сравнением расчетов на двух сетках с числом узлов 5 и 10, в первом собственном значении расхождение — в четвертом знаке после запятой, что достигается применением современного метода без насыщения, идеи которого принадлежат К. И. Бабенко [4] и который разработан первым автором [3]. Таким образом, надежность применяемой методики не вызывает сомнений. Проводилось сравнение с известными результатами, вследствие чего было установлено, что в табл. 1 из [2] перепутаны граничные условия. В расчетах авторов настоящей работы на разных сетках наблюдается сходимость, совпадение с расчетами при граничных условиях SS–SS, а не C–C. В табл. 2 из [2] при $n = 0$ определено не первое собственное значение, а третье или четвертое (на сетке при $M = 5$ — третье, а при $M = 10$ — четвертое, более достоверный расчет — при $M = 10$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liew K.M., Ng T.Y., Zhao X.* Free vibration analysis of conical shells via the element-free kp-Ritz method // J. Sound Vibr. 2005. **281**. 627–645 (`https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.01.005`).
2. *Shu C.* An efficient approach for free vibration analysis of conical shells // Int. J. Mech. Sci. 1996. **38**. 935–949 (`https://doi.org/10.1016/0020-7403(95)00096-8`).
3. *Алгазин С.Д.* Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. 4-е изд., перераб. М.: URSS, 2019.
4. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
5. *Гавриков М.Б., Таюрский А.А* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: URSS, 2016.

Поступила в редакцию
16.03.2022

УДК 531.36

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ В ПОТОКЕ ЧАСТИЦ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ, ОГРАНИЧЕННОГО ПОВЕРХНОСТЬЮ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

М. М. Гаджиев[1], А. С. Кулешов[2]

Рассматривается задача о движении в свободном молекулярном потоке частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения. Получены необходимые условия существования в этом случае дополнительного аналитического первого интеграла, независимого с интегралом энергии.

Ключевые слова: твердое тело с неподвижной точкой, свободный молекулярный поток, гамильтонова система, неинтегрируемость.

The problem of motion in a free molecular flow of particles of a rigid body with a fixed point bounded by the surface of an ellipsoid of revolution is considered. Necessary conditions for the existence of an additional analytic first integral independent of the energy integral are obtained in this problem.

Key words: rigid body with a fixed point, free molecular flow of particles, Hamiltonian system, nonintegrability.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-2-5

1. Введение. Теорема об отсутствии аналитических интегралов вблизи положений равновесия гамильтоновых систем. Рассмотрим систему канонических уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n,\ n \geqslant 2, \tag{1}$$

---

[1] *Гаджиев Максим Магомедович* — асп. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: maxuta-jr@yandex.ru.

Gadzhiev Maxim Magomedovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.

[2] *Кулешов Александр Сергеевич* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: kuleshov@mech.math.msu.su.

Kuleshov Alexander Sergeevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.

с гамильтонианом $H(x_1,\ldots,x_n,\,y_1,\ldots,y_n,\,\boldsymbol{\varepsilon})$, аналитически зависящим от переменных $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_n)$ и параметра $\boldsymbol{\varepsilon}$, принимающего значения из некоторой связной области $D\in\mathbb{R}^r$. Предположим, что при всех $\boldsymbol{\varepsilon}\in D$ точка $x_i=0$, $y_i=0$ $(i=1,\ldots,n)$ — положение равновесия системы уравнений (1). В окрестности положения равновесия функцию H можно представить в следующем виде:

$$H=H^{(2)}+H^{(3)}+\ldots,$$

где $H^{(s)}$ — однородная форма степени s по переменным $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. Коэффициенты этого разложения аналитичны по параметру $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Предположим, что при всех $\boldsymbol{\varepsilon}\in D$ частоты линейных колебаний $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\varepsilon})=(\omega_1(\boldsymbol{\varepsilon}),\ldots,\omega_n(\boldsymbol{\varepsilon}))$ не удовлетворяют ни одному из соотношений

$$(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega})=m_1\omega_1+\ldots+m_n\omega_n=0,\quad |m_1|+\ldots+|m_n|\leqslant m-1.$$

Применяя метод Биркгофа [1], в окрестности положения равновесия можно найти каноническое преобразование $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$, аналитическое по $\boldsymbol{\varepsilon}$ и такое, что в новых координатах

$$H^{(2)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\rho_i,\quad H^{(k)}=H^{(k)}(\rho_1,\ldots,\rho_n,\boldsymbol{\varepsilon}),\quad k\leqslant m-1,$$

где $\rho_i=p_i^2+q_i^2$.

