqrt{m_P}} & -c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1-F_Q^2}{m_P} c \frac{F_Q}{\sqrt{m_Q}} & \\ c \frac{F_Q}{\sqrt{m_Q}} & -c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1-F_P^2}{m_P} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1-F_Q^2}{m_P} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

является ортогональным инвариантом, поэтому (3) задает пару совпадающих прямых при $c = 0$.

⁶Здесь существенно будет использоваться классификация кривых второго порядка по их ортогональным инвариантам, которая приводится, например, в [5, гл. XVI].

3) $\delta < 0$. При $c \neq 0$ получаем $\Delta \neq 0$ и в сочетании с условием $\delta < 0$ заключаем, что при $c \neq 0$ кривые являются гиперболами. При $c = 0$ получаем $\Delta = 0$, значит, (3) задает пару пересекающихся прямых.

Лемма доказана.

Сначала изучим относительное расположение кривой (3) и прямой $F_P \frac{u_P}{\sqrt{m_P}} + F_Q \frac{u_Q}{\sqrt{m_Q}} - c = 0$.

Лемма 4. При $c \neq 0$ кривая (3) и прямая $F_P \frac{u_P}{\sqrt{m_P}} + F_Q \frac{u_Q}{\sqrt{m_Q}} - c = 0$ не пересекаются.

Доказательство. Решим систему

$$\begin{cases} \frac{1-F_P^2}{m_P} u_P^2 + \frac{1-F_Q^2}{m_Q} u_Q^2 + 2 \frac{\cos \theta - F_P F_Q}{\sqrt{m_P m_Q}} u_P u_Q + 2 \frac{F_P c}{\sqrt{m_P}} u_P + 2 \frac{F_Q c}{\sqrt{m_Q}} u_Q - c^2 = 0, \\ F_P \frac{u_P}{\sqrt{m_P}} + F_Q \frac{u_Q}{\sqrt{m_Q}} - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{u_P}{\sqrt{m_P}} \right)^2 + \left(\frac{u_Q}{\sqrt{m_Q}} \right)^2 + 2 \frac{u_P u_Q}{\sqrt{m_P m_Q}} \cos \theta = 0, \\ F_P \frac{u_P}{\sqrt{m_P}} + F_Q \frac{u_Q}{\sqrt{m_Q}} - c = 0. \end{cases}$$

При $c \neq 0$ нулевое решение не удовлетворяет второму уравнению. Первое уравнение последней системы имеет ненулевые вещественные решения только при $\cos \theta = \pm 1$, что противоречит условию $\theta \in (0, \pi/2]$. Значит, при $c \neq 0$ система решений не имеет, что доказывает отсутствие пересечений.

Перейдем к доказательству леммы 1. В первую очередь обратим внимание на тот факт, что начало координат удовлетворяет неравенству (4) только при $c \leq 0$. Также заметим, что случай $F_P = F_Q = 0$ соответствует $\delta > 0$.

1. По лемме 2 при $\delta > 0$ уравнение (3) задает или эллипс, или пару мнимых пересекающихся прямых ($c = 0$).

Воспользуемся понятием центра кривой второго порядка, которое можно ввести при $\delta \neq 0$, чтобы определить относительное положение начала координат и эллипса. Центр заведомо лежит внутри эллипса, поэтому, сравнивая знак левой части уравнения (3) в начале координат и в центре эллипса, мы можем определить их относительное положение.

Центр кривой второго порядка определяется из следующей системы:

$$\begin{cases} \frac{1-F_P^2}{m_P} u_{P0} + \frac{\cos \theta - F_P F_Q}{\sqrt{m_P m_Q}} u_{Q0} + \frac{F_P c}{\sqrt{m_P}} = 0, \\ \frac{\cos \theta - F_P F_Q}{\sqrt{m_P m_Q}} u_{P0} + \frac{1-F_Q^2}{m_Q} u_{Q0} + \frac{F_Q c}{\sqrt{m_Q}} = 0, \end{cases}$$

решая которую, получим координаты

$$u_{P0} = -\frac{F_P - F_Q \cos \theta}{\delta \sqrt{m_P m_Q}} c, \quad u_{Q0} = -\frac{F_Q - F_P \cos \theta}{\delta m_P \sqrt{m_Q}} c.$$