Теперь перейдем к каноническим переменным действие–угол $(\boldsymbol{I},\,\boldsymbol{\varphi})$ по формулам

$$I_i=\frac{\rho_i}{2},\quad \varphi_i=\operatorname{arctg}\frac{p_i}{q_i}\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

В переменных $(\boldsymbol{I},\,\boldsymbol{\varphi})$ функция Гамильтона записывается следующим образом:

$$H=H^{(2)}(\boldsymbol{I},\,\boldsymbol{\varepsilon})+\ldots+H^{(m-1)}(\boldsymbol{I},\,\boldsymbol{\varepsilon})+H^{(m)}(\boldsymbol{I},\,\boldsymbol{\varphi},\,\boldsymbol{\varepsilon})+\ldots.$$

Представим тригонометрический полином $H^{(m)}$ в виде конечного ряда Фурье:

$$H^{(m)}=\sum h_{\boldsymbol{k}}^{(m)}(\boldsymbol{I},\,\boldsymbol{\varepsilon})\exp\left(i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right)\right).$$

Теорема 1 [2, 3]. *Предположим, что $(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\varepsilon}))\not\equiv 0$ при всех $\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n\backslash 0$. Пусть при некотором $\boldsymbol{\varepsilon}_0\in D$ выполнено резонансное соотношение $(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\varepsilon}_0))=0$, $|\boldsymbol{k}_0|=m$ и $h_{\boldsymbol{k}_0}^{(m)}\not\equiv 0$. Тогда канонические уравнения с функцией Гамильтона $H=\sum H^{(s)}$ не имеют полного набора формальных интегралов $F_j=\sum F_j^{(s)}$, квадратичные части которых $F_j^{(2)}(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{\varepsilon})$ независимы при всех $\boldsymbol{\varepsilon}\in D$.*

Преимущество теоремы 1 (теоремы Козлова) по сравнению с другими методами исследования неинтегрируемости различных механических систем (см., например, [4, 5]) состоит в отсутствии предварительных ограничительных предположений, касающихся конструктивных параметров системы. Оно в существенной мере компенсирует то обстоятельство, что дополнительный интеграл должен принадлежать классу аналитических функций, квадратичные части которых функционально независимы с квадратичной частью функции Гамильтона.

Теорема Козлова успешно применялась при доказательстве отсутствия дополнительного аналитического интеграла в плоской круговой ограниченной задаче трех тел [2, 3]; при исследовании интегрируемости задачи о вращении вокруг неподвижной точки динамически симметричного твердого тела, центр тяжести которого лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции [2, 3]; при получении необходимых условий существования дополнительного первого интеграла в задаче о движении тяжелого динамически и геометрически симметричного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости [6]; при доказательстве отсутствия дополнительного интеграла в задаче о движении плоского двойного маятника [7]; при исследовании уравнений Кирхгофа движения твердого тела в жидкости [8, 9]. В настоящей работе теорема Козлова используется для вывода необходимых условий существования дополнительного интеграла в задаче о движении в потоке частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения.

2. Постановка задачи. Функция Гамильтона. Уравнения движения в потоке частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида, имеют вид [10]

$$
\begin{aligned}
&A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\,\omega_2\omega_3 = \rho v_0^2\pi a_1a_2a_3\sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2}+\frac{\gamma_2^2}{a_2^2}+\frac{\gamma_3^2}{a_3^2}}\,(h_2\gamma_3 - h_3\gamma_2)\,,\\
&A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\,\omega_1\omega_3 = \rho v_0^2\pi a_1a_2a_3\sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2}+\frac{\gamma_2^2}{a_2^2}+\frac{\gamma_3^2}{a_3^2}}\,(h_3\gamma_1 - h_1\gamma_3)\,,\\
&A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\,\omega_1\omega_2 = \rho v_0^2\pi a_1a_2a_3\sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a_1^2}+\frac{\gamma_2^2}{a_2^2}+\frac{\gamma_3^2}{a_3^2}}\,(h_1\gamma_2 - h_2\gamma_1)\,;\\
&\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3,\quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1,\quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь A_1, A_2, A_3 — моменты инерции тела относительно главных осей инерции $Ox_1x_2x_3$, построенных в неподвижной точке O; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\, \omega_2,\, \omega_3)$ — вектор угловой скорости тела; $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1,\, \gamma_2,\, \gamma_3)$ — единичный вектор, направленный вдоль набегающего потока частиц; ρ — плотность потока частиц; v_0 — постоянная скорость частиц в потоке; a_1, a_2, a_3 — длины полуосей поверхности эллипсоида, ограничивающей твердое тело с неподвижной точкой; $\boldsymbol{h} = (h_1,\, h_2,\, h_3)$ — вектор, направленный из неподвижной точки в центр эллипсоида, ограничивающего твердое тело.