Подставляя начало координат и координаты центра в $g(u_P, u_Q)$, будем иметь

$$g(0, 0) = -c^2,$$

$$g(u_{P0}, u_{Q0}) = \frac{F_P c}{\sqrt{m_P}} u_{P0} + \frac{F_Q c}{\sqrt{m_Q}} u_{Q0} - c^2 = -\frac{F_P c^2}{\sqrt{m_P}} \frac{F_P - F_Q \cos \theta}{\delta \sqrt{m_P m_Q}} - \frac{F_Q c^2}{\sqrt{m_Q}} \frac{F_Q - F_P \cos \theta}{\delta m_P \sqrt{m_Q}} - c^2 =$$

$$= \frac{c^2}{\delta} \left(-\frac{F_P^2 - F_P F_Q \cos \theta}{m_P m_Q} - \frac{F_Q^2 - F_P F_Q \cos \theta}{m_P m_Q} - \frac{\sin^2 \theta - (F_P^2 - 2 \cos \theta F_P F_Q + F_Q^2)}{m_P m_Q} \right) = -\frac{c^2 \sin^2 \theta}{\delta m_P m_Q}.$$

Сравнивая знаки полученных выражений, заключаем, что начало координат при $c \neq 0$ всегда находится внутри эллипса, заданного уравнением (3) (при $c = 0$ центр и заданное (3) множество совпадают). В силу леммы 4 из этого следует, что система (5) задает непустое множество тогда и только тогда, когда начало координат удовлетворяет неравенству (4), т.е., как уже было замечено в самом начале доказательства, при $c \leq 0$, причем задаваемое множество совпадает с множеством, заданным только лишь уравнением (3).

2. По лемме 3 при $\delta = 0$ уравнение (3) задает параболу или пару совпадающих параллельных прямых ($c = 0$). В силу леммы 4 система (5) при $\delta = 0$ и фиксированном c либо задает пустое множество, либо эквивалентна только уравнению (3).

Докажем, что при $c \neq 0$ начало координат должно лежать внутри параболы, чтобы система задавала непустое множество. Действительно, если начало координат лежит вне параболы, то из него можно провести секущую к параболе. При этом кривые с параметром c одного знака гомотетичны с положительным коэффициентом, причем направление векторного поля системы (2) в точках, которые лежат на одном луче, исходящем из начала координат, одинаково. Значит, наличие секущей к параболе нарушит это условие, поэтому непустое множество может задаваться, если только начало координат лежит внутри параболы.

Очевидно, что непустое множество должно задаваться хотя бы в одном из случаев $c > 0$ и $c < 0$. Из полученного выше следует, что начало координат должно удовлетворять неравенству (4), т.е. задаются параболы с параметром $c < 0$.

Остался случай $c = 0$. Уравнение (3) задает прямую, проходящую через начало координат (как множество точек). Прямая, определяющая неравенство (4), тоже проходит через начало координат, поэтому система при $c = 0$ задает либо прямую, если заданные прямые совпадают, либо луч, исходящий из начала координат.

Прямая очевидно не подходит, поскольку иначе линии уровня функции G будут пересекаться (начало координат лежит внутри параболы). Остается одна возможность — луч, направление которого тоже однозначно определяется из условия отсутствия пересечения у различных линий уровня функции G .

3. По лемме 3 при $\delta < 0$ уравнение (3) задает гиперболу либо пару пересекающихся прямых ($c = 0$). Из леммы 4 следует, что в полуплоскости, определяемой неравенством (4), находится одна и только одна ветвь гиперболы, а значит, система (5) задает эту ветвь гиперболы.

При $\delta < 0$ для кривых тоже можно рассмотреть центры и аналогично случаю $\delta > 0$ при $c \neq 0$ получить, что начало координат относительно гиперболы расположено в одной из двух областей, для которых границей является лишь одна ветвь гиперболы, поскольку знаки $g(0, 0)$ и $g(u_{P0}, u_{Q0})$ различны. Это позволяет утверждать, что при $c > 0$ выбирается ветвь, внутри которой нет начала координат, а при $c < 0$ — та, внутри которой лежит начало координат.

При $c = 0$ уравнение (3) задает пару пересекающихся прямых, поэтому система (5) задает либо пару лучей, исходящих из начала координат, либо прямую, проходящую через начало координат, и исходящий из начала координат луч. Последний случай невозможен, поскольку начало координат лежит внутри ветвей гипербол с $c < 0$, поэтому прямая, соответствующая $c = 0$, пересечет эту ветвь гиперболы, что невозможно. Направления лучей тоже определяются из условия того, что линии уровня не пересекаются.

6.3. Система (2) в полярных координатах и решения-лучи. Сделаем еще одну замену координат: $u_P = r \cos \varphi$, $u_Q = r \sin \varphi$. Система (2) переписывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{r} = F_P \frac{\cos \varphi}{\sqrt{m_P}} + F_Q \frac{\sin \varphi}{\sqrt{m_Q}} - \sqrt{\left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{m_P}}\right)^2 + \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{m_Q}}\right)^2 + 2 \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\sqrt{m_P m_Q}} \cos \theta}, \\ r \dot{\varphi} = F_Q \frac{\cos \varphi}{\sqrt{m_Q}} - F_P \frac{\sin \varphi}{\sqrt{m_P}} - \frac{\left(\frac{1}{m_Q} - \frac{1}{m_P}\right) \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\cos \theta}{\sqrt{m_P m_Q}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{\sqrt{\left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{m_P}}\right)^2 + \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{m_Q}}\right)^2 + 2 \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\sqrt{m_P m_Q}} \cos \theta}}. \end{cases}$$

Решая уравнение $\dot{\varphi} = 0$, мы можем определить решения, на которых угловые скорости цилиндров пропорциональны с постоянным коэффициентом. Фазовые кривые этих решений представляют собой лучи, исходящие из начала координат или входящие в него. Это и есть упомянутые в п. 4.2 решения-лучи.

В терминах переменных u_P, u_Q решения-лучи — это лучи, исходящие из начала координат или входящие в него и ортогональные линиям уровня $G \neq 0$.

6.4. Существование хотя бы одного нестационарного решения-луча, исходящего из начала координат при $\delta < 0$. Рассмотрим ветвь гиперболы в канонической системе координат:

$$x = a \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}, \quad y \in \mathbb{R},$$

и произвольную точку $A_0 = (x_0, y_0)$ не на этой ветви (a и b — произвольные положительные вещественные числа).

Решение-луч можно найти, установив точку $A = (x, y)$ на этой ветви гиперболы, такую, что вектор $\overline{A_0 A}$ ортогонален касательному вектору к гиперболе в точке A . Таким образом, система

уравнений для определения точки A следующая:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}, \\ \frac{y(x - x_0)}{b^2} + \frac{x(y - y_0)}{a^2} = 0, \end{cases}$$

что в итоге приводит к уравнению

$$\frac{y \left(a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} - x_0 \right)}{b^2} + \frac{a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}(y - y_0)}{a^2} = 0.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{y \left(a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} - x_0 \right)}{b^2} + \frac{a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}(y - y_0)}{a^2} \right) = \pm\infty,$$

а значит, в силу непрерывности есть хотя бы один корень, что доказывает наличие решения-луча.

Автор признателен профессору О.Э. Зубелевичу за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Матем. сб. 1960. **51(93)**, № 1. 99–128.
2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, Гл. редакция физ.-мат. лит., 1985.
3. Knyazhishche L.B. Extremum condition and stability tests for solutions of gradient systems // Diff. Equat. 2019. **55**. 340–347.
4. Богавский И.А. Разрывные градиентные дифференциальные уравнения и траектории в вариационном исчислении // Матем. сб. 2006. **197**, № 12. 11–42.
5. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии, дополненные необходимыми сведениями из алгебры. М.: Наука, Гл. редакция физ.-мат. лит., 1968.

Поступила в редакцию
31.08.2022

УДК 511

ТЕНЗОР КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ РАСТЯГИВАЕМОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ РЕШЕТКОЙ ИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

И. Ф. Старцев¹

В статье дано построение решения плоской двоякопериодической задачи нагружения бесконечной упругой изотропной плоскости с эллиптическими включениями. Плоскость находится под одной из трех нагрузок: растягивается в направлении одной из осей включения или испытывает чистый сдвиг на бесконечности. Также рассмотрено понятие тензора концентрации напряжений и показан пример его построения. Решение задачи сводится к

¹ Старцев Илья Федорович — асп. каф. механики композитов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: I_kotorii_I@mail.ru.
Startsev Ilya Fedorovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mechanics of Composites.