Предположим, что центр эллипсоида лежит на первой главной оси инерции, построенной в неподвижной точке, на расстоянии l от последней. Иными словами, в уравнениях (2) положим

$$h_1 = l,\quad h_2 = 0,\quad h_3 = 0.$$

Кроме того, предположим, что эллипсоид, ограничивающий твердое тело, является эллипсоидом вращения, причем ось симметрии эллипсоида проходит через неподвижную точку. Следовательно, в уравнениях (2) необходимо положить

$$a_1 = b,\quad a_2 = a_3 = a.$$

Предположим также, что тело является динамически симметричным, причем ось динамической симметрии тела не совпадает с осью симметрии эллипсоида, ограничивающего тело. Будем считать, что

$$A_1 = A_2 = A,\quad A_3 = C.$$

Тогда уравнения движения в потоке частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, перепишутся в виде

$$
\begin{aligned}
&A\dot{\omega}_1 + (C - A)\,\omega_2\omega_3 = 0,\\
&A\dot{\omega}_2 + (A - C)\,\omega_1\omega_3 = -\rho v_0^2\pi a^2 bl\sqrt{\frac{1-\gamma_1^2}{a^2}+\frac{\gamma_1^2}{b^2}}\gamma_3,\\
&C\dot{\omega}_3 = \rho v_0^2\pi a^2 bl\sqrt{\frac{1-\gamma_1^2}{a^2}+\frac{\gamma_1^2}{b^2}}\gamma_2;\\
&\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3,\quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1,\quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Уравнения (3) обладают первым интегралом типа интеграла энергии

$$H = \frac{A}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) + \frac{C}{2}\omega_3^2 - G\,(\gamma_1) = h = \text{const}.$$

Функция $G\,(\gamma_1)$ записывается по-разному в зависимости от того, является эллипсоид, ограничивающий твердое тело, вытянутым $(b > a)$ или сжатым $(a > b)$.

Для вытянутого эллипсоида вращения ($b > a$) функция $G(\gamma_1)$ имеет вид

$$G(\gamma_1) = \frac{\rho v_0^2 \pi a^2 bl}{2}\gamma_1\sqrt{\frac{1-\gamma_1^2}{a^2}+\frac{\gamma_1^2}{b^2}} + \frac{\rho v_0^2 \pi bl}{2\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}\,\gamma_1}{\sqrt{\frac{1-\gamma_1^2}{a^2}+\frac{\gamma_1^2}{b^2}}}\right).$$

Для сжатого эллипсоида вращения ($a > b$)

$$G(\gamma_1) = \frac{\rho v_0^2 \pi a^2 bl}{2}\gamma_1\sqrt{\frac{1-\gamma_1^2}{a^2}+\frac{\gamma_1^2}{b^2}} + \frac{\rho v_0^2 \pi bl}{2\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}}\ln\left(a\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}\,\gamma_1 + a\sqrt{\frac{1-\gamma_1^2}{a^2}+\frac{\gamma_1^2}{b^2}}\right).$$

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением случая вытянутого эллипсоида вращения (случай сжатого эллипсоида рассматривается аналогично и дает тот же результат). В качестве обобщенных координат в данной задаче введем стандартные углы Эйлера θ, ψ и φ. Тогда

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta$$

и функция Гамильтона задачи в стандартных обозначениях имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_\theta^2}{A}+\frac{p_\varphi^2}{C}+\frac{(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta}\right) - \frac{\rho v_0^2\pi a^2 bl}{2}\sin\theta\sin\varphi\sqrt{\frac{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}} -$$

$$-\frac{\rho v_0^2 \pi bl}{2\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}\sin\theta\sin\varphi}{\sqrt{\frac{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}}}\right). \tag{4}$$

Очевидно, что функция Гамильтона H не зависит от координаты ψ, т.е. канонический импульс p_ψ является постоянным. Уравнения движения тела имеют гамильтонов вид с функцией Гамильтона (4), в которую p_ψ входит как параметр. Будем считать постоянную p_ψ именно тем параметром, о котором шла речь в формулировке теоремы Козлова [2, 3]. Получим необходимые условия существования у системы уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона (4) независимого с H дополнительного интеграла, аналитичного по p_ψ.

3. Применение теоремы Козлова. При любом значении p_ψ точка

$$(p_\theta,\, p_\varphi,\, \theta,\, \varphi) = \left(0,\, 0,\, \frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right)$$

есть положение равновесия приведенной системы Гамильтона. Положим

$$p_\theta = y_1, \quad p_\varphi = y_2, \quad \theta = \frac{\pi}{2}+x_1, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}+x_2.$$

Выберем размерные параметры задачи так, что

$$\pi\rho v_0^2 l a^2 = 1, \quad A = 1, \quad p_\psi = \sqrt{x}, \quad \frac{1}{C} = y, \quad \frac{b^2}{a^2} = z.$$

Тогда первые три члена разложения функции Гамильтона (4) в ряд в окрестности положения равновесия $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ имеют вид

$$H = H^{(2)} + H^{(3)} + H^{(4)} + \ldots,$$

$$H^{(2)}(y_1,\, y_2,\, x_1,\, x_2) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{y}{2}y_2^2 + \sqrt{x}x_1y_2 + \frac{(1+x)}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2, \quad H^{(3)}(y_1,\, y_2,\, x_1,\, x_2) = 0,$$

$$H^{(4)}(y_1,\, y_2,\, x_1,\, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2y_2^2 + \frac{5}{6}\sqrt{x}x_1^3y_2 + \left(\frac{z}{4}-\frac{1}{2}\right)x_1^2x_2^2 + \left(\frac{x}{3}+\frac{z}{8}-\frac{1}{6}\right)x_1^4 + \left(\frac{z}{8}-\frac{1}{6}\right)x_2^4.$$

Заметим, что в случае $z = 1$, т.е. когда тело, обтекаемое потоком частиц, ограничено поверхностью сферы, выражения $H^{(2)}(y_1, y_2, x_1, x_2)$ и $H^{(4)}(y_1, y_2, x_1, x_2)$ в точности совпадают с соответствующими выражениями, полученными в работах [2, 3] при разложении в ряд функции Гамильтона задачи о движении тяжелого динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой, центр тяжести которого находится в экваториальной плоскости эллипсоида инерции.

Характеристическое уравнение линейной системы записывается следующим образом:

$$\lambda^4 + (1 + x + y)\lambda^2 + y(1 + x) - x = 0. \tag{5}$$

Корни уравнения (5) являются чисто мнимыми, если выполняется условие

$$y > \frac{x}{1 + x}.$$

Обозначим через E подобласть $\mathbb{R}^2_+$, где выполняется это неравенство. Отношение частот $\lambda_1/\lambda_2 = 3$, если параметры x и y связаны соотношением

$$9x^2 - 82xy + 9y^2 + 118x - 82y + 9 = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) — это уравнение гиперболы; ее ветви при $x > 0$, $y > 0$ лежат целиком в E.

Из неравенства треугольника для главных центральных моментов инерции следует, что $y \geqslant 1/2$. Для фиксированного $y_0 \geqslant 1/2$ существует значение $x_0 > 0$, такое, что точка (x_0, y_0) удовлетворяет уравнению (6). Пусть (a, b) — малый интервал изменения параметра x, включающий точку x_0. При $x \in (a, b)$, $y = y_0$ корни характеристического уравнения являются чисто мнимыми и различными, причем при $x = x_0$ выполнено условие $\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$. Остается выяснить, при каких условиях обращается в нуль вековой коэффициент $h^{(4)}_{1,-3}$.

После линейного канонического преобразования $(x_1, y_1, x_2, y_2) \to (q_1, p_1, q_2, p_2)$ по формулам

$$y_1 = \frac{1}{1+\alpha^2}p_1 + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}q_2, \quad y_2 = \frac{1}{\alpha}p_2 + \alpha q_1, \quad x_1 = q_1 - p_2, \quad x_2 = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}(q_2 - p_1),$$

$$\sqrt{x}\alpha^2 + (x + 1 - y)\alpha - \sqrt{x} = 0$$

квадратичная часть $H^{(2)}$ функции Гамильтона представится в виде

$$H^{(2)} = \frac{A_1}{2}p_1^2 + \frac{B_1}{2}q_1^2 + \frac{A_2}{2}p_2^2 + \frac{B_2}{2}q_2^2,$$

$$A_1 = \frac{1}{1+\alpha^2}, \quad A_2 = \frac{y - 2\alpha\sqrt{x} + (1+x)\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{\left(1+\alpha^2\right)\left(y - \sqrt{x}\alpha\right)}{\alpha^2},$$

$$B_1 = \alpha^2 y + 2\alpha\sqrt{x} + 1 + x = \left(1+\alpha^2\right)\left(y + \frac{\sqrt{x}}{\alpha}\right), \quad B_2 = \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}.$$

Перейдем к переменным действие–угол $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi})$ по формулам

$$q_1 = i\sqrt{\frac{I_1}{2}\sqrt{\frac{A_1}{B_1}}}\left(e^{-i\varphi_1} - e^{i\varphi_1}\right), \quad p_1 = \sqrt{\frac{I_1}{2}\sqrt{\frac{B_1}{A_1}}}\left(e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_1}\right),$$

$$q_2 = i\sqrt{\frac{I_2}{2}\sqrt{\frac{A_2}{B_2}}}\left(e^{-i\varphi_2} - e^{i\varphi_2}\right), \quad p_2 = \sqrt{\frac{I_2}{2}\sqrt{\frac{B_2}{A_2}}}\left(e^{i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2}\right).$$

Здесь i — мнимая единица. В новых переменных

$$H^{(4)} = \sum_{0 \leqslant |m_1| + |m_2| \leqslant 4} h^{(4)}_{m_1,m_2} e^{i(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)}.$$

Условие равенства нулю коэффициента $h^{(4)}_{1,-3}$ можно записать в виде

$$27x^3z + 111x^2yz - 159xy^2z - 243y^3z - 9x^3 - 617x^2y - 39x^2z + 2093xy^2 - 118xyz + 1701y^3 + 621y^2z +$$

$$+653x^2 - 4374xy - 59xz - 2727y^2 - 129yz + 2633x + 543y + 7z - 29 = 0. \quad (7)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Необходимые условия существования дополнительного интеграла, независимого с интегралом энергии H, аналитического по каноническим переменным и параметру x, в задаче о движении в потоке частиц динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида, центр которого лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, имеют вид соотношений* (6), (7).

Замечание. При $z = 1$, т.е. в случае, когда тело, обтекаемое потоком частиц, ограничено поверхностью сферы, условия (6) и (7) принимают вид

$$9x^2 - 82xy + 9y^2 + 118x - 82y + 9 = 0, \quad (8)$$

$$18x^3 - 506x^2y + 1934xy^2 + 1458y^3 + 614x^2 - 4492xy - 2106y^2 + 2574x + 414y - 22 = 0 \quad (9)$$

и совпадают с необходимыми условиями существования дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого динамически симметричного тела с неподвижной точкой, центр масс которого лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, полученными в работах [2, 3]. Алгебраические кривые (8) и (9) пересекаются в двух точках (x, y):

$$\left(\frac{4}{3}, 1\right) \quad \text{и} \quad (7, 2),$$

которым отвечают интегрируемые случаи Лагранжа ($A = C$) и Ковалевской ($A = 2C$). □

Положим $y = 2$ в соотношениях (6), (7), т.е. рассмотрим твердое тело с распределением масс, соответствующим случаю Ковалевской. Тогда соотношение (6) принимает вид

$$(9x + 17)(x - 7) = 0$$

и может выполняться только при $x = 7$. Подстановка значений $x = 7$ и $y = 2$ в соотношение (7) дает

$$12000\,(z - 1) = 0.$$

Таким образом, для твердого тела с распределением масс, соответствующим случаю Ковалевской, дополнительный первый интеграл, независимый с интегралом энергии, может существовать только в случае, когда тело ограничено поверхностью сферы. В случае, когда твердое тело, находящееся в потоке частиц, ограничено поверхностью эллипсоида, дополнительного первого интеграла не существует.

Заметим, что при любом значении z соотношения (6) и (7) допускают решение

$$x = \frac{4}{3}, \quad y = 1,$$

которому отвечает интегрируемый случай Лагранжа ($A = C$). Таким образом, в данной задаче при любой форме эллипсоида (и когда он сжат, и когда вытянут) существует интегрируемый случай, соответствующий случаю Лагранжа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1990.
2. *Козлов В.В.* Несуществование аналитических интегралов вблизи положений равновесия гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1976. № 1. 110–115.
3. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмурт. гос. ун-та, 1995.
4. *Dullin H.R.* Melnikov's method applied to the double pendulum // Z. Phys. B. 1994. **93**. 521–528.
5. *Моауро В., Негрини П.* Хаотические траектории двойного математического маятника // Прикл. матем. и механ. 1998. **62**. 892–895.
6. *Ивочкин М.Ю.* Необходимые условия существования дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости // Прикл. матем. и механ. 2009. **75**. 858–866.
7. *Буров А.А.* Несуществование дополнительного интеграла в задаче о плоском тяжелом двойном маятнике // Прикл. матем. и механ. 1986. **50**. 168–171.

8. *Козлов В.В., Онищенко Д.А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Докл. АН СССР. 1982. **266**. 1298–1300.
9. *Онищенко Д.А.* Приведение к нормальной форме уравнений канонической системы, зависящей от параметра // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1982. № 3. 78–81.
10. *Гаджиев М.М., Кулешов А.С.* О движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2022. № 3. 58–68.

Поступила в редакцию
01.07.2022

УДК 517.911.5

О ДВИЖЕНИИ ДВУХ СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРОВ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОСРЕДСТВОМ СИЛЫ СУХОГО ТРЕНИЯ

Е. Е. Борисенко[1]

Рассматривается движение двух соприкасающихся цилиндров, взаимодействующих посредством силы сухого трения. Для исследования системы с разрывной правой частью используется теория Филиппова. Доказана правосторонняя единственность решений системы, построен фазовый портрет, изучены его возможные бифуркации. Полученные результаты позволяют охарактеризовать движения исходной механической системы, в частности установить условия заклинивания цилиндров и стационарного вращения.

Ключевые слова: дифференциальные включения, регуляризация по Филиппову, системы с трением.

This paper concerned with the motion of two contacting cylinders, there is dry friction between them. Filippov's theory of discontinuous differential equations is used to study ODE system. The forward uniqueness of the solution is proven, the phase portrait is drawn, its bifurcation is studied. These results allow us to describe the motions of the given mechanical system, in particular, to describe the seizing and permanent rotation conditions.

Key words: differential inclusions, Filippov's regularization, systems with friction.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-2-6

1. Постановка задачи и математическая модель. Рассмотрим механическую систему, представленную на рис. 1.

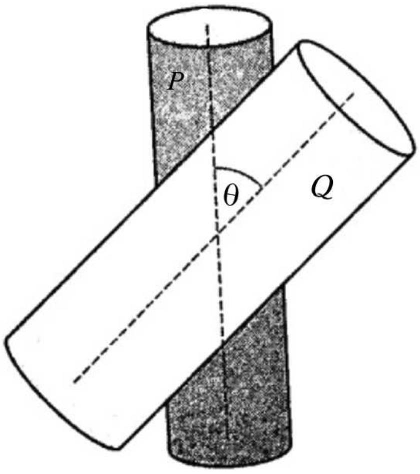

Рис. 1. Механическая система

Два круглых цилиндра P и Q радиусов r_P, r_Q прижаты друг к другу с силой N, коэффициент сухого трения между цилиндрами равен k. Оси цилиндров неподвижны, и угол между ними равен $\theta \in (0; \pi/2]$. Цилиндры поворачиваются вокруг своих осей под действием приложенных к ним моментов сил M_P, M_Q соответственно. Моменты направлены вдоль осей цилиндров. Масса каждого цилиндра распределена осесимметрично. Моменты инерции цилиндров относительно осей равны соответственно J_P, J_Q.

Изучим движения этой системы и построим ее фазовый портрет в терминах ω_P, ω_Q — угловых скоростей вращения цилиндров вокруг своих осей.

Движение в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ описывается следующей системой дифференциальных уравнений (подробный вывод приведен в п. 6.1):

[1] *Борисенко Евгений Егорович* — студ. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: yevhenii16@yandex.ru.

Borisenko Evgenii Egorovich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.